

КОНСТРУИРОВАНИЕ PH-КРИВОЙ ПРОСТРАНСТВА ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПРОЕКЦИЯМ ЕЁ ГОДОГРАФА

К. Л. Панчук, Т. М. Мясоедова, Е. В. Любчинов

Омский государственный технический университет, Россия, 644050, г. Омск, пр. Мира, 11

В современном геометрическом моделировании известен класс плоских и пространственных PH-кривых (кривых пифагорова годографа), получивших теоретическое обоснование математиком Rida T. Farouki в 2007 г. PH-кривые обладают уникальным свойством, имеющим важное значение в решении множества разноплановых практических задач, а именно «параметрическая скорость» этих кривых, т. е. производная от длины дуги по параметру кривой является полиномиальной (или рациональной) функцией параметра. Данное свойство обусловлено тем, что координатные компоненты годографа PH-кривой представляют собой элементы пифагорова $(n+1)$ -кортежа координатных полиномов.

Благодаря отмеченному свойству PH-кривые востребованы в решениях различных практических задач: генерация траекторий беспилотных летательных аппаратов, оптимизация пути мобильных роботов, расчёт оптимальных по форме и по длине сегментов оси автомобильной дороги и др. В теории пространственных PH-кривых разработаны алгоритмы их аналитического конструирования. В указанном исследовании предложен подход к конструированию этих кривых, основанный на теории плоских PH-кривых и реализуемый последовательным конструированием образов — проекций пространственных PH-кривых на двух координатных плоскостях. Решение пространственной задачи конструирования сводится к решению двух задач последовательного конструирования на координатных плоскостях.

Приведены числовые примеры, демонстрирующие работоспособность предлагаемого подхода. При этом алгоритмы вычислений более просты, чем в случае известного пространственного аналитического подхода. В направлении развития предложенного подхода приведены числовые примеры конструирования пространственной составной PH-кривой по гладкости $C1$.

Ключевые слова: PH-кривые, пифагоровы годографы, полиномы, ортогональная проекция, составная кривая, гладкость стыковки.

Для цитирования: Панчук К. Л., Мясоедова Т. М., Любчинов Е. В. Конструирование PH-кривой пространства по ортогональным проекциям её годографа // Омский научный вестник. 2025. № 4 (196). С. 5—11. DOI: 10.25206/1813-8225-2025-196-5-11. EDN: WRXPUZ.



© Панчук К. Л., Мясоедова Т. М., Любчинов Е. В., 2025.
Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

CONSTRUCTION OF A PH-CURVE OF SPACE BY ORTHOGONAL PROJECTIONS OF ITS HODOGRAPH

K. L. Panchuk, T. M. Myasoedova, E. V. Lyubchinov

Omsk State Technical University, Russia, Omsk, Mira Ave., 11, 644050

In modern geometric modeling, a class of plane and spatial PH-curves (pythagorean hodograph curves) is known, which were theoretically substantiated by mathematician Rida T. Farouki in 2007. PH-curves have a unique property that is important in solving many different practical problems, namely: the "parametric speed" of these curves, i.e. the derivative of the arc length with respect to the curve parameter, is a polynomial (or rational) function of the parameter. This property is due to the fact that the coordinate components of the hodograph of the PH-curve are elements of the Pythagorean $(n+1)$ -tuple of coordinate polynomials.

Due to this property, PH-curves are in demand in solving various practical problems: generating trajectories for UAVs (unmanned aerial vehicles), optimizing the path of mobile robots, calculating segments of the axis of a road that are optimal in shape and length, etc. etc. In the theory of spatial PH-curves, algorithms for their analytical construction have been developed. In this paper, an approach to constructing these curves is proposed, based on the theory of plane PH-curves and implemented by sequentially constructing images-projections of spatial PH-curves on two coordinate planes. That is, solving the spatial construction problem is reduced to solving two problems of sequential construction on coordinate planes.

Numerical examples are given that demonstrate the efficiency of the proposed approach. At the same time, the calculation algorithms are simpler than in the case of the known spatial analytical approach. In the direction of developing the proposed approach, numerical examples of constructing a spatial composite PH-curve by smoothness C1 are given.

Keywords: PH-curves, pythagorean hodographs, polynomials, orthogonal projection, composite curve, smoothness of connection.

For citation: Panchuk K. L., Myasoedova T. M., Lyubchinov E. V. Construction of a PH-curve of space by orthogonal projections of its hodograph. *Omsk Scientific Bulletin*. 2025. No. 4 (196). P. 5–11. DOI: 10.25206/1813-8225-2025-196-5-11. EDN: WRXPUZ.



© Panchuk K. L., Myasoedova T. M., Lyubchinov E. V., 2025.
The content is available under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Введение

Кривые пифагорова годографа (РН-кривые) характеризуются особым свойством, заключающимся в том, что их «параметрическая скорость» — производная длины дуги по параметру кривой — является полиномиальной (или рациональной) функцией параметра [1–3]. Эта отличительная особенность, возникающая при априорном построении компонентов годографа полиномиальных или рациональных кривых в евклидовом пространстве, как элементов пифагоровых кортежей полиномов, придаёт РН-кривым множество полезных с вычислительной точки зрения свойств. Например, вычисление их длин дуг [4], расчёт оптимальной траектории путём минимизации функционала энергии кривизны [5, 6], конструирование эквидистантных (параллельных) кривых [1, с. 389] — решение этих и множества других практических задач выполняется точным способом, т. е. без применения приближенных вычислений.

Обширные практические применения РН-кривых представлены в работе [7]. Отметим дополнительно ещё несколько практических областей, в которых применение РН-кривых востребовано благодаря их уникальным полезным свойствам: генерация траекторий беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) [8–11], проектирование формы манипуляторов и планирование пути мобильных роботов [12, 13].

Теоретические основания РН-кривых наиболее полно и глубоко изложены в работе Rida T. Farouki [1, с. 369–680], одного из основных теоретиков-разработчиков этого класса кривых. В теории РН-кривых различают две их разновидности: плоские и пространственные РН-кривые.

Для понимания сути, новизны и полезности представленных в настоящей работе авторских результатов исследований в области РН-кривых приведём основные теоретические сведения, касающиеся этих кривых. На наш взгляд, это необходимо, поскольку основные публикации по теории и практическим применениям РН-кривых — это зарубежные публикации. В отечественных публикациях содержится крайне скудная информация об этом классе кривых.

Основные положения

теории плоской РН-кривой

1. Пусть $\bar{r}: [t_0, t_n] \rightarrow \mathbb{R}^2$ — плоская регулярная полиномиальная кривая, при этом $\bar{r}(t) = \{x(t), y(t)\}$, где проекции кривой представляет собой полиномы порядка $\leq n$:

$$x(t) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k, \quad y(t) = \sum_{k=0}^n b_k \cdot t^k, \quad t \in [t_0, t_n].$$

Годограф регулярной кривой $\bar{r}(t)$ представляет собой векторное поле, построенное по множеству касательных векторов в точках кривой.

$$\bar{r}'(t) = \frac{d\bar{r}}{dt} = \{x'(t), y'(t)\}, \quad \bar{r}'(t) \neq 0.$$

2. Кривая $\bar{r}(t)$ будет РН-кривой, если существует полином $\sigma(t)$ такой, что

$$x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t). \quad (1)$$

В этой связи для РН-кривой можно записать

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sigma(t). \quad (2)$$

3. Длина дуги РН-кривой вычисляется точно, т. е. без квадратурных правил:

$$s = \int_a^b |\bar{r}'(t)| \cdot dt = \int_a^b \sigma(t) \cdot dt. \quad (3)$$

4. Теорема о пифагоровом условии для плоскости [1, с. 382]. Пифагорово условие

$$a^2(t) + b^2(t) = c^2(t) \quad (4)$$

удовлетворяется полиномами $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$, если и только если существуют полиномы $u(t)$, $v(t)$ и $w(t)$ такие, что

$$\begin{aligned} a(t) &= w(t) \cdot (u^2(t) - v^2(t)), \\ b(t) &= 2w(t) \cdot u(t) \cdot v(t), \\ c(t) &= w(t) \cdot (u^2(t) + v^2(t)). \end{aligned} \quad (5)$$

Из теоремы следует, что годограф плоской РН-кривой может быть выражен в виде:

$$\begin{aligned}x'(t) &= w(t) \cdot (u^2(t) - v^2(t)), \\y'(t) &= 2w(t) \cdot u(t) \cdot v(t), \\ \sigma(t) &= w(t) \cdot (u^2(t) + v^2(t)).\end{aligned}\quad (6)$$

Полагаем, что в (5), а следовательно, и в (6), полиномы $u(t)$ и $v(t)$ действительные взаимно простые, т. е. НОД $(u(t), v(t)) = \text{const}$. Из всех возможных случаев рассматриваются те, в которых полиномы $u(t)$, $v(t)$ и $w(t)$ — не нулевые и $u(t)$, $v(t)$ одновременно не представляют собой const .

5. Плоская РН-кривая $\bar{r}(t) = \{x(t), y(t)\}$ может быть получена [1, с. 405–422] на основе комплексного полинома $\delta(t) = u(t) + iv(t)$ отождествлением $x'(t)$ и $y'(t)$ с действительной и мнимой частью полинома

$$\bar{r}'(t) = \delta^2(t) = u^2(t) + i2u(t) \cdot v(t) - v^2(t),$$

$$\text{т. е. } x'(t) = u^2(t) - v^2(t), \quad y'(t) = 2u(t) \cdot v(t),$$

$$x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t).$$

6. *Замечание.* Если $\lambda = \deg(w(t))$ и $\mu = \max(\deg u(t), \deg v(t))$, где $\deg$ — «порядок», то РН-кривая, полученная интегрированием годографа (6) имеет порядок $n = \lambda + 2\mu + 1$ [1, с. 383]. Обычно принимают $w(t) = 1$ и получают примитивный годограф. Если $\max \deg(u(t), v(t)) = m$, то плоская РН-кривая имеет нечётный порядок $n = 2m + 1$. Таким образом, для плоской РН-кривой в области вещественных чисел имеет место соответствие

$$x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t) \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = w(t) \cdot [u^2(t) - v^2(t)] \\ y'(t) = 2w(t) \cdot u(t) \cdot v(t), \\ \sigma(t) = w(t) \cdot [u^2(t) + v^2(t)] \end{cases} \quad (7)$$

Основные положения теории пространственной РН-кривой

1. Подобно теореме о пифагоровом условии для плоской РН-кривой, существует теорема о таком же условии для пространственной РН-кривой [1, с. 462]. На основании этой теоремы проекционные компоненты годографа пространственной РН-кривой в области вещественных чисел представляются следующим образом:

$$\begin{aligned}x'(t) &= u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t), \\y'(t) &= 2[u(t) \cdot q(t) + v(t) \cdot p(t)], \\z'(t) &= 2[v(t) \cdot q(t) - u(t) \cdot p(t)], \\ \sigma(t) &= u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t),\end{aligned}\quad (8)$$

где $\sigma(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$, $u(t)$, $v(t)$, $p(t)$, $q(t)$ — действительные взаимно простые полиномы. Когда эти полиномы имеют порядок не более μ , то пространственная РН-кривая, получаемая интегрированием годографа (8), имеет нечётный порядок $n = 2\mu + 1$.

2. Длина дуги пространственной РН-кривой вычисляется точно, без квадратурных правил:

$$s = \int_a^b |\bar{r}'(t)| \cdot dt = \int_a^b \sigma(t) \cdot dt. \quad (9)$$

3. Пространственная РН-кривая может быть определена на основе кватернионного полинома [1, с. 469–483]:

$$\mathcal{A} = u(t) + v(t) \cdot i + p(t) \cdot j + q(t) \cdot k, \quad (10)$$

выраженного в кватернионном базисе $(1, i, j, k)$ через произведение

$$\bar{r}(t) = \mathcal{A}(t)i\mathcal{A}^*(t),$$

где $\mathcal{A}^*(t) = u(t) - v(t) \cdot i - p(t) \cdot j - q(t) \cdot k$ — сопряжённый к $\mathcal{A}(t)$ кватернион. Полученная в результате интегрирования пространственная РН-кривая $\bar{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ удовлетворяет условию $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = \sigma^2(t)$, где полиномы $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ и $\sigma(t)$ имеют вид (8).

Анализ указанных выше в виде ссылок публикаций по РН-кривым позволяет сделать вывод о том, что математический аппарат пространственных РН-кривых гораздо сложнее, чем в случае плоских РН-кривых. В работе [14] исследуется решение задачи построения на плоскостях проекций РН-образов заданной пространственной РН-кривой. Обстоятельное решение этой задачи, которую можно отнести к классу прямых задач конструктивной геометрии (построение образов заданных геометрических объектов евклидова пространства на плоскостях проекций), отсутствует. В этой связи возникает вопрос о возможности сведения решения задачи пространственного конструирования РН-кривой к последовательному решению двух задач конструирования на плоскостях проекций с опорой на математический аппарат плоских РН-кривых. Последовательное решение этих двух задач по существу представляет собой решение обратной задачи конструктивной геометрии (восстановление пространственного геометрического образа по двум его прообразам на плоскостях проекций). Примером решения обратной задачи конструктивной геометрии, применительно к кривым линиям, являются работы [15, 16], в которых дано математическое решение задачи конструирования пространственной кривой линии по её ортогональным проекциям.

Цель исследования — конструирование РН-кривой пространства по ортогональным проекциям её пифагорова годографа.

Ортогональные проекции пифагорова годографа пространственной регулярной кривой

Рассмотрим и докажем утверждение, позволяющее конструировать пространственную РН-кривую по её годографу, ортогональные проекции которого обладают пифагоровым свойством.

Утверждение. Пусть полиномиальная кривая $\bar{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$, $t \in [t_0, t_n]$, $\bar{r}'(t) \neq 0$ обладает годографом $q: \bar{r}'(t) = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}$ и пусть g_{xy} и $g_{\sigma z}$ — ортогональные проекции этого годографа на плоскостях O_{xy} и $O_{\sigma z}$ (Q), при этом g_{xy} — линейная, а $g_{\sigma z}$ — круговая проекция годографа (рис. 1). Тогда, если проекции g_{xy} и $g_{\sigma z}$ обладают пифагоровым свойством

$$q_{xy}: x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t), \quad q_{\sigma z}: \sigma^2(t) + z'^2(t) = \mu^2(t),$$

т. е. реализуются полиномами $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ и $\sigma(t)$ только при требовании существования других полиномов $u(t)$, $v(t)$, $a(t)$, $b(t)$ таких, что выполнены условия:

$$1) \quad x'(t) = u^2(t) - v^2(t), \quad y'(t) = 2u(t) \cdot v(t),$$

$$\sigma(t) = u^2(t) + v^2(t),$$

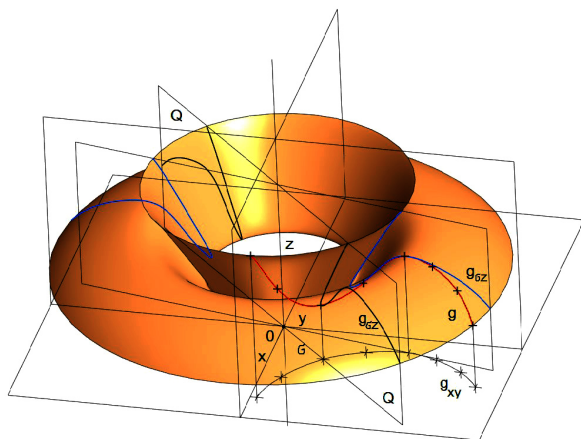


Рис. 1. Годограф g исходной кривой и его проекционные образы g_{xy} и g_{oz} в плоскостях проекций O_{xy} и O_{oz} соответственно
Fig. 1. Hodograph g of the original curve and its projection images g_{xy} and g_{oz} in the projection planes of O_{xy} and O_{oz} respectively

$$2) \sigma(t) = a^2(t) - b^2(t), \quad z'(t) = 2a(t) \cdot b(t),$$

$$\mu(t) = a^2(t) + b^2(t),$$

то кривая $\bar{r}(t)$ будет РН-кривой.

Геометрическое доказательство. Очевидно, условиями 1) и 2) последовательно формируются две пифагоровы тройки полиномов (рис. 2), приводящие к итоговому полиному $\mu(t)$. На основании определения РН-кривой [1]: полиномиальная кривая $\bar{r}(t) \in \mathbb{R}^n$ будет РН-кривой, если n координатных компонентов годографа $\bar{r}'(t)$ являются элементами пифагорова $(n+1)$ -кортежа полиномов, сумма квадратов которых совпадает с квадратом другого полинома $\mu(t)$. В соответствии с этим определением делаем вывод, что исходная кривая $\bar{r}(t)$ есть РН-кривая.

Алгебраическое доказательство. В соответствии с геометрическим доказательством имеют место быть две пифагоровы тройки из параметрических полиномов: первая — $x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t)$, реализуемая при выполнении условий 1) и вторая — $\sigma^2(t) + z'^2(t) = \mu^2(t)$, реализуемая при выполнении условий 2). Исходя из первого уравнения второй тройки, вполне можно допустить, что

$$a(t) = \frac{\sigma(t) + k(t)}{2\sqrt{k(t)}}; \quad b(t) = \frac{\sigma(t) - k(t)}{2\sqrt{k(t)}}, \quad (11)$$

где $k(t) \neq 0$, представляет собой ненулевой полином, в частном случае — действительное число, не равное нулю. Покажем, что $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = \mu^2(t)$, в этом случае есть полный квадрат. Действительно, суммируя квадраты компонент годографа $\bar{r}'(t)$ с учётом того, что

$$x'(t) = u^2(t) - v^2(t), \quad y'(t) = 2u(t) \cdot v(t),$$

$$z'(t) = 2a(t) \cdot b(t) = 2 \frac{\sigma^2(t) - k^2(t)}{4k(t)}, \quad \sigma(t) = u^2(t) + v^2(t),$$

получаем полный квадрат

$$\mu^2(t) = \left[\frac{(u^2(t) + v^2(t))^2 + k^2(t)}{2k(t)} \right]^2. \quad (12)$$

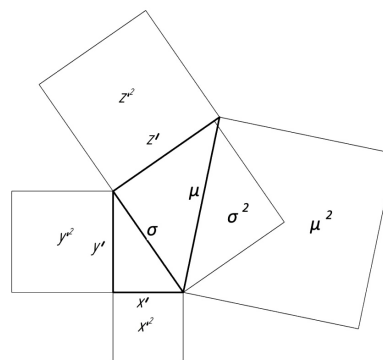


Рис. 2. Схема формирования полного квадрата полинома μ пифагоровыми тройками полиномов (x', y', σ) и (σ, z', μ)

Fig. 2. Formation scheme of the complete square of the μ polynomial by pythagorean triples of (x', y', σ) and (σ, z', μ) polynomials

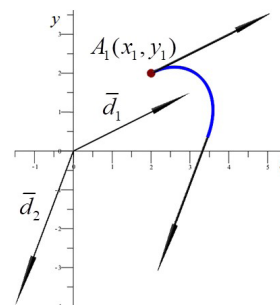


Рис. 3. Исходные данные
Fig. 3. Initial data

Результаты вычислительных экспериментов

Пример 1. Даны касательные вектора $\bar{d}_1(3;1,5)$ и $\bar{d}_2(-1,5;-4)$ в начальной $A(2,2)$ и конечной точках горизонтальной проекции искомой РН-кривой; $t_1 = 0,01$ и $t_2 = 1$ — граничные значения параметра t в этих точках (рис. 3). Требуется построить сегмент пространственной РН-кривой.

Алгоритм решения.

1. В соответствии с условиями задачи могут быть выбраны только параметрические полиномы первого порядка: $u = u_0t + u_1$, $v = v_0t + v_1$, $t \in [t_1, t_2]$. Находятся значения их коэффициентов u_0, v_0, u_1, v_1 на основе решения системы квадратичных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x'_1(t_1) &= u^2(t_1) - v^2(t_1) = (u_0t_1 + u_1)^2 - (v_0t_1 + v_1)^2, \\ y'_1(t_1) &= 2u(t_1) \cdot v(t_1) = 2(u_0t_1 + u_1)(v_0t_1 + v_1), \\ x'_2(t_2) &= u^2(t_2) - v^2(t_2) = (u_0t_2 + u_1)^2 - (v_0t_2 + v_1)^2, \\ y'_2(t_2) &= 2u(t_2) \cdot v(t_2) = 2(u_0t_2 + u_1)(v_0t_2 + v_1). \end{aligned} \right\}$$

Вводятся в уравнения системы заданные начальные и конечные значения параметра t и заданные значения проекций векторов $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$, что приводит к следующей системе квадратичных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (0,01u_0 + u_1)^2 - (0,01v_0 + v_1)^2 &= 3, \\ 2(0,01u_0 + u_1)(0,01v_0 + v_1) &= 1,5, \\ (u_0 + u_1)^2 - (v_0 + v_1)^2 &= -1,5, \\ 2(u_0 + u_1)(v_0 + v_1) &= -4. \end{aligned} \right\}$$

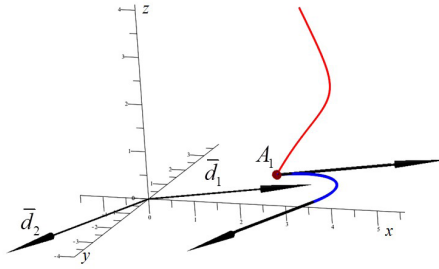


Рис. 4. Визуализация сегмента полученной РН-кривой
 Fig. 4. Visualization of the segment of the obtained PH-curve

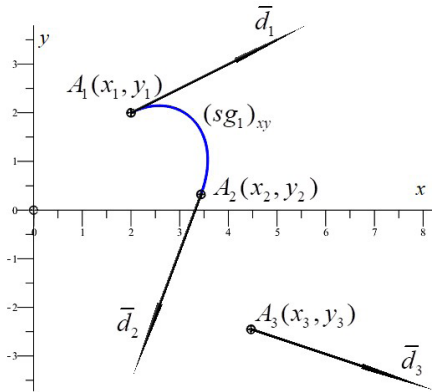


Рис. 5. Исходные данные для построения сегмент-проекции $(sg_2)_{xy}$
 Fig. 5. Initial data for constructing the $(sg_2)_{xy}$ projection segment

Решение системы уравнений позволяет получить множество корней (четвёрок u_0, u_1, v_0, v_1) в количестве 16, из которых только четыре вещественных, приводящих к двум решениям. Эти решения позволяют построить два сегмента пространственных РН-кривых. Ниже приводятся вычисления и визуализация одного из них:

$$u_0 = 0,611, u_1 = 1,788, v_0 = -2,141, v_1 = 0,442.$$

2. Вычисляются полиномы-проекции годографа искомой кривой:

$$\begin{aligned} x'(t) &= u^2(t) - v^2(t) = (u_0 t + u_1)^2 - (v_0 t + v_1)^2 = \\ &= (0,611t + 1,788)^2 + (-2,141t + 0,442)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2u(t) \cdot v(t) = 2(u_0 t + u_1)(v_0 t + v_1) = \\ &= 2(0,611t + 1,788) \cdot (-2,141t + 0,442). \end{aligned}$$

3. Вычисляется полином $\sigma(t)$:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = u^2(t) + v^2(t) = \\ &= (0,611t + 1,788)^2 + (-2,141t + 0,442)^2. \end{aligned}$$

4. Определяются полиномы $a(t)$ и $b(t)$ заданием параметра k , например, $k = 1$:

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{\sigma(t) + 1}{2} = \\ &= \frac{1}{2}((0,611t + 1,788)^2 + (-2,141t + 0,442)^2 + 1), \end{aligned}$$

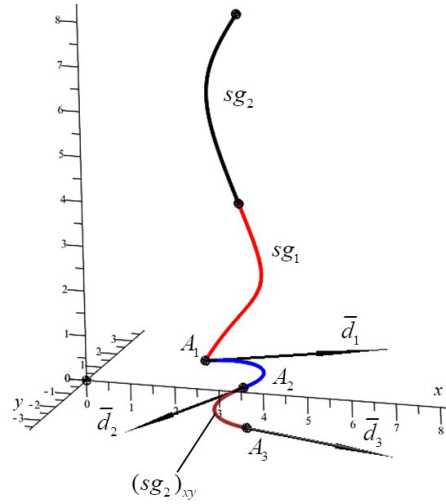


Рис. 6. Визуализация составной пространственной РН-кривой
 Fig. 6. Visualization of the composite spatial PH-curve

$$\begin{aligned} b(t) &= \frac{\sigma(t) - 1}{2} = \\ &= \frac{1}{2}((0,611t + 1,788)^2 + (-2,141t + 0,442)^2 - 1). \end{aligned}$$

5. Вычисляется полином — третья проекция $z'(t)$ годографа искомой кривой:

$$\begin{aligned} z'(t) &= 2a(t) \cdot b(t) = \frac{\sigma^2(t) - 1}{2} = 0,4(4,957t^2 - \\ &- 4,079t + 4,394) \cdot (61,969t^2 - 50,999t + 29,93). \end{aligned}$$

6. Вычисляется параметрическая скорость искомой кривой:

$$\mu(t) = |\vec{r}'(t)| = \frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)},$$

$$\mu(t) = 12,2886[(t^2 - 0,547t + 0,609) \cdot (t^2 - 1,099t + 0,836)]$$

7. Определяются параметрические уравнения сегмента искомой РН-кривой:

$$x(t) = \int_0^t x'(t) \cdot dt + x_1 = -1,403t^3 - 0,1465t^2 + 3,003t + 2,$$

$$y(t) = \int_0^t y'(t) \cdot dt + y_1 = 0,8724t^3 - 4,099t^2 + 1,581t + 2,$$

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_0^t z'(t) \cdot dt + z_1 = 2,457t^5 - \\ &- 5,056t^4 + 8,383t^3 - 6,924t^2 + 5,26t, z_1 = 0. \end{aligned}$$

8. Выполняется визуализация сегмента искомой РН-кривой (рис. 4).

Пример 2. Известны сегмент-проекция $(sg_1)_{xy}$ и пространственный сегмент sg_1 конструируемой составной РН-кривой (данные из примера 1). Известен также касательный вектор $\vec{d}_3(2,1)$ в конечной точке A_3 второго сегмента sg_2 , стыкующегося с сегментом sg_1 в их общей точке A_2 по гладкости C^1 (по общему касательному вектору $\vec{d}_2$) (рис. 5). Требуется построить сегмент sg_2 составной РН-кривой и записать его параметрические уравнения: $X(\tau)$, $Y(\tau)$, $Z(\tau)$, $\tau \in [\tau_1 = 0, \tau_2 = 1]$.

Алгоритм решения.

1. Вычисляются координаты конечной точки A_2 сегмента-проекции $(sg_1)_{xy}$ составной РН-кривой под-

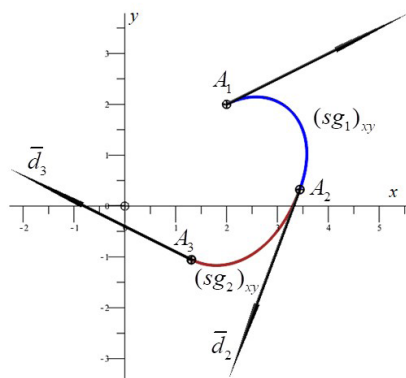


Рис. 7. Визуализация сегмент-проекций $(sg_1)_{xy}$ и $(sg_2)_{xy}$ при $\bar{d}_3(-2,1)$
Fig. 7. Visualization of $(sg_1)_{xy}$ and $(sg_2)_{xy}$ segment projections at $\bar{d}_3(-2,1)$

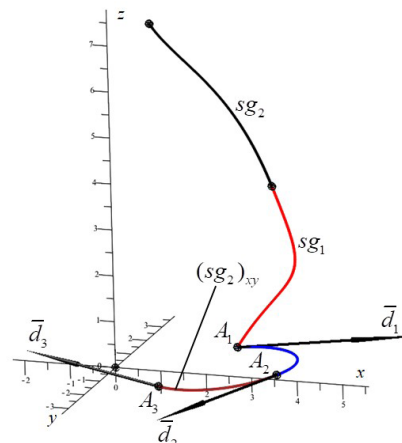


Рис. 8. Визуализация составной РН-кривой при $\bar{d}_3(-2,1)$
Fig. 8. Visualization of the composite PH-curve at $\bar{d}_3(-2,1)$

становкой значения параметра $t=1$ в уравнения сегмент-проекций $(sg_1)_{xy}$: $x(t)$, $y(t)$ (в п. 7 примера 1). $A_2(3,437; 0,322)$.

2. По исходным данным и по координатам точки A_2 строится проекция $(sg_2)_{xy}$ (рис. 6), затем сам сегмент sg_2 в пространстве. Уравнения сегмента sg_2 :

$$X(\tau) = \int_0^\tau X'(\tau) \cdot d\tau + X_1 = \\ = -0,555\tau^3 + 3,082\tau^2 - 1,5\tau + 3,437,$$

$$Y(\tau) = \int_0^\tau Y'(\tau) \cdot d\tau + Y_1 = \\ = +0,544\tau^3 + 0,682\tau^2 - 4\tau + 0,322,$$

$$Z(\tau) = \int_0^\tau Z'(\tau) \cdot d\tau + Z_1 = 0,544\tau^5 - \\ - 2,008\tau^4 + 5,298\tau^3 - 7,354\tau^2 + 8,625\tau + 4,11,$$

где $X_1 = x_{A_2}$, $Y_1 = y_{A_2}$, $Z_1 = z(t=1)$.

На рис. 7 и 8 приведён результат конструирования пространственной РН-кривой для изменённой проекции вектора $\bar{d}_3(-2,1)$.

Заключение

Предложен подход к конструированию пространственной РН-кривой на основе последовательного конструирования её плоских образов, отличающийся от известного аналитического конструирования в пространстве. Этапу появления образов предшествует нахождение соответствующих им годографов в тех же плоскостях, которые геометрически представляют собой линейную и нелинейную (круговую) ортогональные проекции пространственного годографа искомой РН-кривой. Изначально принимается, что каждая из этих проекций удовлетворяет пифагорову условию, необходимому для конструирования пространственной РН-кривой.

В качестве исходных данных для конструирования принимаются проекции векторов касательных в начальной и конечной точках конструируемой РН-кривой на горизонтальной плоскости. В числовых примерах приведены алгоритмы конструирования, демонстрирующие особенности процесса последовательного формирования кривой с использованием плоскостей проекций.

Как следует из алгоритмов, управление формой конструируемой РН-кривой возможно за счёт изменения касательных векторов в ее начальной и конечной точках. При этом начальная точка опре-

деляет положение РН-кривой в пространственной системе координат. Показана возможность конструирования кусочной пространственной РН-кривой по гладкости C^1 стыковки её сегментов.

Список источников / References

1. Farouki R. T. Pythagorean-hodograph curves: Algebra and geometry inseparable. Germany: Springer, 2008. 729 p. DOI: 10.1007/978-3-540-73398-0. ISBN 978-3-540-73397-3.
2. Farouki R. T., Sakkalis T. Pythagorean-hodograph space curves. *Advances in Computational Mathematics*. 1994. No. 2. P. 41–66. DOI: 10.1007/BF02519035.
3. Pottmann H. Curve design with rational Pythagorean-hodograph curves. *Advances in Computational Mathematics*. 1995. No. 3. P. 147–170. DOI: 10.1007/BF03028365.
4. Farouki R. T. Arc lengths of rational Pythagorean-hodograph curves. *Computer Aided Geometric Design*. 2015. No. 34. P. 1–4. DOI: 10.1016/j.cagd.2015.03.007.
5. Farouki R. T. The elastic bending energy of Pythagorean-hodograph curves. *Computer Aided Geometric Design*. 1996. No. 13. P. 227–241. DOI: 10.1016/0167-8396(95)00024-0.
6. Винокурский Д. Л., Ганьшин К. Ю., Мезенцева О. С. [и др.]. Планирование траектории группы беспилотных летательных аппаратов с использованием годографа Пифагора и составных кривых Бернштейна-Безье на плоскости // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2020. Т. 31, № 2. С. 70–78. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-31-2-70-78. EDN: DWGUPX.
7. Vinokurskiy D. L., Gan'shin K. Yu., Mezentseva O. S. [et al.]. Planirovaniye trayektorii gruppy bespilotnykh letatel'nykh apparatov s ispol'zovaniyem godografa Pifagora i sostavnykh krivyykh Bernshteyna-Bez'ye na ploskosti [The planning of the trajectory of UAV group with the performance of pythagorean hodograph and Bernstein-Bezier composite curves in the plane]. *Vestnik KRAUNTs. Fiziko-matematicheskiye nauki. Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*. Vol. 31, no. 2. P. 70–78. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-31-2-70-78. EDN: DWGUPX. (In Russ.).
8. Farouki R. T. Pythagorean-hodograph curves in practical use. *Geometry Processing for Design and Manufacturing. Society for Industrial and Applied Mathematics*. 1992. P. 3–33.
9. Shah M. A., Aouf N. 3D cooperative Pythagorean hodograph path planning and obstacle avoidance for multiple UAVs. *IEEE 9th International Conference on Cybernetic Intelligent Systems, CIS*. 2010. P. 1–6. DOI: 10.1109/UKRICIS.2010.5898124.
10. Vinokursky D. L., Mezentseva O. S., Samoylov Ph. V. [et al.]. Model predictive control for path planning of UAV group.

IOP Conference Series: Materials Science and Engineering: III International Scientific Conference. Krasnoyarsk: IOP Publishing Ltd. 2021. DOI: 10.1088/1757-899X/1155/1/012092.

10. Ганьшин К. Ю., Винокурский Д. Л., Мезенцева О. С. [и др.]. Разработка метода оптимизации траектории облета среды с препятствиями на основе кривых Безье с годографом Пифагора // *Инженерный вестник Дона*. 2023. № 7(103). С. 156–165. EDN: KRTRRN.

Gan'shin K. Yu., Vinokurskiy D. L., Mezentseva O. S. [et al.]. Razrabotka metoda optimizatsii trayektorii obleta sredy s prepyatstviyami na osnove krivyykh Bez'ye s godografom Pifagora [Development of a method for optimizing the trajectory of a obstacle-free environment based on Bezier curves with a Pythagorean hodograph]. *Inzhenernyy vestnik Dona. Engineering Journal of Don*. 2023. No. 7(103). P. 156–165. EDN: KRTRRN. (In Russ.).

11. Винокурский Д. Л., Ганьшин К. Ю., Мезенцева О. С. [и др.]. Генерация траекторий оптимальных кривых беспилотного летательного аппарата для обхода статического препятствия // *Инженерный вестник Дона*. 2021. № 9(81). С. 169–181. EDN: LPFIMQ.

Vinokurskiy D. L., Gan'shin K. Yu., Mezentseva O. S. [et al.]. Generatsiya trayektoriy optimal'nykh krivyykh bespilotnogo letatel'nogo apparata dlya obkhoda staticheskogo prepyatstviya [Generating trajectories of optimal curves of an unmanned aerial vehicle to bypass a static obstacle]. *Inzhenernyy vestnik Dona. Engineering Journal of Don*. 2021. No. 9(81). P. 169–181. EDN: LPFIMQ. (In Russ.).

12. Bezawada H., Woods C., Vikas V. Shape estimation of soft manipulators using piecewise continuous Pythagorean-hodograph curves. *American Control Conference (ACC)*. 2022. P. 2905–2910. DOI: 10.23919/ACC53348.2022.9867270.

13. Bruyninckx H., Reynaerts D. Path planning for mobile and hyper-redundant robots using Pythagorean-hodograph curves. *Advanced Robotics: 8th International Conference*. 1997. P. 595–600. DOI: 10.1109/ICAR.1997.620243.

14. Farouki R. T., Knez M., Vitrih V. [et al.]. Planar projections of spatial Pythagorean-hodograph curves. *Computer Aided Geometric Design*. 2021. Vol. 91. P. 102049. DOI: 10.1016/j.cagd.2021.102049.

15. Panchuk K. L., Myasoedova T. M., Rogoza Y. A. Spatial spline construction through the Monge model. *CEUR Workshop Proceedings*. 2020. Vol. 2744. P. 60-1–60-11. DOI: 10.51130/graphicon-2020-2-3-60.

16. Корчагин Д. С., Панчук К. Л. Программа «Вычисление кривизны и кручения пространственной кривой линии по ее ортогональным проекциям» // *Хроники объединённого фонда электронных ресурсов «Наука и образование»*. 2014. Т. 1, № 2 (57). С. 60. EDN: SXMEQB.

Korchagin D. S., Panchuk K. L. Programma "Vychisleniye krivizny i krucheniya prostranstvennoy krivoy linii po eye ortogonal'nykh proyeksiyam" [The program "Calculating the curvature and torsion of the dimensional curve based on its orthogonal projections"]. *Khroniki Ob'yedinennogo Fonda Elektronnykh Resursov "Nauka i Obrazovaniye"*. 2014. Vol. 1, no. 2 (57). P. 60. EDN: SXMEQB. (In Russ.).

ПАНЧУК Константин Леонидович, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры «Инженерная геометрия и САПР» Омского государственного технического университета (ОмГТУ), г. Омск.

SPIN-код: 5623-0008

AuthorID (РИНЦ): 501163

ORCID: 0000-0001-9302-8560

AuthorID (SCOPUS): 55857766100

ResearcherID: S-2788-2017

Адрес для переписки: Panchuk_KL@mail.ru

МЯСОЕДОВА Татьяна Михайловна, кандидат технических наук, доцент кафедры «Инженерная геометрия и САПР» ОмГТУ, г. Омск.

SPIN-код: 6056-6455

AuthorID (РИНЦ): 686836

ORCID: 0000-0002-9641-9417

AuthorID (SCOPUS): 57201776004

ResearcherID: E-7505-2014

Адрес для переписки: mtm44mtm44@mail.ru

ЛЮБЧИНОВ Евгений Владимирович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Инженерная геометрия и САПР» ОмГТУ, г. Омск.

SPIN-код: 8144-6370

AuthorID (РИНЦ): 917932

ORCID: 0000-0003-2499-4866

AuthorID (SCOPUS): 57199399265

ResearcherID: D-1882-2019

Адрес для переписки: Lubchinov.E.V@yandex.ru

Прозрачность финансовой деятельности: авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.

Статья поступила в редакцию 21.05.2025; одобрена после рецензирования 03.07.2025; принята к публикации 25.08.2025.

PANCHUK Konstantin Leonidovich, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Engineering Geometry and CAD Department, Omsk State Technical University (OmSTU), Omsk.

SPIN-code: 5623-0008

AuthorID (RSCI): 501163

ORCID: 0000-0001-9302-8560

AuthorID (SCOPUS): 55857766100

ResearcherID: S-2788-2017

Correspondence address: Panchuk_KL@mail.ru

MYASOEDOVA Tatyana Mikhaylovna, Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer of the Engineering Geometry and CAD Department, OmSTU, Omsk.

SPIN-code: 6056-6455

AuthorID (RSCI): 686836

ORCID: 0000-0002-9641-9417

AuthorID (SCOPUS): 57201776004

ResearcherID: E-7505-2014

Correspondence address: mtm44mtm44@mail.ru

LYUBCHINOV Evgeniy Vladimirovich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Engineering Geometry and CAD Department, OmSTU, Omsk.

SPIN-code: 8144-6370

AuthorID (RSCI): 917932

ORCID: 0000-0003-2499-4866

AuthorID (SCOPUS): 57199399265

ResearcherID: D-1882-2019

Correspondence address: Lubchinov.E.V@yandex.ru

Financial transparency: the authors have no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.

The article was submitted 21.05.2025; approved after reviewing 03.07.2025; accepted for publication 25.08.2025.