

# МАШИНОСТРОЕНИЕ

УДК 534-18+621.0  
DOI: 10.25206/1813-8225-2024-191-5-13  
EDN: GRFNGU

Б. А. КАЛАШНИКОВ<sup>1</sup>  
В. В. БОХАН<sup>1,2</sup>  
К. В. ПЕНЬКОВ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Омский государственный  
технический университет,  
г. Омск

<sup>2</sup> АО «Федеральный научно-  
производственный центр «Прогресс»,  
г. Омск

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ ДЕМПФИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Коэффициенты нелинейной функции демпфирования механической системы с одной поступательной степенью свободы определяются по экспериментально полученной осциллограмме свободных колебаний. Функция моделируется тремя видами трения: сухим, линейно-вязким и нелинейно-вязким. Определяются численные значения коэффициентов демпфирования. Получена характеристика диссипативной силы в функции перемещения, по которой находится количество рассеянной за период энергии. Методом энергетического баланса приближённо находится эквивалентный коэффициент относительного затухания, с использованием которого выполняется численное интегрирование уравнения движения. Наложением расчётной осциллограммы на экспериментальную показывается удовлетворительное совпадение огибающей и фазы колебательного процесса. Уточнение параметров функции демпфирования может быть найдено аппроксимацией экспериментальных амплитуд. Найденное значение коэффициента относительного затухания может быть использовано для решения нелинейных задач динамики слабодемпированных систем.

**Ключевые слова:** нелинейная функция демпфирования, сухое трение, линейно-вязкое трение, нелинейно-вязкое трение, диссипация энергии, огибающая, коэффициент относительного затухания, метод энергетического баланса.

**1. Введение.** Механизмы демпфирования играют важную роль во многих приложениях, включая мониторинг состояния конструкций [1], динамику робототехнических [2, 3], энергетических [4, 5], механических [6], биологических [7–10], микро- и наноэлектромеханических [11, 12] систем. Правильный выбор модели демпфирования и оценка параметров её нелинейной функции скорости являются важной проблемой в области динамики ме-

ханических систем (МС). Основные трудности возникают из-за большого разнообразия механизмов рассеивания энергии, их сложности и взаимодействия, а также приближённого характера моделей диссипации энергии [13]. Такой подход с ограниченным интересом к фактическим источникам и механизмам демпфирования обосновывается тем фактом, что количество энергии, рассеиваемой в обычных МС, весьма незначительно. Поэтому

диссипативные силы, зависящие от этой энергии, являются малыми по сравнению с инерционными и восстанавливающими силами. Физически более обоснованные методами теории вязко- и термоупругости модели внутреннего трения являются и более сложными, и поэтому используются редко.

При расчёте частотных характеристик МС основной проблемой является определение характеристик сил неупругого сопротивления. Непосредственное измерение их сопряжено с большими трудностями, однако достаточно просто можно получать экспериментальные осциллограммы свободных затухающих колебаний МС. Уменьшение амплитуд на них определяется конкретной, в общем случае, нелинейной функцией демпфирования. Поэтому, получив убывающую последовательность их, можно определить параметры этой функции. Известно, что демпфирование, возникающее при движении МС, обусловлено тремя видами трения: внутренним, конструкционным и внешним, вызванным движением в вязких средах, жидкостях или газах.

Для важного частного случая слабодемпфированных МС с одной степенью свободы, линейных по восстанавливающей силе, нелинейную функцию демпфирования, зависящую только от обобщённой скорости, с помощью малого параметра  $\varepsilon$  представляют в виде степенной функции  $f_d(\dot{x}) = \varepsilon \beta |\dot{x}|^{n-1} \dot{x}$  либо в виде степенного ряда [14, с. 354; 15–16]

$$f_d(\dot{x}) = \varepsilon \sum_{n=0}^m \beta_n |\dot{x}|^{n-1} \dot{x}, \quad (1)$$

причём в практических случаях  $m \leq 2$ . Это означает, что нелинейная функция демпфирования, формируемая всеми имеющимися в МС источниками сил неупругого сопротивления, моделируется суммой сухого ( $n = 0$ ), линейно-вязкого ( $n = 1$ ) и квадратичного ( $n = 2$ ) трения.

В работе [13] при экспериментальном и численном рассмотрении колебаний МС в виде плоского физического маятника в воздухе рассматриваются три составляющие силы неупругого сопротивления:

- линейно-вязкая (пропорциональная угловой скорости);
- нелинейно-вязкая (квадратично зависящая от этой скорости);
- пропорциональная ускорению.

Отмечается, что последняя компонента вводится для удовлетворительного приближения к реальному движению маятника в воздухе. Со ссылкой на [17] утверждается, что введение составляющей, пропорциональной ускорению в выражении для силы сопротивления, не следует считать необычным. В случае колебательного движения элементарных тел (сферы, бесконечного цилиндра и т. д.) в вязкой жидкости аналитические решения при малых числах Рейнольдса показывают, что сопротивление имеет две части: пропорциональную скорости (диссипативную) и пропорциональную ускорению (инерционную). В эксперименте начальный угол отклонения маятника был «большим»:  $\frac{\pi}{3} \leq \phi_0 \leq \pi$ . Коэффициенты демпфирования для четырёх длин маятника находились тремя методами: конечно-разностным, бисекциями и градиентным. Вычислялись средние и среднеквадратичные ошибки результатов численного интегрирования уравнений движения по сравнению с экспериментальными осциллограммами. Уравнения интегрировались последовательно с линейным трением, с суммой линейного и ква-

дратичного и с суммой линейного, квадратичного и трения, пропорционального ускорению. Отмечено, что во втором случае коэффициент демпфирования получился отрицательным, что физически не реализуемо, и поэтому авторы ограничились только квадратичным трением, утверждая, что в этом случае предсказание действительного движения лучше, чем в случае только линейного трения.

Показано, что введение в демпфирующую коэффициент члена, пропорционального ускорению, не является пренебрежимо малым и что вклад этого члена зависит от начального угла отклонения маятника.

На заключительной стадии выполняется «общая оптимизация», под которой понимается, что расстояние между численными и экспериментальными осциллограммами минимизируется одновременно для всех значений начальных отклонений и длин маятника. Приведены значения трёх коэффициентов демпфирования для четырёх различных длин маятника.

Констатируется, что описание силы неупругого сопротивления, зависящей как от скорости, так и от ускорения, оказывается наиболее подходящим. Утверждается, что трение в опоре маятника несущественно по сравнению с сопротивлением воздуха. Способность шнура к скручиванию и неплоские колебания могут иметь большее значение. Все три коэффициента предполагались постоянными, не зависящими от числа Рейнольдса.

В статье [18] экспериментально и теоретически рассматриваются колебания линейного по восстанавливающей силе физического маятника — шара. Указывается, что использование закона линейно-вязкого трения Стокса  $f = 6\pi\eta r\dot{x}$  в этом случае приводит к большим ошибкам и что необходимо учитывать квадратичное и внутреннее трение.

В дополнение к формуле Стокса при гармоническом движении сила вязкого трения включает в себя «глубину проникновения  $\delta$ », которая зависит от угловой частоты колебаний  $\omega$  и плотности жидкости  $\rho$ . Путем сравнения теории и эксперимента предложено уточнённое выражение для формулы Стокса при гармоническом движении, в которую входит «глубина проникновения». Показано, что в обычных случаях глубина  $\delta$  меньше радиуса шара примерно на порядок. Другими словами, вязкое гармоническое трение может быть намного больше, чем вязкое трение стационарного потока. При этом показано, что диссипативная сила пропорциональна площади шара, а не её радиусу. Отмечено, что если в МС включены скользящие или катящиеся элементы, то должно использоваться нелинейное трение Кулона. Констатируется также, что квадратичное трение наиболее важно в начале затухающих колебаний, линейное в средней части и сухое в их конце. Приведена осциллограмма свободных затухающих колебаний физического маятника в воде, на которую нанесена полученная численно огибающая.

В уравнении движения с линейной восстанавливающей силой учитываются четыре вида трения: сухое, гистерезисное, амплитудно-зависимое (жидкостное) и линейно-вязкое, причём первые три зависят от знака скорости. Гистерезисное и амплитудно-зависимое называются «модифицированным кулюновским» затуханием.

В статье [19] предлагается метод измерения сил и коэффициентов трения на основе регистрации затухающих амплитуд, не требующий измерения

самых амплитуд. Эксперименты проводятся на физическом маятнике с опорой качения. Утверждается, что при числе полных колебаний, превышающих 103, метод, предложенный в [14, 15], неудобен, а уменьшение числа измеряемых амплитуд, приводит к увеличению погрешности в определении коэффициентов демпфирования  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ . Сила трения (диссипативная функция) аппроксимируется выражением  $f_d(\dot{x}) = (\beta_0 + \beta_1|\dot{x}| + \beta_2\dot{x}^2) \operatorname{sign}(\dot{x})$ . Уравнение движения решается асимптотическим методом, при помощи которого находятся выражения для второй гармоники тройной частоты и поправка для частоты свободных колебаний, влиянием которых на решение в дальнейшем пренебрегают. При этом утверждается, что полученное выражение для огибающей первой гармоники остаётся прежним. Из аппроксимации этим выражением экспериментальной огибающей находятся коэффициенты демпфирования  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ .

Арсенал исследователей по надежной оценке параметров демпфирования постоянно пополняется по мере открытия новых и более сложных методов анализа данных. К их числу относится анализ топологических данных (пиков-впадин осциллограмм), двумерное изображение которых называется диаграммой инерционности и которое используется для оценки параметров степенного затухания из функции свободного отклика. В статье [20] приведены результаты оценки коэффициентов сухого линейно-вязкого и квадратичного трения с минимизацией влияния аддитивного шума на экспериментальные осциллограммы свободных затухающих колебаний физического маятника. Утверждается, что по сравнению с большинством алгоритмов идентификации параметров затухания этот метод является вычислительно быстрым и требует только временного ряда в качестве входных данных. Показано, что он устойчив к широкому диапазону параметров затухания, к высоким уровням шума и низким частотам дискретизации. При оценке вязкого затухания метод позволяет достаточно точно определять коэффициент относительного затухания вплоть до критического  $\zeta = 1$ , в то время как большинство методов ограничено значением  $\zeta \leq 0,3$ . Метод может быть распространён на МС с конечным числом степеней свободы.

## 2. Экспериментальная часть.

**2.1. Экспериментальный стенд.** Установка представляет собой тележку массой  $m = 4,5$  кг, которая может перемещаться только в горизонтальном направлении в пределах  $\pm 0,2$  м (рис. 1).

Жёсткость боковой пружины, найденная экспериментально по формуле  $c_2 = m\omega_c^2$  составляет  $c_2 \cong 1132 \frac{H}{M}$ .

Демпфирующие элементы  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  условно представляют непотенциальные силы, возникающие при колебаниях массы  $m$  за счёт внутреннего трения в материале пружин, конструкционного трения и сопротивления воздуха (рис. 2).

Характеристика суммарной диссипативной силы (нелинейной функции демпфирования), создаваемой этими факторами, записывается в виде

$$f_d(\dot{x}) = \beta_0 \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} + \beta_1 \dot{x} + \beta_2 |\dot{x}| \dot{x}. \quad (2)$$

Измерение обобщённой координаты (ОК)  $x$  производится датчиком потенциометрического типа

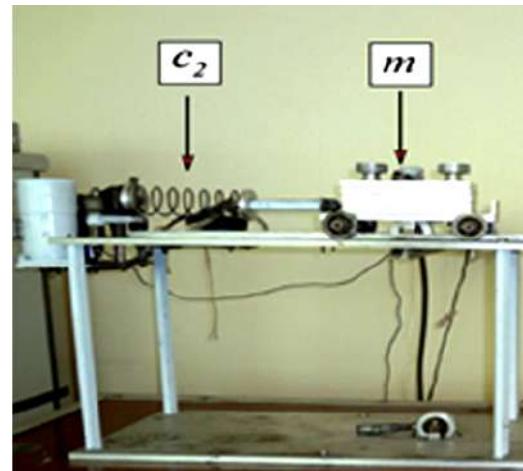


Рис. 1. Стенд для экспериментального определения нелинейной функции демпфирования

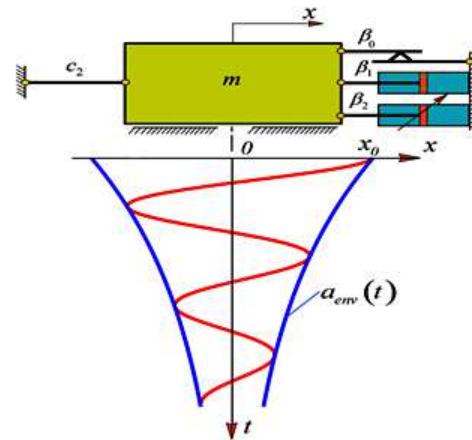


Рис. 2. Динамическая модель МС для определения нелинейной функции демпфирования по огибающей колебательного процесса  $a_{env}(t)$

с последующей записью её через мостовую схему и многофункциональную плату аналогового и цифрового ввода/вывода ЛА – 70М4 на жёсткий диск компьютера с последующей обработкой в пакете **Maple**.

Установка позволяет изучать и другие задачи линейной и нелинейной динамики. Например, получать экспериментальные данные по частотам и формам главных колебаний МС с двумя степенями свободы или амплитуды и частоты точек бифуркаций в осцилляторе Дуффинга.

**2.2. Результаты эксперимента.** В ходе эксперимента выполнялась запись дискретных отсчётов свободных колебаний МС до её полной остановки с шагом дискретизации  $\sim 0,02$  с.

По формулам

$$x_k = a_k + a_{k+1}; y_k = a_k - a_{k+1} \quad (3)$$

находилась сумма и разность соседних амплитуд  $a_k$  свободных затухающих колебаний (табл. 1).

Отсчёты ОК и времени фиксировались до тех пор, пока аддитивный шум не становился по уровню сопоставимым с полезным сигналом — затухающими колебаниями. На сбоях участках (если они возникали) отсчёты определялись приближённо. Далее дискретные значения ОК и времени (табл. 1)

Таблица 1

Амплитуды  $a_k$ , их сумма  $x_k$  и разность  $y_k$   
по огибающей осциллограммы  $a_{env}(t)$

№	$a_k$	$x_k$	$y_k$
1	0,0744	0,13233	0,00855
2	0,06189	0,11480	0,00898
3	0,05291	0,09897	0,00685
4	0,04606	0,08660	0,00552
5	0,04054	0,07890	0,00218
6	0,03836	0,07101	0,00571
7	0,03265	0,06160	0,00370
8	0,02895	0,05405	0,00385
9	0,02510	0,04849	0,00171
10	0,02339	0,04379	0,00299
11	0,02040	0,03866	0,00214
12	0,01826	0,03438	0,00214
13	0,01612	0,02995	0,00299
14	0,01383	0,02644	0,00122
15	0,01261	0,02274	0,00248
16	0,01013	0,01956	0,00070
17	0,00943	0,01828	0,00058
18	0,00885	0,01685	0,00085
19	0,00800	0,01471	0,00129
20	0,00671	0,01214	0,00128
21	0,00543	0,01043	0,00043
22	0,00500	0,00957	0,00043
23	0,00457	0,00758	0,00156
24	0,00301	0,00459	0,00143
25	0,00158	0,00273	0,00043
26	0,00115	0	0

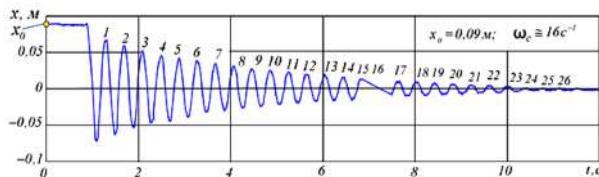


Рис. 3. Экспериментальная осциллограмма свободных затухающих колебаний МС  
на рис. 1 и её модели на рис. 2

перемасштабировались в пакете **Maple**, попарно конвертировались в список списков, который в виде осциллограммы выводился на печать (рис. 3).

Визуально нелинейность характеристики демпфирующей силы обнаруживается уже в том, что обе огибающих типичной осциллограммы не имеют вида экспоненты. На рис. 3 обозначено  $N = 26$  амплитуда, по которым определялись коэффициенты нелинейной функции демпфирования  $f_d(\dot{x})$ . МС имеет симметричную линейную характеристику восстанавливающей силы, поэтому период колебаний есть постоянная величина. Число  $\omega_c \approx 16 \text{ с}^{-1}$  — это значение частоты свободных колебаний МС с демпфированием, найденное по их периоду, а число  $x_0 \equiv a_{env}(0) = 0,09 \text{ м}$  — это начальное значение огибающей  $a_{env}(t)$ , равное начальному

отклонению, т.к. во всех экспериментах начальная скорость устанавливалась нулевой  $\dot{x}_0 = 0$ .

**3. Обработка результатов эксперимента.** Уравнение движения МС на рис. 2 с функцией демпфирования (2) при учёте в ней только первых трёх слагаемых записывается в виде

$$m\ddot{x} + \beta_0 \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} + \beta_1 \dot{x} + \beta_2 |\dot{x}| \dot{x} + c_2 x = 0. \quad (4)$$

Его можно использовать и для нахождения нелинейной функции демпфирования в МС типа Дуффинга (при дополнительной установке в стенде на рис. 1 вертикальной пружины) при условии пре-небрежения в её эквивалентной жёсткости зависимости от амплитуды колебаний.

Из малости колебаний не всегда следует линейность МС по восстанавливающей силе. Например, МС типа Дуффинга с начальной деформацией вертикальной пружины, равной нулю, принципиально не может совершать линейных колебаний, т.к. в этом случае в степенной характеристике восстанавливающей силы нет линейного члена и излагающая ниже методика определения нелинейной функции демпфирования неприменима.

Коэффициенты неупругого сопротивления  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  в нелинейной функции демпфирования (2), входящей в уравнение (4), связаны с соответствующими приведёнными коэффициентами трения  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ , соотношениями [14, с. 357; 15, с. 155].

$$\beta_0 = \frac{1}{4} \omega_c^2 \gamma_0 m; \beta_1 = \frac{2}{\pi} \omega_c \gamma m; \beta_2 = \frac{2}{\pi} \gamma_2 m. \quad (5)$$

Коэффициенты  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ , имеющие размерность [м], [б/р], [м<sup>-1</sup>], определяются из системы линейных алгебраических уравнений [14, с. 357]

$$\left. \begin{aligned} (N-1)\gamma_0 + \left( \sum_{k=1}^{N-1} x_k \right) \gamma_1 + \left( \sum_{k=1}^{N-1} x_k^2 \right) \gamma_2 &= a_0 - a_{N-1}; \\ \left( \sum_{k=1}^{N-1} x_k \right) \gamma_0 + \left( \sum_{k=1}^{N-1} x_k^2 \right) \gamma_1 + \left( \sum_{k=1}^{N-1} x_k^3 \right) \gamma_2 &= (a_0 - a_{N-1})(a_0 + a_{N-1}); \\ \left( \sum_{k=1}^{N-1} x_k^2 \right) \gamma_0 + \left( \sum_{k=1}^{N-1} x_k^3 \right) \gamma_1 + \left( \sum_{k=1}^{N-1} x_k^4 \right) \gamma_2 &= \sum_{k=1}^{N-1} x_k^2 y_k \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где сумма  $x_k$  и разность  $y_k$  соседних амплитуд  $a_k$  определялись по (3) в табл. 1.

Для краткости система (6) переписывается в виде

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Коэффициент  $\gamma_0 = \frac{4\beta_0}{c_2} \equiv \Delta a_k$ , равный постоянной величине, есть уменьшение амплитуд по прямолинейной огибающей за один период затухающих колебаний при условии, что МС демпфирована только сухим трением; коэффициент  $\gamma_1 = \frac{\delta}{2}$ , где  $\delta$  — логарифмический декремент — при условии, что система демпфирована только линейно-вязким трением.

Решив систему линейных алгебраических уравнений (7), получим коэффициенты  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ , а по ним по соотношениям (5) коэффициенты демпфирования

$$\begin{aligned}\beta_0 &= 0,134 \text{ H}; \quad \beta_1 = 1,73 \frac{\text{H}}{\text{m}/\text{c}}; \\ \beta_2 &= 1,468 \frac{\text{H}}{\text{m}^2/\text{c}^2}.\end{aligned}\quad (8)$$

#### 4. Валидация коэффициентов функции демпфирования

**4.1. Приведенная характеристика нелинейной функции демпфирования.** Приведенная функция демпфирования

$$y(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 \quad (9)$$

пересчитывается в нелинейную функцию демпфирования (2) при помощи соотношений [14, с. 361]

$$\begin{aligned}x(\dot{x}) &= \frac{5}{2\omega_c} \dot{x}, \\ y(\dot{x}) &= \frac{4}{m\omega_c^2} (\beta_0 + \beta_1 \dot{x} + \beta_2 |\dot{x}| \dot{x}).\end{aligned}\quad (10)$$

Зависимость разности экспериментальных амплитуд от их суммы (9) аппроксимируется методом наименьших квадратов параболой

$$y(x) \cong 0,21x^2 + 0,039x + 0,00046. \quad (11)$$

Если демпфирование в МС равно нулю, т. е. она консервативна, то разность соседних амплитуд становится равной нулю, а их сумма —  $2x_0$ . Кривая (9) вырождается в точку с координатами  $(2x_0; 0)$ . Другими словами, огибающая  $a_{env}(t)$  содержит в себе всю информацию о нелинейной функции демпфирования (2).

После пересчёта диссипативной силы и скорости в разность и сумму амплитуд или, наоборот, с использованием (10) графики функций демпфирования (2) и (11) должны совпадать (рис. 4).

Следует отметить почти линейный тип характеристики диссипативной силы.

**4.2. Нелинейная функция демпфирования.** При расчёте этой характеристики и её составляющих с использованием коэффициентов (8) принималось, что к левому концу пружины  $c_2$  прикладывается гармоническое кинематическое возбуждение  $y(t) = a \cos \omega t$  с частотой, близкой к собственной  $\omega \cong \omega_c \cong 16 \text{ c}^{-1}$  так, чтобы амплитуда абсолютных колебаний  $a_x$  равнялась начальному смещению  $x_0 = 0,09 \text{ м}$ , принятому в эксперименте при свободных колебаниях. В этом случае характеристики сухого, линейно-вязкого и квадратичного трения описываются выражениями  $f_{d,0}(\dot{x}) = \beta_0 \operatorname{sign}(\dot{x})$ ,  $f_{d,1}(\dot{x}) = \beta_1 \dot{x}$ ,  $f_{d,2}(\dot{x}) = \beta_2 |\dot{x}| \dot{x}$  и суммарная  $f_d(\dot{x}) = f_{d,0}(\dot{x}) + f_{d,1}(\dot{x}) + f_{d,2}(\dot{x})$  (рис. 5).

Максимальная скорость при построении графиков находилась как  $\dot{x} = \omega_c x_0 \cong 1,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ . Характеристика 4 совпадает с кривой по (2) на рис. 4.

**4.3. Эквивалентный коэффициент относительного затухания.** Принимая, что в режиме вынужденного движения колебания происходят по гармоническому закону, преобразуем (1) в формулу характеристики диссипативной силы в функции перемещения для сухого ( $n = 0$ ), линейно-вязкого ( $n = 1$ ) и квадратичного ( $n = 2$ ) трения:

$$f_d(x) = \pm \beta_n (a\omega)^n \left[ 1 - \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right]^{\frac{n}{2}}. \quad (12)$$

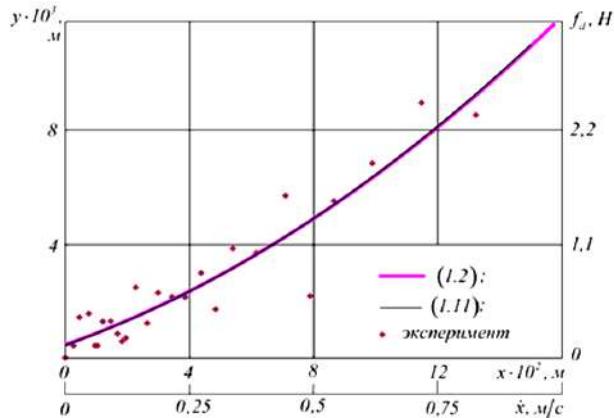


Рис. 4. Нечётно-симметричные графики приведенной аппроксимирующей (11) и нелинейной функции демпфирования (2)

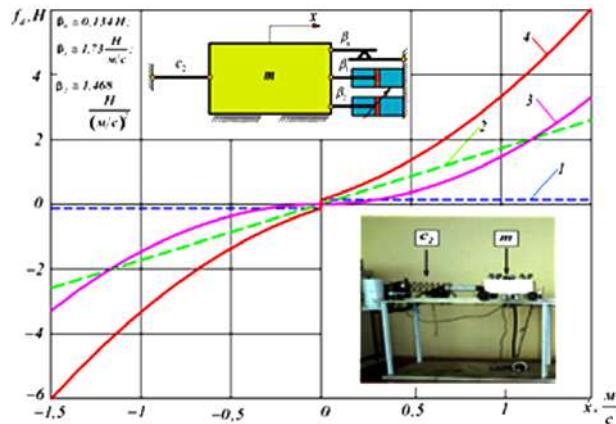


Рис. 5. Расчётная характеристика нелинейной функции демпфирования в режиме вынужденного движения и её составляющие:  
1 — сухого трения  $f_{d,0}(\dot{x})$ ; 2 — линейно-вязкого  $f_{d,1}(\dot{x})$ ;  
3 — нелинейно-вязкого (турбулентного) трения  $f_{d,2}(\dot{x})$ ;  
4 — суммарная характеристика  $f_d(\dot{x})$

Полагая, что частота колебаний основания диссипативных элементов  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  при закреплённой массе  $m$  (рис. 1) равна частоте свободных колебаний  $\omega = \omega_c = 16 \text{ c}^{-1}$ , а амплитуда его колебаний равна начальному смещению в эксперименте на свободные, т. е. что  $a = x_0 = 0,09 \text{ м}$ , построим приближённые характеристики (12) сухого ( $n = 0$ ), линейно-вязкого ( $n = 1$ ) и нелинейно-вязкого ( $n = 2$ ) трения и их суммы (рис. 6).

Характеристики на рис. 6 могут быть построены и в режиме вынужденного движения при незакреплённой массе  $m$  и возбуждении за пружину  $c_2$  с частотой, приближённо равной собственной  $\omega \cong \omega_c$  с тем, чтобы амплитуда колебаний была равна начальному смещению  $a = x_0$  в свободном движении.

Количество энергии, рассеиваемой нелинейной силой демпфирования (2) в вынужденном движении, находится по формуле [21]

$$W = \sum_{n=0}^2 \beta_n a^{n+1} J(n) \omega^2, \quad (13)$$

где интеграл  $J(n) = \int (\sin \psi)^{n+1} d\psi$ ,  $\psi = \omega t$ ; для  $n = 0$ ;  $J_0 = 1$ ;  $n = 1$ ;  $J_1 = \frac{\pi}{4}$ ;  $n = 2$ ;  $J_2 = \frac{2}{3}$ .

Количество энергии, рассеиваемой сухим, линейно-вязким и квадратичным трением, и суммарное найдётся как

$$\begin{aligned} W_0 &= 4\beta_0 x_0; \quad W_1 = \pi\beta_1 \omega_c x_0^2; \\ W_2 &= \frac{8}{3}\beta_2 x_0^3 \omega_c^2; \quad W = W_0 + W_1 + W_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставив в (14) значения коэффициентов демпфирования (8),  $x_0 = 0,09$  м,  $\omega_c \approx 16$  с<sup>-1</sup>, получим количество энергии  $W = 1,47$  Дж, по которому найдём среднюю мощность процесса диссипации

$$N = \frac{W}{T} = \frac{1,47 \text{ Дж}}{0,198 \text{ с}} = 7,4 \text{ Вт.}$$

Воспользовавшись принципом энергетического баланса, найдём величину эквивалентного коэффициента относительного затухания

$$\zeta_{eq} = \frac{W}{2\pi x_0^2 \omega_c \sqrt{c_2 m}} \approx 0,026,$$

которая может быть использована при решении других экспериментальных задач нелинейной динамики на стенде (рис. 1).

Численное интегрирование ОДУ (4) с найденными экспериментально коэффициентами сухого  $\beta_0$ , линейно-вязкого  $\beta_1$  и квадратичного  $\beta_2$  трения (8) показывает удовлетворительное совпадение экспериментальной осциллограммы с расчётной (рис. 7).

Огибающие  $a_{env}(t)$  построены при значении коэффициента затухания

$$h_{eq} = \frac{\beta_{eq}}{2m} \approx \frac{3,63 \text{ H/(м/с)}}{2 \cdot 4,5 \text{ кг}} \approx 0,4 \text{ с}^{-1},$$

$$\text{где } \beta_{eq} = 2\zeta_{eq} \sqrt{c_2 m}.$$

## 5. Обсуждение результатов

1. Количество энергии, рассеиваемой за период свободных затухающих колебаний, будет несколько меньше, чем по (13), т. к. в крайних положениях амплитуда будет меньше, чем в начале периода. В этих положениях кинетическая энергия МС равна нулю, а убыль полной энергии будет обеспечиваться уменьшением только потенциальной энергии, т. е. уменьшением амплитуды колебаний (табл. 1).

2. Принцип энергетического баланса, положенный в основу получения эквивалентного коэффициента относительного затухания, не означает полного совпадения экспериментальной и расчётной огибающих. Удовлетворительное совпадение наблюдается на начальном и конечном участках примерно на трёх периодах. Можно утверждать, что имеет место совпадение огибающих в среднем.

3. Несмотря на значительный разброс экспериментальных точек приведенная аппроксимирующая и нелинейная функция демпфирования совпадают полностью. При демпфировании МС только одним линейно-вязким трением зависимость разности амплитуд от их суммы описывается линейным выражением

$$y(x) = -\frac{c_1(e^{-2\pi c_2 i} - 1) + c_2(e^{-2\pi c_2 i} - 1)}{c_1(e^{-2\pi c_2 i} + 1) + c_2(e^{-2\pi c_2 i} + 1)} x,$$

где  $c_1, c_2$  некоторые постоянные;  $i = \sqrt{-1}$ .

Это обстоятельство даёт возможность упрощения динамических моделей МС.

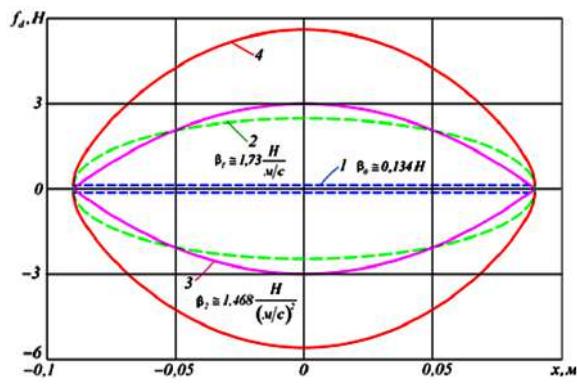


Рис. 6. Характеристики составляющих демпфирования в функции ОК  $x$  (петли гистерезиса):  
1 — сухого трения  $f_{d0}(x)$ ; 2 — линейно-вязкого  $f_{d1}(x)$ ;  
3 — нелинейно-вязкого (турбулентного) трения  $f_{d2}(x)$ ;  
4 — суммарная характеристика  $f_d(x)$

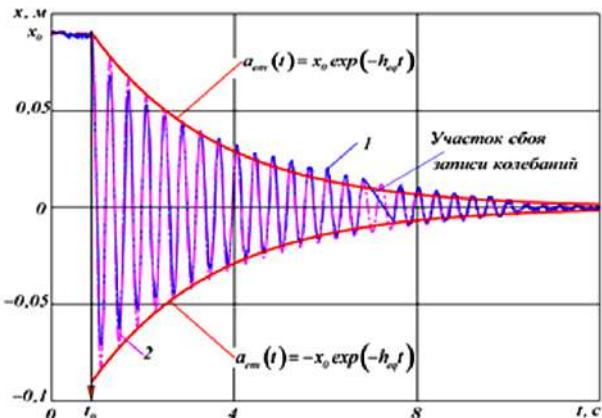


Рис. 7. Наложение экспериментальной 1 и расчётной 2 осциллограмм;  $t_0 = 0,887$  с — время задержки снятия удерживающей массы  $m$  связи;  
 $x_0 = 0,09$  м — начальное отклонение массы  $m$

## 6. Выводы

1. Удовлетворительное совпадение огибающей и фазы экспериментальной осциллограммы с расчёты, полученной численным интегрированием уравнения движения, позволяют рекомендовать полученное значение эквивалентного коэффициента относительного затухания для расчёта динамики механически подобных МС.

2. Для уточнения коэффициентов нелинейной функции демпфирования целесообразно по экспериментальным амплитудам получить аппроксимирующее выражение для огибающей и воспользоваться описанной выше процедурой.

3. Метод энергетического баланса применим для слабодемпфированных МС. Для сильно- и передемпфированных осцилляторов целесообразно воспользоваться топологическим методом.

4. Суммарные графики функций демпфирования незначительно отличаются от прямых, поэтому нелинейную функцию демпфирования с удовлетворительной точностью можно заменить эквивалентной прямолинейной, что упростит практические расчёты.

## Библиографический список

- Cao M. S., Sha G. G., Gao Y. F. [et al.] Structural damage identification using damping: a compendium of uses and features //

- Smart Materials and Structures. 2017. Vol. 26 (4). 043001. DOI: 10.1088/1361-665X/aa550a.
2. Erickson D., Weber M., Sharf I. Contact stiffness and damping estimation for robotic systems // The International Journal of Robotics Research. 2003. Vol. 22 (1). P. 41–58. DOI: 10.1177/0278364903022001004.
  3. Mohammad A. E. K., Uchiyama N., Sano S. Reduction of electrical energy consumed by feed-drive systems using sliding-mode control with a nonlinear sliding surface // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2014. Vol. 61 (6). P. 2875–2882. DOI: 10.1109/TIE.2013.2275975.
  4. Ma J., Sun Y., Yuan X. [et al.]. Dynamics and collapse in a power system model with voltage variation: The damping effect // PLOS ONE. 2016. Vol. 11 (11). e0165943. DOI: 10.1371/journal.pone.0165943.
  5. Prasertwong K., Mithulanthan N. A New Algorithm Based on Logarithm Decrement to Estimate the Damping Ratio for Power System Oscillation // 2017 14th International Conference on Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology (ECTI-CON). 2017. DOI: 10.1109/ECTICON.2017.8096288.
  6. Lin R., Zhu J. Model updating of damped structures using FRF data // Mechanical Systems and Signal Processing. 2006. Vol. 20 (8). P. 2200–2218. DOI: 10.1016/j.ymssp.2006.05.008.
  7. Qiao G., Rahmatalla S. Identification of damping and stiffness parameters of cervical and lumbar spines of supine humans under vertical whole-body vibration // Journal of Low Frequency Noise Vibration and Active Control. 2019. Vol. 39 (1). P. 59–71. DOI: 10.1177/1461348419837031.
  8. Minetti A. E., Moorhead A. P., Pavie G. Frictional internal work of damped limbs oscillation in human locomotion // Proceedings of the Royal Society B. 2020. Vol. 287 (1931). P. 20201410. DOI: 10.1098/rspb.2020.1410.
  9. Gupta T. Identification and experimental validation of damping ratios of different human body segments through anthropometric vibratory model in standing posture // Journal of Biomechanical Engineering. 2006. Vol. 129 (4). P. 566–574. DOI: 10.1115/1.2720917.
  10. Moore J. R., Maguire D. A. Natural sway frequencies and damping ratios of trees: concepts, review and synthesis of previous studies // Trees. 2004. Vol. 18 (2). P. 195–203. DOI: 10.1007/s00468-003-0295-6.
  11. Polunin P. M., Yang Y., Dykman M. I. [et al.]. Characterization of MEMS resonator nonlinearities using the ringdown response // Journal of Microelectromechanical Systems. 2016. Vol. 25 (2). P. 297–303. DOI: 10.1109/JMEMS.2016.2529296.
  12. Mo Y., Du L., Qu B. [et al.]. Damping ratio analysis of a silicon capacitive micromechanical accelerometer // Wireless Sensor Network. 2017. Vol. 09 (05). P. 178–188. DOI: 10.4236/wsn.2017.95010.
  13. Salamon R., Kaminrski H., Fritzkowski P. Estimation of parameters of various damping models in planar motion of a pendulum // Meccanica. 2020. Vol. 55. P. 1655–1677. DOI: 10.1007/s11012-020-01197-z.
  14. Каудерер Г. Нелинейная механика: пер. с нем. Москва: Изд-во иностр. лит-ры. 1961. 779 с.
  15. Вибрации в технике: справочник. В 6 т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред., гл. ред.) [и др.]. Москва: Машиностроение, 1979–1981. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / Под ред. И. И. Блехмана. Москва: Машиностроение, 1979. 351 с.
  16. Макаров В. А. Расчёт параметров диссипативной функции по огибающей экспериментальной вибограммы // Машиноведение. 1988. № 5. С. 98–99. ()
  17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. 6. Гидродинамика. 3-е изд., испр. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 736 с.
  18. Randall D. Peters. Nonlinear Damping of the 'Linear' Pendulum. 2003. DOI: 10.48550/arXiv.physics/0306081.
  19. Джилавдари И. З., Русак А. А. Измерение сил трения методом аппроксимации огибающей // Трение и износ. 2000. Т. 21, № 4, с. 424–432. EDN: WXJZKB
  20. Myers A. D., Khasawneh F. A. Damping parameter estimation using topological signal processing // Mechanical Systems and Signal Processing. 2022. Vol. 174. 109042. DOI: 10.1016/j.ymssp.2022.109042.
  21. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. 3-е изд., перераб. Москва: Наука, 1991. 252 с. ISBN 5-02-014137-2.
- 
- КАЛАШНИКОВ Борис Александрович**, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры «Авиа- и ракетостроение» Омского государственного технического университета (ОмГТУ), г. Омск.  
SPIN-код: 7574-1323  
ORCID: 0000-0002-9946-3480  
AuthorID (SCOPUS): 6701318766  
ResearcherID: M-9643-2014  
Адрес для переписки: bkalashnikov1@yahoo.com
- БОХАН Владимир Викторович**, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры «Основы теории механики и автоматического управления» ОмГТУ, г. Омск; старший научный сотрудник АО «Федеральный научно-производственный центр «Прогресс», г. Омск.  
SPIN-код: 3625-7966  
AuthorID (РИНЦ): 747705  
ORCID: 0000-0003-0690-381X  
ResearcherID: P-3030-2017  
Адрес для переписки: vladimir\_bohan@mail.ru
- ПЕНЬКОВ Константин Вадимович**, аспирант кафедры «Основы теории механики и автоматического управления» ОмГТУ, г. Омск.  
ORCID: 0009-0002-7567-5478  
ResearcherID: LDG-2742-2024  
Адрес для переписки: kos.penkov@gmail.com

#### Для цитирования

Калашников Б. А., Бохан В. В., Пеньков К. В. Экспериментальное определение нелинейной функции демпфирования механических систем // Омский научный вестник. 2024. № 3 (191). С. 5–13. DOI: 10.25206/1813-8225-2024-191-5-13.

Статья поступила в редакцию 20.06.2024 г.

© Б. А. Калашников, В. В. Бохан, К. В. Пеньков

<sup>1</sup> Omsk State  
Technical University,  
Omsk, Russia

<sup>2</sup> JSC «Federal Research  
and Production Center «Progress»,  
Omsk, Russia

## DETERMINING THE NONLINEAR DAMPING FUNCTION USING EXPERIMENTS

In this article, the coefficients of the nonlinear damping function of a mechanical system with one translational degree of freedom are determined from an experimentally obtained oscillogram of free vibrations. The function is modeled using three types of damping: coulomb damping, linear viscous, and nonlinear viscous damping. Numerical values of the damping coefficients are identified. The characteristic of the dissipative force as a function of displacement is obtained, and is used to find the amount of energy dissipated over a time period. An equivalent relative damping ratio is approximated using the energy balance method and then used to perform numerical integration of the equation of motion. A satisfactory match of the envelope curve and the phase of the vibrational process is demonstrated by comparing the calculated oscillogram to the experimental one. The damping function parameters can be further refined by approximating the experimental amplitudes. The obtained value of the relative damping coefficient can be used to solve nonlinear problems in the area of dynamics of weakly damped systems.

**Keywords:** nonlinear damping function, Coulomb damping, linear viscous damping, nonlinear viscous damping, energy dissipation, envelope curve, relative damping ratio, energy balance method.

### References

1. Cao M. S., Sha G. G., Gao Y. F. [et al.] Structural damage identification using damping: a compendium of uses and features // Smart Materials and Structures. 2017. Vol. 26 (4). 043001. DOI: 10.1088/1361-665X/aa550a. (In Engl.).
2. Erickson D., Weber M., Sharf I. Contact stiffness and damping estimation for robotic systems // The International Journal of Robotics Research. 2003. Vol. 22 (1). P. 41–58. DOI: 10.1177/0278364903022001004. (In Engl.).
3. Mohammad A. E. K., Uchiyama N., Sano S. Reduction of electrical energy consumed by feed-drive systems using sliding-mode control with a nonlinear sliding surface // IEEE Transactions on Industrial Electronics.. 2014. Vol. 61 (6). P. 2875–2882. DOI: 10.1109/TIE.2013.2275975. (In Engl.).
4. Ma J., Sun Y., Yuan X. [et al.]. Dynamics and collapse in a power system model with voltage variation: The damping effect // PLOS ONE. 2016. Vol. 11 (11). e0165943. DOI: 10.1371/journal.pone.0165943. (In Engl.).
5. Prasertwong K., Mithulanthan N. A New Algorithm Based on Logarithm Decrement to Estimate the Damping Ratio for Power System Oscillation // 2017 14th International Conference on Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology (ECTI-CON). 2017. DOI: 10.1109/ECTICon.2017.8096288. (In Engl.).
6. Lin R., Zhu J. Model updating of damped structures using FRF data // Mechanical Systems and Signal Processing. 2006. Vol. 20 (8). P. 2200–2218. DOI: 10.1016/j.jmssp.2006.05.008. (In Engl.).
7. Qiao G., Rahmatalla S. Identification of damping and stiffness parameters of cervical and lumbar spines of supine humans under vertical whole-body vibration // Journal of Low Frequency Noise Vibration and Active Control. 2019. Vol. 39 (1). P. 59–71. DOI: 10.1177/1461348419837031. (In Engl.).
8. Minetti A. E., Moorhead A. P., Pavie G. Frictional internal work of damped limbs oscillation in human locomotion // Proceedings of the Royal Society B. 2020. Vol. 287 (1931). P. 20201410. DOI: 10.1098/rspb.2020.1410. (In Engl.).
9. Gupta T. Identification and experimental validation of damping ratios of different human body segments through anthropometric vibratory model in standing posture // Journal of Biomechanical Engineering. 2006. Vol. 129 (4). P. 566–574. DOI: 10.1115/1.2720917. (In Engl.).
10. Moore J. R., Maguire D. A. Natural sway frequencies and damping ratios of trees: concepts, review and synthesis of previous studies // Trees. 2004. Vol. 18 (2). P. 195–203. DOI: 10.1007/s00468-003-0295-6. (In Engl.).
11. Polunin P. M., Yang Y., Dykman M. I. [et al.]. Characterization of MEMS resonator nonlinearities using the ringdown response // Journal of Microelectromechanical Systems. 2016. Vol. 25 (2). P. 297–303. DOI: 10.1109/JMEMS.2016.2529296. (In Engl.).
12. Mo Y., Du L., Qu B. [et al.]. Damping ratio analysis of a silicon capacitive micromechanical accelerometer // Wireless

Sensor Network. 2017. Vol. 09 (05). P. 178 – 188. DOI: 10.4236/wsn.2017.95010. (In Engl.).

13. Salamon R., Kaminrski H., Fritzkowski P. Estimation of parameters of various damping models in planar motion of a pendulum // Meccanica. 2020. Vol. 55. P. 1655 – 1677. DOI: 10.1007/s11012-020-01197-z. (In Engl.).
14. Kauderer G. Nelineynaya mekhanika [Nonlinear mechanics]: trans. from German. Moscow, 1961. 779 p. (In Russ.).
15. Vibratsii v tekhnike: spravochnik. V 6 t. [Vibrations in Engineering: handbook. In 6 vols. / Ed. Board: V. N. Chelomey (Chairman, Chief ed.) [et al.]]. Moscow, 1979 – 1981. T. 2. Kolebaniya nelineynykh mekhanicheskikh sistem [Vol. 2. Fluctuations of nonlinear mechanical systems] / Ed. by I. I. Blekhmana. Moscow, 1979. 351 p. (In Russ.).
16. Makarov V. A. Raschet parametrov dissipativnoy funktsii po ogibayushchey eksperimental'noy vibrogrammy [Calculation of the parameters of the dissipative Function from the Envelope of the experimental vibrogram] // Mashinovedenie. Mashinovedenie. 1988. No. 5. P. 98 – 99. (In Russ.).
17. Landau L. D., Lifshits E. M. Teoreticheskaya fizika. V 10 t. T. 6. Gidrodinamika [Theoretical physics. In 10 vols. Vol. 6. Hydrodynamics]. 3rd ed., revised. Moscow, 1986. 736 p. (In Russ.).
18. Randall D. Peters. Nonlinear Damping of the 'Linear' Pendulum. 2003. DOI: 10.48550/arXiv.physics/0306081. (In Engl.).
19. Dzhilavdari I. Z., Rusak A. A. Izmereniye sil treniya metodom approksimatsii ogibayushchey [Measurement of friction forces by a method approximating of envelope curve] // Trenie i iznos. Friction and Wear. 2000. Vol. 21, no. 4. P. 424 – 432. EDN: WXJZKB. (In Russ.).
20. Myers A. D., Khasawneh F. A. Damping parameter estimation using topological signal processing // Mechanical Systems and Signal Processing. 2022. Vol. 174. 109042. DOI: 10.1016/j.ymssp.2022.109042. (In Engl.).
21. Panovko Ya. G. Vvedeniye v teoriyu mekhanicheskikh kolebaniy [Introduction to the theory of mechanical vibrations]. 3rd ed., revised. Moscow, 1991. 252 p. ISBN 5-02-014137-2. (In Russ.).

**KALASHNIKOV Boris Aleksandrovich**, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of Aircraft and Rocket Building Department, Omsk State Technical University (OmSTU), Omsk.

SPIN-code: 7574-1323

ORCID: 0000-0002-9946-3480

AuthorID (SCOPUS): 6701318766

ResearcherID: M-9643-2014

Correspondence address: bkalashnikov1@yahoo.com

**BOKHAN Vladimir Victorovich**, Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer of Fundamentals of Mechanics Theory and Automatic Control Department, OmSTU, Omsk; Senior Researcher, JSC «Federal Research and Production Center «Progress», Omsk.

SPIN-code: 3625-7966

AuthorID (RSCI): 747705

ORCID: 0000-0003-0690-381X

ResearcherID: P-3030-2017

Correspondence address: vladimir\_bohan@mail.ru

**PENKOV Konstantin Vadimovich**, Graduate Student of Fundamentals of Mechanics Theory and Automatic Control Department, OmSTU, Omsk.

ORCID: 0009-0002-7567-5478

ResearcherID: LDG-2742-2024

Correspondence address: kos.penkov@gmail.com

#### For citations

Kalashnikov B. A., Bokhan V. V., Penkov K. V. Determining the nonlinear damping function using experiments // Omsk Scientific Bulletin. 2024. No. 3 (191). P. 5 – 13. DOI: 10.25206/1813-8225-2024-191-5-13.

Received June 20, 2024.

© B. A. Kalashnikov, V. V. Bokhan, K. V. Penkov