

БИКУБИЧЕСКАЯ ЛЕНТОЧНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

Бикубической лентой называют вытянутую вдоль оси Ox поверхность постоянной ширины, образованную набором прямоугольных в плане бикубических порций, соединенных между собой с гладкостью C^1 (непрерывность градиента между порциями) или C^2 (непрерывность кривизны). Каждая порция ограничена кубическими параболой, лежащими в вертикальных плоскостях $x = \text{const}$, $y = \text{const}$. В статье представлены алгоритмы расчета бикубической ленты, основанные на использовании уравнений граничных кривых в качестве основных граничных условий. В качестве дополнительных граничных условий принимаются условия «плоские углы». Предлагаемый подход позволяет уменьшить размер характеристической матрицы системы линейных уравнений относительно коэффициентов, входящих в уравнения бикубических порций. Например, расчет 16 коэффициентов уравнения бикубической порции, проходящей через фиксированные граничные кривые, сводится к решению системы четырех линейных уравнений. Сформулированы (в виде теорем) критерии гладкого соединения бикубических порций. В теореме 1 сформулированы и доказаны условия непрерывности градиента. Теорема 2 содержит условия непрерывности кривизны. Представлены примеры расчета и визуализации C^1 и C^2 -гладких ленточных поверхностей, состоящих из двух или трех бикубических порций.

Ключевые слова: бикубическая порция, кубическая парабола, условия гладкости, градиент, плоские углы, закрепленные концы.

Введение. Бикубической ленточной поверхностью (бикубической лентой) называют вытянутую вдоль оси Ox поверхность постоянной ширины, образованную набором прямоугольных в плане бикубических порций (сегментов) $ABCD$, $BMNC$, $MKLN$, ..., соединенных между собой по наперед заданным поперечным швам BC , MN , ... с гладкостью C^1 или C^2 (рис. 1). Гладкость C^1 означает непрерывное изменение градиента (отсутствие изломов на поверхности ленты). Гладкость C^2 означает непрерывное изменение кривизны поверхности. Иными словами, бикубическая лента — это прямоугольная в плане, вытянутая вдоль оси Ox кусочно-гладкая поверхность, проходящая через наперед заданные поперечные направляющие AD , BC , MN , KL , ..., лежащие в плоскостях $x = \text{const}$. В качестве поперечных направляющих и продольных границ используются сегменты кубических парабол. Некоторые направляющие могут вырождаться в прямые линии (например, отрезок MN на рис. 1).

Порции ленты описываются бикубическими уравнениями [1, 2]:

$$F_{ABCD}(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} (x - x_0)^3 (y - y_0)^3, \quad x \in [x_0, x_1], \quad (1)$$

$$F_{BMNC}(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 b_{ij} (x - x_1)^3 (y - y_0)^3, \quad x \in [x_1, x_2], \quad (2)$$

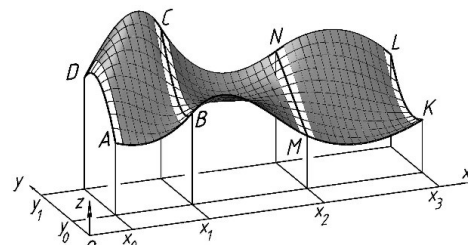


Рис. 1. Бикубическая лента

$$F_{MKLN}(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 c_{ij} (x - x_2)^3 (y - y_0)^3, \quad x \in [x_2, x_3], \quad (3)$$

.....

Диапазон изменения ординаты $y \in [y_0, y_1]$ одинаков для всех порций. Количество порций может быть любым.

Постановка задачи. В декартовой системе координат $Oxyz$ зафиксирован набор поперечных направляющих (кубических парабол) AD , BC , MN , KL , ... (рис. 2). Продольные границы формируются с учетом заданных граничных условий. Требуется найти уравнения (1), (2), (3), ... бикубических порций $ABCD$, $BMNC$, $MKLN$, ..., удовлетворяющих заданным граничным условиям и условиям гладкости.

Бикубическая порция. На плоскости Oxy декартовой системы координат $Oxyz$ отмечена прямо-

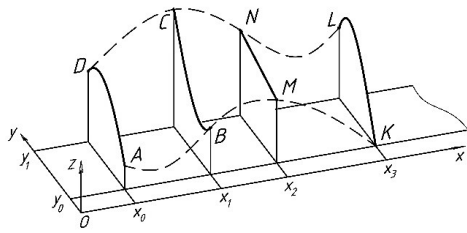


Рис. 2. Поперечные направляющие бикубической ленты

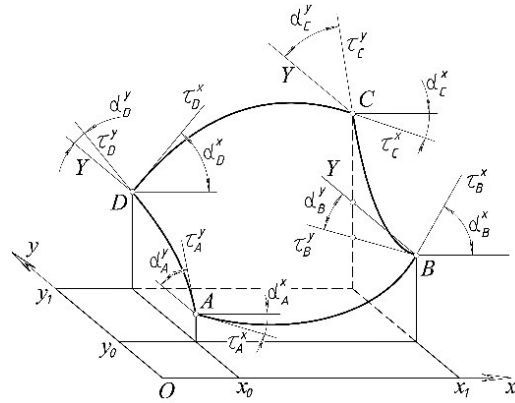


Рис. 3. Граничные условия

угольная ячейка $h_x \times h_y$, где $h_x = x_1 - x_0$, $h_y = y_1 - y_0$ (рис. 3). Указаны угловые точки $A(x_0, y_0, z_A)$, $B(x_1, y_0$

$z_B)$, $C(x_1, y_1, z_C)$, $D(x_0, y_1, z_D)$. Даны уравнения граничных кривых:

$$\begin{aligned} AB &= z_{AB}(x) = \alpha_{AB} + \beta_{AB}(x - x_0) + \gamma_{AB}(x - x_0)^2 + \delta_{AB}(x - x_0)^3, \quad x \in [x_0, x_1], \\ AD &= z_{AD}(y) = \alpha_{AD} + \beta_{AD}(y - y_0) + \gamma_{AD}(y - y_0)^2 + \delta_{AD}(y - y_0)^3, \quad y \in [y_0, y_1], \\ BC &= z_{BC}(y) = \alpha_{BC} + \beta_{BC}(y - y_0) + \gamma_{BC}(y - y_0)^2 + \delta_{BC}(y - y_0)^3, \quad y \in [y_0, y_1], \\ DC &= z_{DC}(x) = \alpha_{DC} + \beta_{DC}(x - x_0) + \gamma_{DC}(x - x_0)^2 + \delta_{DC}(x - x_0)^3, \quad x \in [x_0, x_1]. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь и далее свободный член уравнения кубической параболы обозначен буквой α , а коэффициенты при возрастающих степенях аргумента — буквами β , γ , δ соответственно. В подстрочном индексе указаны граничные точки соответствующей пара-

болы. Требуется найти уравнение бикубической поверхности (порции) $ABCD$, «натянутой» на заданные граничные кривые.

Уравнение (1) бикубической порции $ABCD$ в развернутой форме имеет вид

$$\begin{aligned} F_{ABCD}(x, y) = z &= a_{00} + a_{01}(y - y_0) + a_{02}(y - y_0)^2 + a_{03}(y - y_0)^3 + \\ &+ [a_{10} + a_{11}(y - y_0) + a_{12}(y - y_0)^2 + a_{13}(y - y_0)^3](x - x_0) + \\ &+ [a_{20} + a_{21}(y - y_0) + a_{22}(y - y_0)^2 + a_{23}(y - y_0)^3](x - x_0)^2 + \\ &+ [a_{30} + a_{31}(y - y_0) + a_{32}(y - y_0)^2 + a_{33}(y - y_0)^3](x - x_0)^3; \quad x \in [x_0, x_1], y \in [y_0, y_1]. \end{aligned} \quad (5)$$

Положив $y = y_0$, выделяем из (5) уравнение граничной кривой AB :

$$z_{AB}(x) = a_{00} + a_{10}(x - x_0) + a_{20}(x - x_0)^2 + a_{30}(x - x_0)^3, \quad x \in [x_0, x_1]. \quad (6)$$

Приравнявая коэффициенты, входящие в первое уравнение из (4), и коэффициенты, входящие в уравнение (6), получаем:

$$\begin{aligned} a_{00} &= \alpha_{AB}, & a_{10} &= \beta_{AB}, \\ a_{20} &= \gamma_{AB}, & a_{30} &= \delta_{AB}. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогичным образом, положив $x = x_0$, выделяем из (5) уравнение граничной кривой AD и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной y :

$$a_{01} = \beta_{AD}, \quad a_{02} = \gamma_{AD}, \quad a_{03} = \delta_{AD}. \quad (8)$$

Подставляя в (5) $x = x_1$, получаем уравнение граничной кривой BC :

$$\begin{aligned} z_{BC}(y) &= (a_{00} + a_{10}h_x + a_{20}h_x^2 + a_{30}h_x^3) + \\ &+ (a_{01} + a_{11}h_x + a_{21}h_x^2 + a_{31}h_x^3)(y - y_0) + \\ &+ (a_{02} + a_{12}h_x + a_{22}h_x^2 + a_{32}h_x^3)(y - y_0)^2 + \\ &+ (a_{03} + a_{13}h_x + a_{23}h_x^2 + a_{33}h_x^3)(y - y_0)^3. \end{aligned} \quad (9)$$

Свободный член этого уравнения известен из (7). Приравнявая остальные коэффициенты уравнения (9) заданным коэффициентам граничной кривой BC (третье уравнение из (4)) и учитывая (8), получаем:

$$\begin{aligned} a_{11}h_x + a_{21}h_x^2 + a_{31}h_x^3 &= \beta_{BC} - \beta_{AD}, \\ a_{12}h_x + a_{22}h_x^2 + a_{32}h_x^3 &= \gamma_{BC} - \gamma_{AD}, \\ a_{13}h_x + a_{23}h_x^2 + a_{33}h_x^3 &= \delta_{BC} - \delta_{AD}. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогичным образом, положив $y = y_1$, выделяем из (5) уравнение граничной кривой DC и, учитывая (7), (8), приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x :

$$\begin{aligned} a_{11}h_y + a_{12}h_y^2 + a_{13}h_y^3 &= \beta_{DC} - \beta_{AB}, \\ a_{21}h_y + a_{22}h_y^2 + a_{23}h_y^3 &= \gamma_{DC} - \gamma_{AB}, \\ a_{31}h_y + a_{32}h_y^2 + a_{33}h_y^3 &= \delta_{DC} - \delta_{AB}. \end{aligned} \quad (11)$$

Можно показать, что любое из шести уравнений (10), (11) является следствием пяти остальных, поэтому одно из уравнений (например, последнее уравнение из (11)) надо исключить из рассмотрения. Получаем пять линейно независимых уравнений (10), (11), которые содержат девять неизвестных величин $\{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}\}$. Для их определения следует добавить четыре граничных условия.

В качестве дополнительных граничных условий могут быть приняты условия «плоские углы»: равенство нулю первых смешанных производных функции (5) в угловых точках конструируемой бикубической порции [3, 4]. Дифференцируя (5) и приравнявая нулю первые смешанные производные, получаем условия плоских углов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) &= a_{11} = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_1, y_0) &= 2a_{21} + 3h_x a_{31} = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_1, y_1) &= 4a_{22} + 6h_y a_{23} + 6h_x a_{32} + 9h_x h_y a_{33} = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_1) &= 2a_{12} + 3h_y a_{13} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Выполнив некоторые алгебраические преобразования, из (10), (11), (12) получаем (с учетом $a_{11} = 0$):

$$\begin{aligned} a_{12} &= -\frac{3}{h_y^2}(\beta_{AB} - \beta_{DC}), \quad a_{13} = \frac{2}{h_y^3}(\beta_{AB} - \beta_{DC}), \\ a_{21} &= -\frac{3}{h_x^2}(\beta_{AD} - \beta_{BC}), \quad a_{31} = \frac{2}{h_x^3}(\beta_{AD} - \beta_{BC}). \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая (13), система уравнений (10), (11), (12) сокращается до четырех уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{33}$:

$$\begin{aligned} a_{22}h_x^2 + a_{32}h_x^3 &= \gamma_{BC} - \gamma_{AD} - a_{12}h_x, \\ a_{23}h_x^2 + a_{33}h_x^3 &= \delta_{BC} - \delta_{AD} - a_{13}h_x, \\ a_{22}h_y^2 + a_{23}h_y^3 &= \gamma_{DC} - \gamma_{AB} - a_{21}h_y, \\ 4a_{22} + 6a_{23}h_y + 6a_{32}h_x + 9a_{33}h_x h_y &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнения (7), (8), (13), (14) позволяют определить все коэффициенты, входящие в уравнение (1) бикубической порции $ABCD$, заданной своими границами. Комплекс этих уравнений представляет собой вычислительный алгоритм, эквивалентный решению системы 16 линейных уравнений относительно 16 неизвестных коэффициентов уравнения (3) искомой бикубической порции [5].

Если бикубическая порция задана угловыми точками A, B, C, D и градиентами (углами наклона касательных в угловых точках по осям Ox, Oy), то уравнения (4) границ порции определяются простым расчетом [6].

Например, если заданы углы наклона касательных α_A^x, α_B^x в конечных точках граничной кривой AB (рис. 3), то коэффициенты γ_{AB}, δ_{AB} , входящие в уравнение этой кривой, вычисляются из системы уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_{AB} + \beta_{AB}h_x + \gamma_{AB}h_x^2 + \delta_{AB}h_x^3 &= z_B, \\ \beta_{AB} + 2\gamma_{AB}h_x + 3\delta_{AB}h_x^2 &= tg\alpha_B^x, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\alpha_{AB} = z_A, \beta_{AB} = tg\alpha_A^x$. Уравнения остальных границ определяются аналогичным образом.

Пример 1. Даны координаты угловых точек $A(0; 0; 2,5), B(10; 0; 5), C(10; 10; 12,5), D(0, 10, 7,5)$. В угловых точках зафиксированы градиенты (рис. 3):

$$\begin{aligned} tg\alpha_A^x &= -0,4; \quad tg\alpha_A^y = 1,7; \quad tg\alpha_B^x = 0,5; \quad tg\alpha_B^y = -1; \\ tg\alpha_C^x &= 0; \quad tg\alpha_C^y = 1,7; \quad tg\alpha_D^x = 1,7; \quad tg\alpha_D^y = -1. \end{aligned}$$

Дополнительно принимаются условия плоских углов (равенство нулю первых смешанных производных в углах порции). Требуется сформировать бикубическую поверхность (5), удовлетворяющую заданным граничным условиям.

Решение. Подставляя в (15) граничные условия и значения $h_x = h_y = 10$, находим коэффициенты $\alpha_{AB} = 2,5; \beta_{AB} = -0,4; \gamma_{AB} = 0,105; \delta_{AB} = -0,004$ уравнения граничной кривой AB . Аналогичным образом, вычисляя коэффициенты уравнений граничных кривых AD, BC и DC , получаем:

$$\begin{aligned} z_{AB}(x) &= 2,5 - 0,4x + 0,105x^2 - 0,004x^3, \\ z_{BC}(y) &= 5 - y + 0,255y^2 - 0,008y^3, \\ z_{AD}(y) &= 2,5 + 1,7y - 0,09y^2 - 0,003y^3, \\ z_{DC}(x) &= 7,5 + 1,7x - 0,19x^2 + 0,007x^3. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя коэффициенты уравнений (16) в выражения (13), получаем:

$$\begin{aligned} a_{12} &= 0,063; \quad a_{13} = -0,0042; \\ a_{21} &= -0,081; \quad a_{31} = 0,0054. \end{aligned}$$

Система уравнений (14) приобретает вид

$$\begin{aligned} 100a_{22} + 1000a_{32} &= -0,285, \\ 100a_{23} + 1000a_{33} &= 0,037, \\ 100a_{22} + 1000a_{23} &= 0,515, \\ 4a_{22} + 60a_{23} + 60a_{32} + 900a_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений, получаем:

$$\begin{aligned} a_{22} &= -0,00075; \quad a_{32} = -0,00021; \\ a_{23} &= 0,00059; \quad a_{33} = -0,000022. \end{aligned}$$

Из (7), (8) находим остальные коэффициенты, входящие в уравнение (5):

$$\begin{aligned} a_{00} &= \alpha_{AB} = 2,5; \quad a_{10} = \beta_{AB} = -0,4; \\ a_{20} &= \gamma_{AB} = 0,105; \quad a_{30} = \delta_{AB} = -0,004; \\ a_{01} &= \beta_{AD} = 1,7; \quad a_{02} = \gamma_{AD} = -0,09; \\ a_{03} &= \delta_{AD} = -0,003. \end{aligned}$$

Все 16 коэффициентов (с учетом $a_{11} = 0$) уравнения (5) бикубической порции $ABCD$ определены. На рис. 4 представлена сетка образующих (кубических парабол), построенная согласно (5). Например, в сечении поверхности плоскостью $y=3$ получаем продольную образующую

$$\begin{aligned} z(x) &= 6,709 + 0,0536x - \\ &- 0,12882x^2 + 0,009716x^3. \end{aligned} \quad (17)$$

Дифференцируя (17) и положив $x=10$, получаем: $dz/dx=0,392; d^2z/dx^2=0,32532$. Эти величины будут использованы в примере 2.

C^1 -гладкое соединение бикубических сегментов. Требуется соединить «левую» и «правую» бикубические порции $ABCD$ и $BMNC$ по шву BC . Покажем, что гладкость C^1 достигается при равенстве первых производных в стыковых точках B, C соединяемых порций.

Теорема 1. Если у «левой» и «правой» бикубических порций $F_{лев}(x, y)$ и $F_{прав}(x, y)$ имеется общий шов BC , причем в точках B, C совпадают частные производные

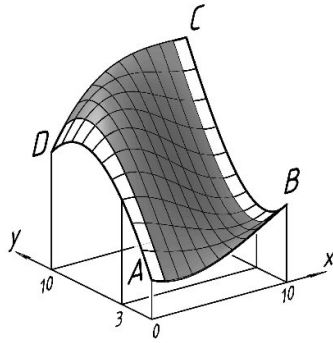


Рис. 4. Бикубический сегмент

$$\frac{\partial F_{лев}}{\partial x} \Big|_B = \frac{\partial F_{прав}}{\partial x} \Big|_B, \quad \frac{\partial F_{лев}}{\partial x} \Big|_C = \frac{\partial F_{прав}}{\partial x} \Big|_C,$$

а также совпадают первые смешанные производные

$$\frac{\partial^2 F_{лев}}{\partial x \partial y} \Big|_B = \frac{\partial^2 F_{прав}}{\partial x \partial y} \Big|_B, \quad \frac{\partial^2 F_{лев}}{\partial x \partial y} \Big|_C = \frac{\partial^2 F_{прав}}{\partial x \partial y} \Big|_C,$$

то в любой точке шва BC выполняется равенство $\frac{\partial F_{лев}}{\partial x} = \frac{\partial F_{прав}}{\partial x}$.

Доказательство. Согласно (5), производную $\frac{\partial F_{лев}}{\partial x}$ вдоль линии шва BC можно записать в виде кубической функции

$$\psi(y) = \frac{\partial F_{лев}}{\partial x} = a_{лев} + b_{лев}y + c_{лев}y^2 + d_{лев}y^3.$$

Функция $\psi(y)$ однозначно определена своими значениями $\frac{\partial F_{лев}}{\partial x} \Big|_B, \frac{\partial F_{лев}}{\partial x} \Big|_C$ и производными

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_B = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_{лев}}{\partial x} \right) \Big|_B = \frac{\partial^2 F_{лев}}{\partial x \partial y} \Big|_B, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_C = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_{лев}}{\partial x} \right) \Big|_C = \frac{\partial^2 F_{лев}}{\partial x \partial y} \Big|_C$$

в крайних точках шва BC.

Производную $\frac{\partial F_{прав}}{\partial x}$ вдоль линии шва BC также можно записать в виде кубической функции

$$\chi(y) = \frac{\partial F_{прав}}{\partial x} = a_{прав} + b_{прав}y + c_{прав}y^2 + d_{прав}y^3.$$

Эта функция также однозначно определена своими значениями $\frac{\partial F_{прав}}{\partial x} \Big|_B, \frac{\partial F_{прав}}{\partial x} \Big|_C$ и производными

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} \Big|_B = \frac{\partial^2 F_{прав}}{\partial x \partial y} \Big|_B, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} \Big|_C = \frac{\partial^2 F_{прав}}{\partial x \partial y} \Big|_C$$

в крайних точках шва BC. Согласно условию теоремы, значения функций $\psi(y), \chi(y)$ и значения их смешанных производных

$$\text{в точках } B, C \text{ совпадают: } \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_B = \frac{\partial \chi}{\partial y} \Big|_B, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_C = \frac{\partial \chi}{\partial y} \Big|_C.$$

Следовательно, вдоль линии шва BC функции $\psi(y), \chi(y)$ совпадают. Это означает, что в любой точке шва соединяемые бикубические порции имеют общую касательную, параллельную фронтальной плоскости Ozx.

Кроме этого, в любой точке шва BC существует касательная к линии шва. Эта касательная также является общей для соединяемых порций. Две общие касательные в любой точке шва определяют общую касательную плоскость, что доказывает C^1 — гладкое соединение бикубических порций.

Пример 2. К порции бикубической поверхности ABCD, рассмотренной в примере 1, требуется присоединить (с гладкостью C^1) бикубическую порцию VMNC с угловыми точками $M(25; 0; 0), N(25; 10; 7,5)$ и фиксированными градиентами в этих точках $\text{tg}\alpha_M^x = -0,6; \text{tg}\alpha_M^y = 2; \text{tg}\alpha_N^x = 1; \text{tg}\alpha_N^y = -1,6$.

Решение. Уравнение (2) бикубической порции VMNC в развернутой форме имеет вид

$$F_{VMNC}(x, y) = z = b_{00} + b_{01}(y - y_0) + b_{02}(y - y_0)^2 + b_{03}(y - y_0)^3 + [b_{10} + b_{11}(y - y_0) + b_{12}(y - y_0)^2 + b_{13}(y - y_0)^3](x - x_1) + [b_{20} + b_{21}(y - y_0) + b_{22}(y - y_0)^2 + b_{23}(y - y_0)^3](x - x_1)^2 + [b_{30} + b_{31}(y - y_0) + b_{32}(y - y_0)^2 + b_{33}(y - y_0)^3](x - x_1)^3; \quad x \in [x_1, x_2], y \in [y_0, y_1]. \quad (18)$$

Согласно теореме 1, для C^1 -гладкого соединения сегментов по шву BC надо обеспечить равенство первых производных в стыковых точках B, C. Следовательно, для «правой» порции VMNC в точках B, C должны быть выполнены условия:

$$\text{tg}\alpha_B^x = 0,5; \quad \text{tg}\alpha_C^x = 0; \quad \frac{\partial^2 F_{VMNC}}{\partial x \partial y} \Big|_B = \frac{\partial^2 F_{VMNC}}{\partial x \partial y} \Big|_C = 0 \quad (19)$$

(см. пример 1).

Дополнительно примем условия «плоские углы» в точках M, N:

$$\frac{\partial^2 F_{VMNC}}{\partial x \partial y} \Big|_M = \frac{\partial^2 F_{VMNC}}{\partial x \partial y} \Big|_N = 0,$$

что позволяет использовать алгоритм (7), (8), (13), (14) для расчета «правой» порции.

Согласно (15), находим уравнения продольных границ VM, CN и направляющей параболы MN:

$$\begin{aligned} BM &= z_{BM}(x) = 5 + 0,5(x - x_1) - \\ &- 0,093(3)(x - x_1)^2 + 0,002518(518)(x - x_1)^3, \\ CN &= z_{CN}(x) = 12,5 - 0,13(3)(x - x_1)^2 + \\ &+ 0,0074(074)(x - x_1)^3, \\ MN &= z_{MN}(y) = 2y - 0,015y^2 - 0,011y^3. \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнение шва BC имеет вид $BC = z_{BC}(y) = 5 - y + 0,255y^2 - 0,008y^3$ (см. пример 1).

Для расчета коэффициентов уравнения (18) используем вычислительный алгоритм (7), (8), (13), (14), где вместо обозначений a_{ij} приняты обозначения b_{ij} , а также соответствующим образом изменены обозначения граничных кривых (обозначение AB заменяем на MN, и так далее). Выражения (13) приобретают для правого сегмента следующий вид:

$$\begin{aligned} b_{12} &= -\frac{3}{h_y}(\beta_{BM} - \beta_{CN}), \quad b_{13} = \frac{2}{h_y^3}(\beta_{BM} - \beta_{CN}), \\ b_{21} &= -\frac{3}{h_x}(\beta_{BC} - \beta_{MN}), \quad b_{31} = \frac{2}{h_x^3}(\beta_{BC} - \beta_{MN}). \end{aligned}$$

Подставляя сюда $\beta_{BM} = 0,5; \beta_{CN} = 0; \beta_{BC} = -1$, получаем:

$$\begin{aligned} b_{12} &= -0,015; \quad b_{13} = 0,001; \\ b_{21} &= 0,04; \quad b_{31} = -0,0017(7). \end{aligned}$$

Система уравнений (14) для порции VMNC приобретает вид:

$$\begin{aligned} b_{22}h_x^2 + b_{32}h_x^3 &= \gamma_{MN} - \gamma_{BC} - b_{12}h_x, \\ b_{23}h_x^2 + b_{33}h_x^3 &= \delta_{MN} - \delta_{BC} - b_{13}h_x, \\ b_{22}h_y^2 + b_{23}h_y^3 &= \gamma_{CN} - \gamma_{BM} - b_{21}h_y, \\ 4b_{22} + 6b_{23}h_y + 6b_{32}h_x + 9b_{33}h_xh_y &= 0. \end{aligned}$$

Подставляем сюда рассчитанные значения b_{12} , b_{13} , b_{21} , b_{31} , а также значения

$$\begin{aligned} \gamma_{MN} &= -0,015; \quad \gamma_{BC} = 0,255; \quad \delta_{MN} = -0,011; \\ \delta_{BC} &= -0,008, \quad h_x = 15, \quad h_y = 10. \end{aligned}$$

Решив полученную систему уравнений, находим:

$$\begin{aligned} b_{22} &= -0,0048; \quad b_{32} = 0,000306(6); \\ b_{23} &= 0,00004; \quad b_{33} = -0,000008. \end{aligned}$$

Из выражений (7), (8) применительно к порции $BMNC$ получаем:

$$\begin{aligned} b_{00} &= \alpha_{BM} = 5; \quad b_{10} = \beta_{BM} = 0,5; \\ b_{20} &= \gamma_{BM} = -0,093(3); \quad b_{30} = \delta_{BM} = 0,002518 \quad (518); \\ b_{01} &= \beta_{BC} = -1; \quad b_{02} = \gamma_{BC} = 0,255; \quad b_{03} = \delta_{BC} = -0,008. \end{aligned}$$

Согласно условию «плоские углы», имеем $b_{11} = 0$.

Все коэффициенты уравнения (18) бикубической порции $BMNC$ определены. На рис. 5 представлена лента, построенная согласно (18). Бикубические порции $ABCD$ и $BMNC$ соединены с гладкостью C^1 . В стыковой точке C получен неестественно уплощенный участок поверхности вследствие того, что в точке C задана горизонтальная касательная ($\text{tg}\alpha_C^x = 0$). Этот недостаток будет исправлен в примере 3.

Проверка. Положив в (17) $y = 3$, получаем продольную образующую «правой» порции

$$\begin{aligned} z &= 4,079 + 0,392(x - 10) - 0,015453(x - 10)^2 - \\ &\quad - 0,000270815(x - 10)^3. \end{aligned} \quad (21)$$

Дифференцируя (21) и положив $x = 10$, получаем: $dz/dx = 0,392$. В конечной точке образующей (17) «левой» порции была получена такая же величина (см. пример 1). Следовательно, образующие (17) и (21) имеют общую касательную в точке их соединения (на линии шва BC), что подтверждает гладкость C^1 составной поверхности. Вторая производная функции (21) при $x = 10$ равна $d^2z/dx^2 = -0,03091$, что отличается от значения $d^2z/dx^2 = 0,21236$ для функции (17). Следовательно, на линии BC происходит скачкообразное изменение кривизны бикубической ленты.

C^2 -гладкое соединение бикубических порций. Для C^2 -гладкого соединения бикубических порций по шву BC надо потребовать равенство первых и вторых производных от функций (5), (18) по переменным x, y в точках B, C .

Теорема 2. Если у «левой» и «правой» бикубических порций $F_{лев}(x, y)$ и $F_{прав}(x, y)$ имеется общий поперечный шов BC , причем в точках B, C совпадают первые и вторые частные производные

$$\frac{\partial F_{лев}}{\partial x} \Big|_B = \frac{\partial F_{прав}}{\partial x} \Big|_B, \quad \frac{\partial F_{лев}}{\partial x} \Big|_C = \frac{\partial F_{прав}}{\partial x} \Big|_C, \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 F_{лев}}{\partial x^2} \Big|_B = \frac{\partial^2 F_{прав}}{\partial x^2} \Big|_B, \quad \frac{\partial^2 F_{лев}}{\partial x^2} \Big|_C = \frac{\partial^2 F_{прав}}{\partial x^2} \Big|_C, \quad (23)$$

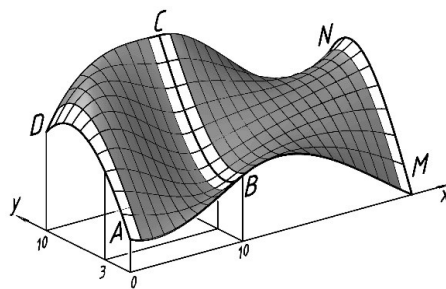


Рис. 5. C^1 -гладкая лента (к примеру 2)

а также совпадают первые и вторые смешанные производные

$$\frac{\partial^2 F_{лев}}{\partial x \partial y} \Big|_B = \frac{\partial^2 F_{прав}}{\partial x \partial y} \Big|_B, \quad \frac{\partial^2 F_{лев}}{\partial x \partial y} \Big|_C = \frac{\partial^2 F_{прав}}{\partial x \partial y} \Big|_C, \quad (24)$$

$$\frac{\partial^4 F_{лев}}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_B = \frac{\partial^4 F_{прав}}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_B, \quad \frac{\partial^4 F_{лев}}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_C = \frac{\partial^4 F_{прав}}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_C, \quad (25)$$

то в любой точке шва выполняются равенства $\frac{\partial F_{лев}}{\partial x} = \frac{\partial F_{прав}}{\partial x}, \frac{\partial^2 F_{лев}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F_{прав}}{\partial x^2}$. Это означает, что кривизна любой продольной образующей бикубической ленты изменяется непрерывно (без скачкообразного изменения в стыковых точках на линии шва). Доказательство теоремы 2 выполняется аналогично доказательству теоремы 1.

Пусть требуется сформировать двухсекционную C^2 -гладкую бикубическую ленту с фиксированными поперечными направляющими AD, BC, MN (см. рис. 5). Согласно условию теоремы 2, продольная граница ABM , образованная кубическими параболлами AB и BM , должна быть C^2 -гладкой составной кривой. Это же требование относится к продольной границе DCN . Рассмотрим условия C^2 -гладкого соединения кубических парабол.

Условия C^2 -гладкости составной кубической кривой. В вертикальной плоскости $y = y_0$ декартовой системы координат $Oxyz$ указаны точки $A(x_0, y_0, z_0), B(x_1, y_0, z_1), M(x_2, y_0, z_2)$. Через указанные точки требуется провести составную C^2 -гладкую кривую, образованную кубическими параболлами $\varphi_1(x) = AB$ и $\varphi_2(x) = BM$. В граничных точках A и M указаны углы наклона α_A^x и α_M^x касательных к конструируемой кривой («закрепленные концы»).

Условие C^2 -гладкого соединения парабол $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ имеет вид [7]

$$\begin{aligned} h_{1x}S_0 + 2(h_{1x} + h_{2x})S_1 + h_{2x}S_2 &= \\ &= \frac{6(z_2 - z_1)}{h_{2x}} - \frac{6(z_1 - z_0)}{h_{1x}}, \end{aligned} \quad (26)$$

где S_0, S_1, S_2 — значения вторых производных по переменной x функций $z = \varphi_1(x), z = \varphi_2(x)$ в узлах A, B, M . Здесь использованы обозначения $h_{1x} = x_1 - x_0, h_{2x} = x_2 - x_1$.

Условие гладкости (26) должно быть дополнено условиями «закрепленные концы»:

$$\frac{z_1 - z_0}{h_{1x}} - \frac{h_{1x}}{3} S_0 - \frac{h_{1x}}{6} S_1 = \text{tg}\alpha_A^x,$$

$$\frac{z_2 - z_1}{h_{2x}} + \frac{h_{2x}}{3} S_2 + \frac{h_{2x}}{6} S_1 = \text{tg}\alpha_M^x. \quad (27)$$

Из системы уравнений (26), (27) находим значения S_0, S_1, S_2 и подставляем в уравнения

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{S_0(x_1 - x)^3 + S_1(x - x_0)^3}{6h_{1x}} + \\ &+ \left(\frac{z_0}{h_{1x}} - \frac{S_0 h_{1x}}{6} \right) (x_1 - x) + \left(\frac{z_1}{h_{1x}} - \frac{S_1 h_{1x}}{6} \right) (x - x_0), \\ &x \in [x_0, x_1], \\ \varphi_2(x) &= \frac{S_1(x_2 - x)^3 + S_2(x - x_1)^3}{6h_{2x}} + \\ &+ \left(\frac{z_1}{h_{2x}} - \frac{S_1 h_{2x}}{6} \right) (x_2 - x) + \left(\frac{z_2}{h_{2x}} - \frac{S_2 h_{2x}}{6} \right) (x - x_1), \\ &x \in [x_1, x_2]. \end{aligned} \quad (28)$$

Вычислительный алгоритм (26), (27), (28) позволяет найти уравнения сегментов C^2 -гладкой кубической кривой с закрепленными концами. Этот алгоритм будет в дальнейшем использован для формирования продольных границ C^2 -гладкой бикубической ленты. Если C^2 -гладкая кубическая кривая формируется из n сегментов ($n-1$ стыковых точек), то указанный алгоритм будет содержать $n-1$ условий гладкости вида (24) и n уравнений вида (28).

Расчет двухсекционной C^2 -гладкой бикубической ленты. Даны координаты узловых точек A, B, C, D, M, N и уравнения поперечных направляющих AD, BC, MN (см. рис. 5). В угловых точках A, D, M, N заданы продольные градиенты $tg\alpha_A^x, tg\alpha_D^x, tg\alpha_M^x, tg\alpha_N^x$. В этих же точках заданы граничные условия «плоские углы». Требуется найти уравнения (5), (18) бикубических порций $ABCD, BMNC$, соединенных по шву BC с гладкостью C^2 .

Шаг 1. Используя алгоритм (26), (27), (28), находим уравнения кубических парабол AB и BM , соединенных в точке B с гладкостью C^2 . Аналогичным образом находим уравнения кубических парабол DC и CN , соединенных в точке C с гладкостью C^2 .

Шаг 2. Согласно (7), (8), вычисляем 14 коэффициентов уравнений (5), (18):

$$\begin{aligned} a_{00}, a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{01}, a_{02}, a_{03}, \\ b_{00}, b_{10}, b_{20}, b_{30}, b_{01}, b_{02}, b_{03}. \end{aligned}$$

Шаг 3. Составляем систему десяти линейно независимых уравнений вида (10), (11) относительно восемнадцати коэффициентов a_{ij}, b_{ij} :

$$\begin{aligned} a_{11}h_{1x} + a_{21}h_{1x}^2 + a_{31}h_{1x}^3 &= \beta_{BC} - \beta_{AD}, \\ a_{12}h_{1x} + a_{22}h_{1x}^2 + a_{32}h_{1x}^3 &= \gamma_{BC} - \gamma_{AD}, \\ a_{13}h_{1x} + a_{23}h_{1x}^2 + a_{33}h_{1x}^3 &= \delta_{BC} - \delta_{AD}, \\ a_{11}h_y + a_{12}h_y^2 + a_{13}h_y^3 &= \beta_{DC} - \beta_{AB}, \\ a_{21}h_y + a_{22}h_y^2 + a_{23}h_y^3 &= \gamma_{DC} - \gamma_{AB}, \\ b_{11}h_{2x} + b_{21}h_{2x}^2 + b_{31}h_{2x}^3 &= \beta_{MN} - \beta_{BC}, \\ b_{12}h_{2x} + b_{22}h_{2x}^2 + b_{32}h_{2x}^3 &= \gamma_{MN} - \gamma_{BC}, \\ b_{13}h_{2x} + b_{23}h_{2x}^2 + b_{33}h_{2x}^3 &= \delta_{MN} - \delta_{BC}, \\ b_{11}h_y + b_{12}h_y^2 + b_{13}h_y^3 &= \beta_{CN} - \beta_{BM}, \\ b_{21}h_y + b_{22}h_y^2 + b_{23}h_y^3 &= \gamma_{CN} - \gamma_{BM}. \end{aligned} \quad (29)$$

Шаг 4. Дифференцируя функции (5), (18), записываем граничные условия «плоские углы»:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_{ABCD}}{\partial x \partial y} \Big|_A &= a_{11} = 0, \\ \frac{\partial^2 F_{ABCD}}{\partial x \partial y} \Big|_D &= 2a_{12} + 3h_y a_{13} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_{BMNC}}{\partial x \partial y} \Big|_M &= b_{11} + 2h_{2x} b_{21} + 3h_{2x}^2 b_{31} = 0, \\ \frac{\partial^2 F_{BMNC}}{\partial x \partial y} \Big|_N &= 2b_{12} + 3h_y b_{13} + 4h_{2x} b_{22} + \\ &+ 6h_{2x} h_y b_{23} + 6h_{2x}^2 b_{32} + 9h_{2x}^2 h_y b_{33} = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Шаг 5. Записываем условия C^2 -гладкого соединения бикубических порций по шву BC (см. теорему 2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_{ABCD}}{\partial x \partial y} \Big|_B &= \frac{\partial^2 F_{BMNC}}{\partial x \partial y} \Big|_B \Rightarrow \\ \Rightarrow a_{11} + 2h_{1x} a_{21} + 3h_{1x}^2 a_{31} &= b_{11}, \\ \frac{\partial^2 F_{ABCD}}{\partial x \partial y} \Big|_C &= \frac{\partial^2 F_{BMNC}}{\partial x \partial y} \Big|_C \Rightarrow \\ \Rightarrow 2a_{12} + 3h_y a_{13} + 4h_{1x} a_{22} + 6h_{1x} h_y a_{23} + \\ &+ 6h_{1x}^2 a_{32} + 9h_{1x}^2 h_y a_{33} = 2b_{12} + 3h_y b_{13}, \\ \frac{\partial^4 F_{ABCD}}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_B &= \frac{\partial^4 F_{BMNC}}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_B \Rightarrow a_{22} + 3h_{1x} a_{32} = b_{22}, \\ \frac{\partial^4 F_{ABCD}}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_C &= \frac{\partial^4 F_{BMNC}}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_C \Rightarrow a_{23} + 3h_{1x} a_{33} = b_{23}. \end{aligned} \quad (31)$$

Получена система 18 линейных уравнений (29), (30), (31) относительно 18 неизвестных коэффициентов, входящих в (5), (18). Остальные 14 коэффициентов определены непосредственным расчетом (см. шаг 2). Исключая из (29), (30), (31) коэффициент $a_{11} = 0$, получаем систему 17 уравнений. Комплекс этих уравнений представляет собой вычислительный алгоритм, эквивалентный решению системы 32 линейных уравнений относительно 32 неизвестных коэффициентов, входящих в уравнения (5), (18).

Пример 3. Требуется повысить гладкость бикубической ленты, рассмотренной в примере 2 (рис. 5), до степени C^2 , сохранив поперечные направляющие

$$\begin{aligned} AD &= z_{AD}(y) = 2,5 + 1,7y - 0,09y^2 - 0,003y^3, \\ BC &= z_{BC}(y) = 5 - y + 0,255y^2 - 0,008y^3, \\ MN &= z_{MN}(y) = 2y - 0,015y^2 - 0,011y^3 \end{aligned}$$

и градиенты в угловых точках $tg\alpha_A^x = -0,4$; $tg\alpha_D^x = 1,7$; $tg\alpha_M^x = -0,6$; $tg\alpha_N^x = 1$.

Решение. Согласно (26), (27), (28), находим уравнения сегментов продольной границы ABM :

$$\begin{aligned} AB &= z_{AB}(x) = 2,5 - 0,4x + 0,1285x^2 - 0,00635x^3 \\ &x \in [0, 10], \\ BM &= z_{BM}(x) = 5 + 0,265(x - 10) - \\ &- 0,062(x - 10)^2 + 0,001474074(x - 10)^3, \\ &x \in [10, 25]. \end{aligned}$$

Кубические параболы AB и BM соединены в точке B с гладкостью C^2 . Аналогичным образом находим уравнения сегментов граничной кривой DCN , соединенные в точке C с гладкостью C^2 :

$$\begin{aligned} DC &= z_{DC}(x) = 7,5 + 1,7x - 0,144x^2 + 0,0024x^3, \\ &x \in [0, 10], \\ CN &= z_{CN}(x) = 12,5 - 0,46(x - 10) - \\ &- 0,072(x - 10)^2 + 0,00536296(x - 10)^3, \\ &x \in [10, 25]. \end{aligned}$$

Согласно (7), (8), вычисляем семь коэффициентов, входящих в уравнения (5) бикубической порции $ABCD$:

$$\begin{aligned} a_{00} &= \alpha_{AB} = 2,5; \quad a_{10} = \beta_{AB} = -0,4; \\ a_{20} &= \gamma_{AB} = 0,1285; \quad a_{30} = \delta_{AB} = -0,00635; \\ a_{01} &= \beta_{AD} = 1,7; \quad a_{02} = \gamma_{AD} = -0,09; \\ a_{03} &= \delta_{AD} = -0,003. \end{aligned}$$

Аналогично находим семь коэффициентов уравнения (18) бикубической порции $BMNC$:

$$\begin{aligned} b_{00} &= \alpha_{BM} = 5; \quad b_{10} = \beta_{BM} = 0,265; \\ b_{20} &= \gamma_{BM} = -0,062; \quad b_{30} = \delta_{BM} = 0,001474074; \\ b_{01} &= \beta_{BC} = -1; \quad b_{02} = \gamma_{BC} = 0,255; \\ b_{03} &= \delta_{BC} = -0,008. \end{aligned}$$

Подставляем в (29), (30), (31) значения коэффициентов β , γ , δ , а также $h_1x = 10$, $h_2x = 15$, $h_y = 10$. Решив полученную систему 18 уравнений относительно 18 неизвестных a_{ij} , b_{ij} находим:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0; \quad a_{12} = 0,063; \quad a_{13} = -0,0042; \\ a_{21} &= -0,0687; \quad a_{22} = -0,001425; \\ a_{23} &= 0,000557; \quad a_{31} = 0,00417; \\ a_{32} &= -0,0001425; \quad a_{33} = -0,0000187, \\ b_{11} &= -0,123; \quad b_{12} = -0,00825; \\ b_{13} &= 0,00133; \quad b_{21} = 0,0564; \quad b_{22} = -0,0057; \\ b_{23} &= -0,000004; \quad b_{31} = -0,002324; \\ b_{32} &= 0,000336; \quad b_{33} = -0,00000653. \end{aligned}$$

Определены все 32 коэффициента уравнений (5), (18) бикубических порций $ABCD$ и $BMNC$, соединенных с гладкостью C^2 . На рис. 6 представлена сетка образующих C^2 -гладкой бикубической ленты, построенная согласно (5) и (18).

Проверка. Положив в (1а) $x_0 = 0$, $y = 3$, получаем продольную образующую «левой» порции:

$$z_{ABCD}(x) = 6,709 + 0,0536x - 0,075386x^2 + 0,0043726x^3, \quad x \in [0, 10]. \quad (32)$$

Дифференцируя (32), при $x = 10$ находим: $dz/dx = -0,14234$, $d^2z/dx^2 = 0,111584$. Аналогичным образом, положив в (18) $x_1 = 10$, $y = 3$, получаем продольную образующую «правой» порции:

$$\begin{aligned} z_{BMNC}(x) &= 4,079 - 0,14234(x - 10) + \\ &+ 0,055792(x - 10)^2 - 0,00263965(x - 10)^3, \\ &x \in [10, 25]. \end{aligned} \quad (33)$$

Дифференцируя (33) и положив $x = 10$, получаем те же самые значения первой и второй производных. Следовательно, образующие (32) и (33) имеют общую касательную и одинаковую кривизну в точке их соединения на линии шва BC , что подтверждает C^2 -гладкость бикубической ленты.

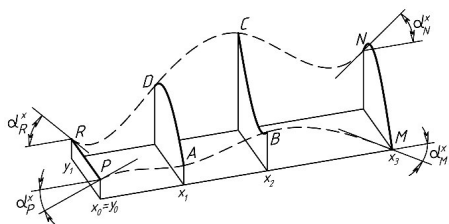


Рис. 7. Трехсекционная C^2 -гладкая бикубическая лента (к примеру 4)

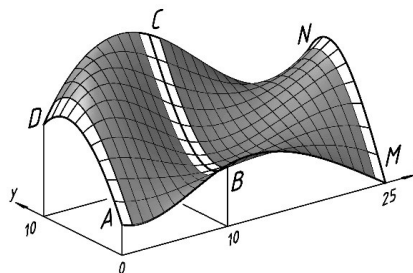


Рис. 6. C^2 -гладкая лента (к примеру 3)

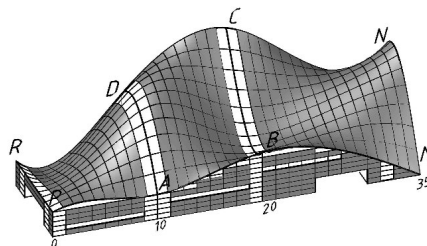
Обобщение на случай трех и более бикубических порций. Пусть требуется соединить n бикубических порций (с гладкостью C^2). Для решения задачи требуется рассчитать $16n$ коэффициентов, входящих в уравнения (1), (2), (3), ... соединяемых порций.

Решение. Находим уравнения продольных границ ленты, образованных составными C^2 -гладкими n -секционными кубическими кривыми, используя алгоритм (26) ... (28). Указанный алгоритм содержит $n-1$ условий гладкости вида (26).

Непосредственным вычислением по формулам вида (7), (8) находим $7n$ коэффициентов, входящих в (1), (2), (3), ..., после чего составляем систему $5n$ уравнений вида (29), содержащих остальные $9n$ коэффициентов. Дополняем эту систему уравнений четырьмя граничными условиями вида (30) (плоские углы) и $4(n-1)$ условиями гладкости вида (31). Получаем систему $9n$ линейных уравнений относительно $9n$ неизвестных коэффициентов. Совместно с ранее найденными $7n$ коэффициентами получаем $16n$ коэффициентов, входящих в искомые уравнения (1), (2), (3), ... соединяемых бикубических порций.

Пример 4. Перекрытие свободной формы (архитектурный проект). К двухсекционному перекрытию $ABCD + BMNC$, рассмотренному в примере 3, требуется присоединить входной портал $PADR$ с горизонтальной направляющей PR , расположенной на высоте $z = 2,5$ (рис. 7, слева). Уравнения направляющих AD , BC , MN и продольные градиенты $tga_M^x = -0,6$; $tga_N^x = 1$ в углах M , N представлены в примере 3. В угловых точках P , R портала заданы градиенты $tga_P^x = 0,4$; $tga_R^x = -1$. Требуется вычислить 48 коэффициентов уравнений (1), (2), (3) сегментов $PADR + ABCD + BMNC$ трехсекционной C^2 -гладкой бикубической ленты, принимая граничные условия «плоские углы P , R , M , N ».

Решение. Выполняем расчет C^2 -гладких продольных границ $PABM$ и $RDCN$, используя условия гладкости вида (26) и условия (27) (закрепленные концы). Найдя уравнения продольных границ, непосредственным вычислением по формулам вида (7), (8) находим 21 коэффициент уравнений (1), (2), (3). Остальные 26 коэффициентов (с учетом $a_{11} = 0$)



определяются из системы 26 линейных уравнений вида (29), (30), (31). На рис. 7 справа представлен общий вид сооружения с перекрытием свободной формы.

Заключение. Актуальность. Задача моделирования ленточных поверхностей возникает в современной архитектуре при проектировании сооружений, обладающих большой пространственной свободой формообразования. В частности, поиски новых нелинейных форм привели к появлению «тентовой архитектуры» [8] и «архитектуры складок» [9], использующих перекрытия со сложными криволинейными очертаниями. Если конструируемая поверхность не имеет больших градиентов относительно некоторой базовой плоскости xy , то для ее моделирования могут быть эффективно использованы бикубические полиномы от скалярных величин x , y [10].

Научная новизна

1. Уравнение бикубической порции содержит 16 неизвестных коэффициентов, для определения которых требуется решить систему 16 линейных уравнений, задающих граничные условия. Предлагается алгоритм, согласно которому решение системы 16 уравнений сводится к решению системы четырех линейных уравнений.

2. Составлены вычислительные алгоритмы формирования гладкой (с гладкостью C^1 , C^2) бикубической ленты, отличающиеся использованием уравнений продольных границ и поперечных направляющих в качестве граничных условий, что позволяет почти вдвое уменьшить размер характеристической матрицы системы линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов, входящих в уравнения бикубических порций.

Программное обеспечение. Матричные вычисления (решение систем линейных алгебраических уравнений) выполнены с помощью свободно распространяемой программы SMath Studio. Расчет образующих бикубической ленты и ее визуализация выполнены с применением языка программирования AutoLISP в среде AutoCAD.

Библиографический список

1. Jarke J. V. Bicubic patches for approximating non-rectangular control-point meshes // *Computer Aided Geometric Design*. 1986. Vol. 3, № 1. P. 456–459. DOI: 10.1016/0167-8396(86)90021-X.
2. Levner G., Tassinari P., Marini D. A simple general methods for ray tracing bicubic surfaces // *Theoretical Foundations of Computer Graphics and CAD*. New York: Springer-Verlag, 1988. P. 805–820.

3. Gallier J. *Curves and Surfaces in Geometric Modeling: Theory and Algorithms*. University of Pennsylvania. Philadelphia, PA, USA. 2018. P. 61–114.

4. Шикин Е. В., Плис А. И. Кривые и поверхности на экране компьютера. Руководство по сплайнам для пользователей. Москва: Диалог-МИФИ, 1996. 240 с.

5. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование. Москва: ДМК-Пресс, 2020. 406 с.

6. Короткий В. А. Незакономерные кривые в инженерной геометрии и компьютерной графике // *Научная визуализация*. 2022. Т. 14, № 1. С. 1–17. DOI: 10.26583/sv.14.1.01.

7. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. Москва: Мир, 1982. 304 с.

8. Удлер Е. М., Тостов Е. Проектирование тентовых оболочек // *CADmaster*. 2001. № 1 (6). С. 43–47.

9. Киричков И. В. Преломление категории складки сквозь призму архитектуры // *Архитектура и дизайн*. 2018. № 3. С. 1–11. DOI: 10.7256/2585-7789.2018.3.29422.

10. Готовцев А. А. Autodesk alias: с чего начать? // *CADmaster*. 2012. № 5 (66). С. 42–44.

КОРОТКИЙ Виктор Анатольевич, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры «Инженерная и компьютерная графика» Южно-Уральского государственного университета (национального исследовательского университета), г. Челябинск.

SPIN-код: 7576-1921

AuthorID (РИНЦ): 777039

AuthorID (SCOPUS): 57170871600

ResearcherID: ABF-6205-2020

ORCID: 0000-0002-5266-4701

Адрес для переписки: korotkiiva@susu.ru

УСМАНОВА Екатерина Александровна, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры «Инженерная и компьютерная графика» Южно-Уральского государственного университета (национального исследовательского университета), г. Челябинск.

SPIN-код: 3351-0017

AuthorID (РИНЦ): 777188

AuthorID (SCOPUS): 55346094500

ResearcherID: AAL-1653-2021

Адрес для переписки: usmanovaea@susu.ru

Для цитирования

Короткий В. А., Усманова Е. А. Бикубическая ленточная поверхность // *Омский научный вестник*. 2023. № 2 (186). С. 19–27. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-186-19-27.

Статья поступила в редакцию 19.01.2023 г.

© В. А. Короткий, Е. А. Усманова

BICUBIC RIBBON SURFACE

A bicubic ribbon is a surface of constant width extended along the Ox -axis and formed by a set of rectangular bicubic portions connected to each other with smoothness C^1 (continuity of gradient between portions) or C^2 (continuity of curvature). Each portion is limited by cubic parabolas lying in vertical planes $x=\text{const}$, $y=\text{const}$. The article presents algorithms for calculating a bicubic band based on the use of boundary curve equations as the main boundary conditions. The «flat corners» conditions are accepted as additional boundary conditions. The proposed approach makes it possible to reduce the size of the characteristic matrix of a system of linear equations with respect to the coefficients included in the equations of bicubic portions. For example, the calculation of 16 coefficients of the equation of a bicubic portion passing through fixed boundary curves reduces to solving a system of four linear equations. Criteria for smooth joining of bicubic portions are formulated (in the form of theorems). Theorem 1 formulates and proves the continuity conditions for the gradient. Theorem 2 contains conditions for the continuity of curvature. Examples of calculation and visualization of C^1 and C^2 -smooth ribbon surfaces, consisting of two or three bicubic portions, are presented.

Keywords: bicubic portion, cubic parabola, smoothness conditions, gradient, flat corners, pinched ends.

References

1. Jarke J. V. Bicubic patches for approximating non-rectangular control-point meshes // *Computer Aided Geometric Design*. 1986. Vol. 3, no. 1. P. 456–459. DOI: 10.1016/0167-8396(86)90021-X. (In Engl.).
2. Levner G., Tassinari P., Marini D. A simple general methods for ray tracing bicubic surfaces // *Theoretical Foundations of Computer Graphics and CAD*. New York: Springer-Verlag, 1988. P. 805–820. (In Engl.).
3. Gallier J. *Curves and Surfaces in Geometric Modeling: Theory and Algorithms*. University of Pennsylvania. Philadelphia, PA, USA. 2018. P. 61–114. (In Engl.).
4. Shikin E. V., Plis A. I. *Krivyye i poverkhnosti na ekrane komp'yutera. Rukovodstvo po splaynam dlya pol'zovatelye [Curves and surfaces on a computer screen. A guide to splines for users]*. Moscow, 1996. 240 p. (In Russ.).
5. Golovanov N. N. *Geometricheskoye modelirovaniye [Geometric modelling]*. Moscow, 2020. 406 p. (In Russ.).
6. Korotkiy V. A. *Nezakonomernyye krivyye v inzhenernoy geometrii i komp'yuternoy grafike [Irregular Curves in Engineering Geometry and Computer Graphics]* // *Nauchnaya vizualizatsiya. Scientific Visualization*. 2022. Vol. 14, no. 1. P. 1–17. DOI: 10.26583/sv.14.1.01. (In Russ.).
7. Foks A., Pratt M. *Vychislitel'naya geometriya. Primeneniye v proyektirovani i na proizvodstve [Computational geometry. Applications in design and production]*. Moscow, 1982. 304 p. (In Russ.).
8. Udler E. M., Tostov E. *Proyektirovaniye tentovykh obolochek [Designing awning covers]* // *CADmaster. CADmaster*. 2001. No. 1 (6). P. 43–47. (In Russ.).
9. Kirichkov I. V. *Prelomleniye kategorii skladki skvoz' prizmu arkitektury [Reflecting the category of the fold through the prism of architecture]* // *Arkhitectura i dizayn. Architecture and Design*. 2018. No. 3. P. 1–11. DOI: 10.7256/2585-7789.2018.3.29422. (In Russ.).
10. Gotovtsev A. A. *Autodesk alias: s chego nachat'? [Autodesk alias: Where do I start?]* // *CADmaster. CADmaster*. 2012. No. 5 (66). P. 42–44. (In Russ.).

KOROTKIY Viktor Anatolyevich, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of Engineering and Computer Graphics Department, South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk. SPIN-code: 7576-1921
AuthorID (RSCI): 777039
AuthorID (SCOPUS): 57170871600
ResearcherID: ABF-6205-2020
ORCID: 0000-0002-5266-4701
Correspondence address: korotkiiva@susu.ru

USMANOVA Ekaterina Aleksandrovna, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Engineering and Computer Graphics Department, South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk. SPIN-code: 3351-0017
AuthorID (RSCI): 777188
AuthorID (SCOPUS): 55346094500
ResearcherID: AAL-1653-2021
Correspondence address: usmanovaea@susu.ru

For citations

Korotkiy V. A., Usmanova E. A. Bicubic ribbon surface // *Omsk Scientific Bulletin*. 2023. No. 2 (186). P. 19–27. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-186-19-27.

Received January 19, 2023.

© V. A. Korotkiy, E. A. Usmanova