

## ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА ДВИГАТЕЛЯ ЯМЗ-5340

Цель исследования заключается в поиске методики и проведении на её основе гармонического анализа крутящего момента двигателя внутреннего сгорания для последующего определения резонансных колебаний коленчатого вала. Приведена методика расчета гармоник крутящего момента двигателя на примере дизельного двигателя ЯМЗ-5340 мощностью 100 кВт при частоте вращения коленчатого вала 2300 мин<sup>-1</sup>. На основе результатов теплового и динамического расчета двигателя ЯМЗ-5340 построен график изменения его крутящего момента и произведен расчет гармоник первого и второго порядков. Определены частоты собственных и вынужденных колебаний коленчатого вала и его резонирующая критическая частота вращения. Определён номер гармоники крутящего момента, которая по частоте вынужденных колебаний совпадет с частотой собственных колебаний и вызывает резонанс. Результаты исследования могут быть применены при проектировании и доводке двигателей с целью расчёта и снижения крутильных колебаний.

**Ключевые слова:** двигатель внутреннего сгорания, крутящий момент, крутильные колебания, гармоника, частота и амплитуда, резонанс.

**Введение.** Крутильные колебания вала, «возникающие по причине его недостаточной жесткости под действием переменных по величине и направлению крутящих моментов двигателя, могут приводить к возникновению вибраций и стуков, которые впоследствии могут стать причиной разрушения коренной шейки коленчатого вала» [1, 2]. В связи с этим вопросы, связанные с изучением колебательных процессов, с целью устранения и предотвращения возможных проблем в работе двигателя не перестают быть актуальными и находят широкий отклик в технической научной литературе.

С. З. Юнусов (с соавт.) рассматривает «динамический анализ системы из трех масс с учетом технологического сопротивления», на основе результатов которого приводит «графические зависимости размаха колебаний угловой скорости рабочего вала, неравномерности вращения валов привода, крутящего момента на валу электродвигателя» [3, с. 227].

В работе А. И. Яманина рассмотрены вопросы, связанные с динамическим расчетом напряженно-деформированного состояния коленчатого вала. Предложенная автором методика расчёта «позволяет одновременно определить мгновенные значения напряжений, обусловленных набегающими крутящими моментами, и дополнительных напряжений, вызываемых крутильными, продольными и изгибными колебаниями» [4, с. 55].

А. А. Реутовым на основе результатов анализа влияния «упруго-демпфирующих характеристик двухмассового маховика двигателей внутреннего сгорания (ДВС) на крутильные колебания деталей трансмиссии автомобиля» разработана математическая и компьютерная модели «крутильных колебаний автомобильной трансмиссии с двухмассовым

маховиком и двойным сухим сцеплением», а также определены условия «предотвращения резонанса крутильных колебаний маховика на холостых оборотах» [5, с. 14].

Aleksandar Milasinovic на основе предложенной им с соавт. модели сосредоточенной массы, построенной на основе зависимости колебаний угловой скорости коленчатого вала от давления в цилиндре, трения двигателя и динамики коленчатого вала, представлена взаимосвязь между изменением крутящего момента двигателя и колебаниями угловой скорости коленчатого вала при установившемся режиме работы [6].

Zhong Cai Zheng (с соавт.) проводит анализ гармонического отклика блока цилиндров двигателя на основе модального анализа, получая соответствующие собственные частоты слабых положений блока под действием внешней циклической силы [7].

Zhang Bo (с соавт.), используя многодисковый вал ротора, поддерживаемый двумя плёночными демпферами сжатия (SFD) с короткозамкнутыми роторами, в качестве объекта исследования для моделирования газогенератора в двигателе, производит расчёт характеристик роторной системы с помощью многомерного гармонического баланса в сочетании с методом переменного частотно-временного интервала (MHB-AFT), с учётом влияния гармонических вращений базы и дисбаланса массы на устойчивость системы [8].

Raja Sangilivadamalu (с соавт.) представляют новый метод оценки непериодического (среднего) значения и гармоник неизвестных входных сигналов помех с параметрически изменяющимися частотами гармоник. Предлагаемые методы, по мнению авторов, должны быть изучены для оценки среднего

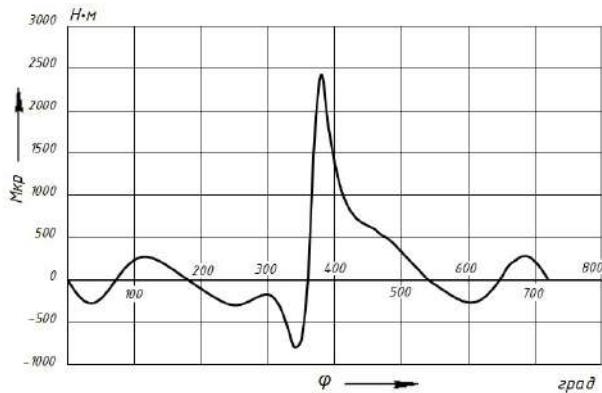


Рис. 1. Изменение крутящего момента дизеля ЯМЗ-5340 за цикл в зависимости от угла поворота коленчатого вала

значения и гармоник крутящего момента двигателя внутреннего сгорания [9].

Kwak S. W. (с соавт.) предлагают метод кинематического концептуального проектирования для определения кинематической структуры возможного рядного четырехцилиндрового двигателя с переменной степенью сжатия (VCR) и его размеров, которые обеспечивали бы меньшее вертикальное ускорение второй гармоники на стыках [10].

Коленчатые валы двигателей внутреннего сгорания воспринимают нагрузки от давления газов, которые возникают от сгорания топлива в цилиндрах и сил инерции. Действие этих сил и моментов от этих сил приводят к возникновению предельных по величине напряжений скручивания коренных шеек.

Крутильные колебания коренных шеек коленчатого вала происходят по следующим причинам:

1. Под действием переменного по величине крутящего момента двигателя (Н·м) коренная шейка коленчатого вала закрутится на угол (например, 0,05 градуса).

2. Под влиянием момента сил упругости материала, например, стали 40Х, закрученная шейка повернется в начальное положение.

3. Под действием момента сил инерции вал закрутится в противоположную сторону на тот же угол.

Целью данной работы является выполнение гармонического анализа крутящего момента двигателя Ярославского моторного завода марки ЯМЗ-5340; определение частот собственных и вынужденных колебаний коленчатого вала и его резонансной критической частоты вращения.

**1. Гармонический анализ крутящего момента двигателя.** Сложный периодически изменяющийся процесс крутящего момента  $M$  четырехтактного двигателя можно разложить на гармоники 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4 порядков и так далее. Разложение крутящего момента на гармоники необходимо для расчета коленчатых валов на крутильные колебания.

На рис. 1 показана зависимость крутящего момента дизеля Ярославского моторного завода ЯМЗ-5340 (4ЧН 10,5/12,8) за цикл (720°) от угла поворота коленчатого вала. Мощность дизеля 100 кВт при частоте вращения коленчатого вала 2300 мин<sup>-1</sup>. График построен с применением ПЭВМ по результатам теплового и динамического расчетов двигателя [11, 12].

Таблица 1

Определение положения угла  $a_k$ 

Знак $A_k$	Знак $B_k$	Четвёртая часть окружности, соответствующая углу $a_k$
+	+	I (0 – 90°)
+	-	II (90 – 180°)
-	-	III (180 – 270°)
-	+	IV (270 – 360°)

Разложение в ряд Фурье, или гармонический анализ крутящего момента, «производится на основе теоремы Фурье, согласно которой всякую периодическую функцию, удовлетворяющую условиям Дирихле, можно представить в виде сходящегося бесконечного ряда синусоидальных величин» [1, с. 232].

Применяя для четырехтактного двигателя теорему Фурье, имеем [1, 2]

$$\begin{aligned} M = f(\omega_b \cdot t) = M_0 + M_1 \cdot \sin(\omega_b \cdot t + \alpha_1) + \\ + M_2 \cdot \sin(2\omega_b \cdot t + \alpha_2) + \\ + M_3 \cdot \sin(3\omega_b \cdot t + \alpha_3) + \dots = \\ = M_0 + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \cdot \sin(k\omega_b \cdot t + \alpha_k), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $M$  — переменный крутящий момент, действующий на одно колено вала;  $M_0$  — средний крутящий момент, действующий на то же колено вала;  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_k$  — амплитуды составляющих гармонически изменяющихся моментов (углы закручивания вала);  $\omega_b = 2\pi/T$  — цикловая угловая скорость, зависящая от периода изменения крутящего момента (для четырехтактного двигателя  $\omega_b = \omega/2 = \pi \cdot n/60$ );  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — начальные фазы гармонически изменяющихся моментов;  $t$  — время отсчета.

Четвертую часть **окружности**, в которой находится угол  $a_k$  (угол сдвига гармоники известного порядка или её начальная фаза), определим с помощью табл. 1.

Тригонометрическое разложение, представленное формулой (1), путем математических преобразований, полученных после применения формулы  $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ , может быть приведено к виду [1, с. 233]

$$\begin{aligned} M = f(\omega_b \cdot t) = M_0 + B_1 \cdot \sin(\omega_b \cdot t) + \\ + B_2 \cdot \sin(2\omega_b \cdot t) + B_3 \cdot \sin(3\omega_b \cdot t) + \dots + \\ + A_1 \cdot \cos(\omega_b \cdot t) + A_2 \cdot \cos(2\omega_b \cdot t) + \\ + A_3 \cdot \cos(3\omega_b \cdot t) + \dots = \\ = M_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \sin(k\omega_b t) + A_k \cos(k\omega_b t)), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $M_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$  — амплитуды составляющих гармонически изменяющихся моментов;  $A_k, B_k$  — коэффициенты Фурье, которые могут быть найдены методом конечного суммирования [1, с. 233, 241, 246].

**2. Расчет гармоник крутящего момента.** Рассмотрим более подробно арифметический метод гармонического анализа кривой крутящего момента, действующего на одно колено вала. При использовании данного метода гармонический анализ данной кривой производится расчетным путем, при этом вычисление коэффициентов Фурье  $A_k, B_k, M_0$ ,

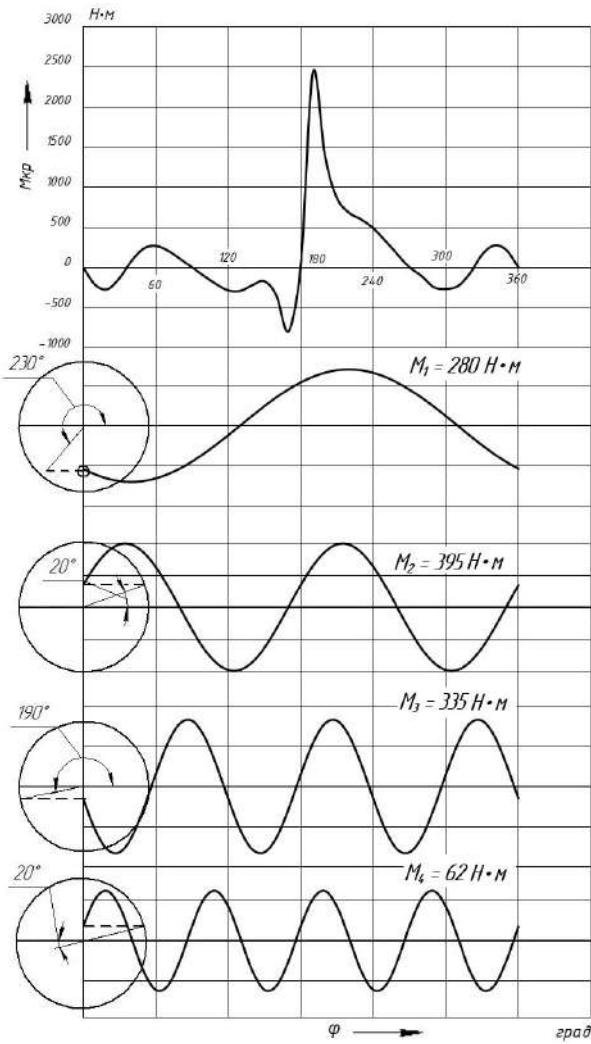


Рис. 2. Гармонический анализ крутящего момента дизеля ЯМЗ-5340 при частоте вращения коленчатого вала 2300 мин<sup>-1</sup>

как было сказано выше, производится с помощью конечного суммирования следующим образом.

Для начала расчета и анализа крутильных колебаний необходим график изменения крутящего момента  $M_{kp}$  двигателя, который показан на рис. 1. На рис. 2 график крутящего момента сжат до 360 градусов ( $2\pi$ ) при сохранении числовых значений  $M_{kp}$ . Гармонические колебания происходят по закону синуса, а функция синуса определяется от 0 до 360°.

Разобьём отрезок  $[0, 2\pi]$  на  $m$  равных частей длиной  $\frac{2\pi}{m}$  (рис. 2). В нашем примере  $m = 36$ . Обозначим координаты точек кривой крутящего момента, изображенной на рис. 2, через  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_\lambda, y_\lambda), \dots (x_m, y_m)$ , ..., где  $x_0, x_1 = \frac{2\pi}{m}, x_2 = 2 \cdot \frac{2\pi}{m}, \dots, x_\lambda = \lambda \cdot \frac{2\pi}{m}, \dots, x_m = m \cdot \frac{2\pi}{m} = 2\pi$ ,  $y_\lambda$  — ординаты точек заданной кривой крутящего момента, соответствующие абсциссам  $x_\lambda$ , найденные путем непосредственного измерения по графику кривой (рис. 2),  $\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots, m$ .

Введем также следующие обозначения:  $x = \omega t$ ,  $y = f(\omega t)$ ,  $\Delta x = \Delta(\omega t) = 2\pi/m$  и вычислим для каждого значения  $x$  и для каждого порядка гармоники  $k$  произведения вида:  $y_\lambda \sin(k \cdot x_\lambda)$  и  $y_\lambda \cos(k \cdot x_\lambda)$ . Проделав для каждого порядка гармоники, произведения, полученные для всех точек  $x$ , умножим

их на величину  $\Delta x = 2\pi/m$ , получим формулы для вычисления коэффициентов Фурье  $A_k$ ,  $B_k$  и среднего крутящего момента  $M_0$  [1].

$$A_k = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{\lambda=1}^m f(\omega t) \frac{2\pi}{m} \cos(k \cdot \omega t) = \\ = \frac{2}{m} \cdot \sum_{\lambda=1}^m y_\lambda \cos(k \cdot x_\lambda); \quad (3)$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{\lambda=1}^m f(\omega t) \frac{2\pi}{m} \sin(k \cdot \omega t) = \\ = \frac{2}{m} \cdot \sum_{\lambda=1}^m y_\lambda \sin(k \cdot x_\lambda); \quad (4)$$

$$M_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\lambda=1}^m f(\omega t) \frac{2\pi}{m} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{\lambda=1}^m y_\lambda, \quad (5)$$

где  $m$  — количество разбиений (участков) отрезка оси абсцисс, соответствующего периоду изменения крутящего момента.

Амплитуды составляющих гармонически изменяющихся моментов ( $M_k$ ), как было указано выше, вычисляются по формуле

$$M_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}. \quad (6)$$

В развернутом виде формулы (3–5) примут вид

$$A_k = \frac{2}{m} \left( y_1 \cos(k \cdot 1 \cdot \Delta x) + y_2 \cos(k \cdot 2 \cdot \Delta x) + \dots + y_m \cos(k \cdot m \cdot \Delta x) \right)$$

или

$$A_k = \frac{2}{m} \sum_{\lambda=1}^m y_\lambda \cos(k \cdot \lambda \cdot \Delta x). \quad (7)$$

$$B_k = \frac{2}{m} \left( y_1 \sin(k \cdot 1 \cdot \Delta x) + y_2 \sin(k \cdot 2 \cdot \Delta x) + \dots + y_m \sin(k \cdot m \cdot \Delta x) \right)$$

или

$$B_k = \frac{2}{m} \sum_{\lambda=1}^m y_\lambda \sin(k \cdot \lambda \cdot \Delta x). \quad (8)$$

$$M_0 = \frac{1}{m} (y_1 + y_2 + \dots + y_m) = \\ = \frac{1}{m} \sum_{\lambda=0}^m y_\lambda. \quad (9)$$

Результаты расчетов, соответствующие данным, полученным на основе теплового и динамического расчета крутящего момента дизеля 4ЧН 10,5/12,8 (ЯМЗ-5340) мощностью 100 кВт, а также результаты вычисления коэффициентов, входящих в формулы (7–9), для  $\Delta x = \frac{2\pi}{m} = \frac{2\pi}{36} = 10^\circ$ , приведены в табл. 2.

На рис. 2 представлены результаты гармонического анализа крутящего момента. Показаны графики кривых гармоник 1, 2, 3 и 4 порядков с указанием начальных фаз в градусах.

Подставив данные табл. 2 в расчётные формулы (3–9), вычислим средний крутящий момент  $M_0$  и выполним расчёт гармоник первого и второго порядков.

## Вспомогательная таблица для расчёта коэффициентов Фурье

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N <sub>0</sub> ( $\lambda$ )	x <sub><math>\lambda</math></sub>	y <sub><math>\lambda</math></sub>	cos x <sub><math>\lambda</math></sub>	y <sub><math>\lambda</math></sub> cos x <sub><math>\lambda</math></sub>	sin x <sub><math>\lambda</math></sub>	y <sub><math>\lambda</math></sub> sin x <sub><math>\lambda</math></sub>	cos (2x <sub><math>\lambda</math></sub> )	y <sub><math>\lambda</math></sub> cos (2x <sub><math>\lambda</math></sub> )	sin (2x <sub><math>\lambda</math></sub> )	y <sub><math>\lambda</math></sub> sin (2x <sub><math>\lambda</math></sub> )
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
2	10	-219	0,984808	-215,673	0,173648	-38,029	0,939693	-205,793	0,34202	-74,9024
3	20	-275	0,939693	-258,415	0,34202	-94,0555	0,766044	-210,662	0,642788	-176,767
4	30	-138	0,866025	-119,512	0,5	-69	0,5	-69	0,866025	-119,512
5	40	76	0,766044	58,21938	0,642788	48,85186	0,173648	13,19726	0,984808	74,84539
6	50	232	0,642788	149,1267	0,766044	177,7223	-0,17365	-40,2864	0,984808	228,4754
7	60	268	0,5	134	0,866025	232,0948	-0,5	-134	0,866025	232,0948
8	70	209	0,34202	71,48221	0,939693	196,3958	-0,76604	-160,103	0,642788	134,3426
9	80	108	0,173648	18,754	0,984808	106,3592	-0,93969	-101,487	0,34202	36,93818
10	90	0	6,13E-17	0	1	0	-1	0	1,23E-16	0
11	100	-108	-0,17365	18,754	0,984808	-106,359	-0,93969	101,4868	-0,34202	36,93818
12	110	-209	-0,34202	71,48221	0,939693	-196,396	-0,76604	160,1033	-0,64279	134,3426
13	120	-289	-0,5	144,5	0,866025	-250,281	-0,5	144,5	-0,86603	250,2813
14	130	-295	-0,64279	189,6223	0,766044	-225,983	-0,17365	51,22621	-0,98481	290,5183
15	140	-224	-0,76604	171,594	0,642788	-143,984	0,173648	-38,8972	-0,98481	220,5969
16	150	-174	-0,86603	150,6884	0,5	-87	0,5	-87	-0,86603	150,6884
17	160	-353	-0,93969	331,7115	0,34202	-120,733	0,766044	-270,414	-0,64279	226,904
18	170	-802	-0,98481	789,8158	0,173648	-139,266	0,939693	-753,633	-0,34202	274,3002
19	180	0	-1	0	1,23E-16	0	1	0	-2,5E-16	0
20	190	2421	-0,98481	-2384,22	-0,17365	-420,402	0,939693	2274,996	0,34202	828,0308
21	200	1391	-0,93969	-1307,11	-0,34202	-475,75	0,766044	1065,568	0,642788	894,1176
22	210	865	-0,86603	-749,112	-0,5	-432,5	0,5	432,5	0,866025	749,112
23	220	679	-0,76604	-520,144	-0,64279	-436,453	0,173648	117,9071	0,984808	668,6845
24	230	596	-0,64279	-383,101	-0,76604	-456,562	-0,17365	-103,494	0,984808	586,9454
25	240	485	-0,5	-242,5	-0,86603	-420,022	-0,5	-242,5	0,866025	420,0223
26										
27	250	329	-0,34202	-112,525	-0,93969	-309,159	-0,76604	-252,029	0,642788	211,4771
28	260	163	-0,17365	-28,3047	-0,98481	-160,524	-0,93969	-153,17	0,34202	55,74928
29	270	0	-1,8E-16	0	-1	0	-1	0	3,68E-16	0
30	280	-109	0,173648	-18,9277	-0,98481	107,344	-0,93969	102,4265	-0,34202	37,2802
31	290	-248	0,34202	-84,821	-0,93969	233,0438	-0,76604	189,979	-0,64279	159,4113
32	300	-270	0,5	-135	-0,86603	233,8269	-0,5	135	-0,86603	233,8269
33	310	-235	0,642788	-151,055	-0,76604	180,0204	-0,17365	40,80732	-0,98481	231,4298
34	320	-80	0,766044	-61,2836	-0,64279	51,42301	0,173648	-13,8919	-0,98481	78,78462
35	330	157	0,866025	135,966	-0,5	-78,5	0,5	78,5	-0,86603	-135,966
36	340	273	0,939693	256,5361	-0,34202	-93,3715	0,766044	209,1301	-0,64279	-175,481
37	350	217	0,984808	213,7033	-0,17365	-37,6817	0,939693	203,9133	-0,34202	-74,2184
38	360	0	1	0	-2,5E-16	0	1	0	-4,9E-16	0
Сумма		4441		-3865,75		-3224,93		2484,88		6689,29

$$M_0 = \frac{1}{m} (y_1 + y_2 + \dots + y_\lambda + \dots + y_m) = \\ = \frac{1}{36} \cdot 4441 \approx 123,36 (\text{Н} \cdot \text{м}).$$

## 2.1. Гармоника первого порядка

$$A_1 = \frac{2}{m} \left( y_1 \cos(1 \cdot 1 \cdot \Delta x) + \dots + y_\lambda \cos(1 \cdot \lambda \cdot \Delta x) + \dots + y_m \cos(1 \cdot m \cdot \Delta x) \right) = \\ = \frac{2}{m} \sum_{\lambda=1}^m y_\lambda \cos(1 \cdot \lambda \cdot \Delta x) = \\ = \frac{2}{36} \cdot (-3865,75) \approx -214,76$$

$$B_1 = \frac{2}{m} \left( y_1 \sin(1 \cdot 1 \cdot \Delta x) + \dots + y_\lambda \sin(1 \cdot \lambda \cdot \Delta x) + \dots + y_m \sin(1 \cdot m \cdot \Delta x) \right) = \\ = \frac{2}{m} \sum_{\lambda=1}^m y_\lambda \sin(1 \cdot \lambda \cdot \Delta x) = \\ = \frac{2}{36} \cdot (-3224,93) \approx -179,16 .$$

$$M_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \sqrt{(-214,76)^2 + (-179,16)^2} \approx$$

$\approx 279,68 (\text{Н} \cdot \text{м})$  — амплитуда,

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{A_1}{B_1} = \frac{-214,76}{-179,16} \approx 1,99 .$$

Так как угол  $\alpha_1$  находится в третьей четверти ( $A_1 < 0, B_1 < 0$ ), то  $\alpha_1 = 180^\circ + \operatorname{arctg} 1,99 = 180^\circ + 50,16^\circ = 230,16^\circ$  (табл. 1).

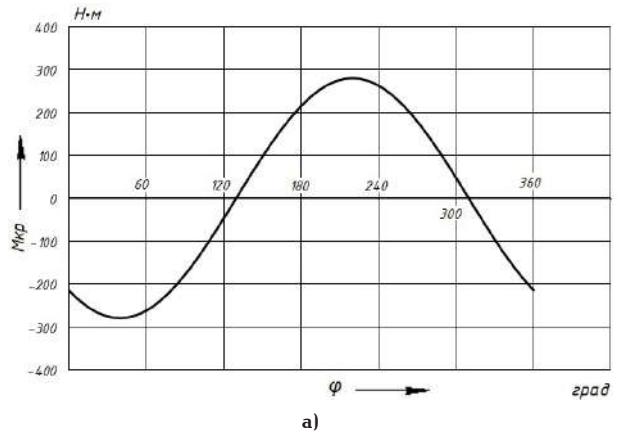
Уравнение кривой гармоники первого порядка (обозначим её  $M^{(1)}$ ) (рис. 3а), согласно расчётным данным и формуле (6), будет иметь вид

$$M^{(1)} = 279,68 \cdot \sin(x + 230,16^\circ) .$$

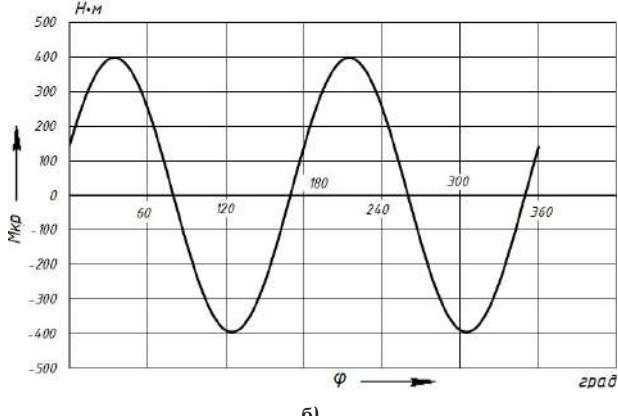
## 2.2. Гармоника второго порядка

$$A_2 = \frac{2}{m} \left( y_1 \cos(2 \cdot 1 \cdot \Delta x) + \dots + y_\lambda \cos(2 \cdot \lambda \cdot \Delta x) + \dots + y_m \cos(2 \cdot m \cdot \Delta x) \right) = \\ = \frac{2}{m} \sum_{\lambda=1}^m y_\lambda \cos(2 \cdot \lambda \cdot \Delta x) = \\ = \frac{2}{36} \cdot 2484,88 \approx 138,05 .$$

$$B_2 = \frac{2}{m} \left( y_1 \sin(2 \cdot 1 \cdot \Delta x) + \dots + y_\lambda \sin(2 \cdot \lambda \cdot \Delta x) + \dots + y_m \sin(2 \cdot m \cdot \Delta x) \right) = \\ = \frac{2}{m} \sum_{\lambda=1}^m y_\lambda \sin(2 \cdot \lambda \cdot \Delta x) = \\ = \frac{2}{36} \cdot 6689,292 \approx 371,63 .$$



а)



б)

Рис. 3. Гармоники первого (а) и второго (б) порядков крутящего момента одного цилиндра дизеля ЯМЗ-5340

$$M_2 = \sqrt{A_2^2 + B_2^2} = \\ = \sqrt{138,05^2 + 371,63^2} \approx 396,64 (\text{Н} \cdot \text{м})$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{A_2}{B_2} = \frac{138,05}{371,63} \approx 0,37 .$$

Так как угол  $\alpha_2$  находится в первой четверти ( $A_2 < 0, B_2 < 0$ ), то  $\alpha_2 = \operatorname{arctg} 0,37 = 20,37^\circ$ .

Уравнение кривой гармоники второго порядка ( $M^{(2)}$ ) (рис. 3б), согласно расчётным данным и формуле (6), будет иметь вид

$$M^{(2)} = 396,64 \cdot \sin(2x + 20,37^\circ) .$$

Действуя аналогично, можно произвести расчёт гармоник 3, 4 и т.д. порядков. Графики соответствующих кривых представлены на рис. 2. Приближенное уравнение кривой заданного момента по двум рассчитанным гармоникам можно представить в виде

$$M \approx M_0 + M^{(1)} + M^{(2)} = \\ = M_0 + \sum_{k=1}^2 M_k \cdot \sin(k\omega_B \cdot t + \alpha_k) = \\ = 123,36 + 279,68 \cdot \sin(x + 230,16^\circ) + \\ + 396,64 \cdot \sin(2x + 20,37^\circ) .$$

В полученном уравнении гармоники первого и второго порядков являются математическими. Порядок таких гармоник определяется как отношение

периода рабочего процесса двигателя к периоду соответствующей гармоники. Порядок математических гармоник одинаков как для двухтактных, так и для четырехтактных двигателей.

Заменив абсциссы  $x_\lambda$  через углы поворота коленчатого вала  $\omega t$ , получим моторные гармоники (см. формулу (6))

$$M \approx 123,36 + 279,68 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\omega t + 230,16^\circ\right) + 396,44 \cdot \sin(\omega t + 20,37^\circ).$$

Следует отметить, что «для четырехтактных двигателей порядки моторных гармоник: 1/2; 1; 1,5; 2; ...;  $k/2$ -й и математических: 1; 2; 3; ...;  $k$ -ой гармоник не совпадают, но они совпадают для двухтактных двигателей, так как в этих двигателях рабочий процесс совершается за 1 оборот коленчатого вала и  $\omega_B = \omega$ , тогда как для 4-тактных двигателей  $\omega_B = \frac{\omega}{2}$ » [1, с. 234 – 235].

**3. Определение номера резонирующей гармоники крутящего момента.** Определение номера **резонирующей гармоники** крутящего момента является основной задачей при расчете коленчатого вала на крутильные колебания. Если частота вынужденных колебаний данной опасной гармоники за один оборот, с учетом резонансного числа оборотов коленчатого вала в минуту, **совпадет** с частотой собственных колебаний вала в минуту, то произойдет **резонанс**, при котором амплитуда (угол закручивания) достигнет предельного значения и коренная шейка вала под действием высокого напряжения среза может разрушиться [13 – 15].

Полный расчет коленчатого вала дизеля ЯМЗ-5340 (4ЧН 10,5/12,8) на крутильные колебания был выполнен по методике, изложенной в работах [1, 2]. В данной статье важным является определение номера резонирующей гармоники, которая может вызвать резонанс при изменении частоты вращения коленчатого вала от 600 до 2300  $\text{мин}^{-1}$ . Диаметр приведенного вала был принят равным 70 мм, масса поршня 1,3 кг, масса шатуна 2,5 кг, момент инерции маховика 0,78  $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ .

На жесткость приведенного вала ( $C_{np}$ ) влияют модуль упругости материала ( $G_{ynp}$ ), длина приведенного вала ( $L_{np}$ ) и диаметр вала ( $d_B$ ). Жесткость вала определяем по формуле [2]:

$$C_{np} = G_{ynp} \cdot J_{\text{пол}} / L_{np} = 8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 - 0,07^4 / (32 \cdot 0,2) = 942 \, 000 \, \text{Н}\cdot\text{м}, \quad (10)$$

где  $G_{ynp} = 8 \cdot 10^{10} \, \text{Н}/\text{м}^2$  — модуль упругости при кручении для стали 45Х;  $J_{\text{пол}} = p \cdot d_B^4 / 32$  — полярный момент инерции сечения вала,  $\text{м}^4$  ( $d_B$  — внешний диаметр приведенной шейки вала 0,07 м);  $L_{np}$  — приведенная длина вала, 0,2 м.

Жесткость вала представляет собой крутящий момент ( $\text{Н}\cdot\text{м}$ ), который необходимо приложить к валу, чтобы закрутить его на  $1^\circ$ .

Частоту собственных круговых колебаний, приведенных к одноузловой системе с двумя массами, определим из выражения

$$\omega_{C1} = \sqrt{\frac{C_{np}(J_{\text{МАХ}} + J_{np})}{J_{\text{МАХ}} \cdot J_{np}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{942000 \cdot (0,78 + 0,1)}{0,78 \cdot 0,1}} = 3260 \, \text{1/c}, \quad (11)$$

где  $J_{\text{МАХ}}$  — момент инерции маховика, 0,78  $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $J_{np}$  — момент инерции приведенных (объединенных) масс четырех цилиндров дизеля ЯМЗ-5340, 0,1  $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ .

Число собственных колебаний в минуту  $\Omega_{\text{кол}}$  приведенного вала с двумя массами определим по формуле

$$\Omega_{\text{кол}} = \frac{\omega_{C1} \cdot 60}{2\pi} = \frac{\omega_{C1} \cdot 30}{\pi},$$

$$\Omega_{\text{кол}} = \frac{3260 \cdot 30}{3,14} = 31146 \, \text{кол}/\text{мин}. \quad (12)$$

Известно, что  $1 \, \text{рад}/\text{с} = 60 / 2\pi \, \text{кол}/\text{мин}$ .

По формуле (13), которая представляет основное уравнение резонанса, определим порядок (номер) гармоники резонирующей ( $\Gamma_{\text{рез}}$ ) и угловую скорость вращения вала  $\omega_p$  при резонансе [2]

$$\Gamma_{\text{рез}} \cdot \omega_p = \omega_{C1}. \quad (13)$$

Для четырехтактных дизелей значение  $\Gamma_{\text{рез}} = 0,5$ ; 1; 1,5; 2; 2,5; 3 и т.д. В первом приближении частоту  $\Gamma_{\text{рез}}$  принимаем равной 14 колебаний за один оборот коленчатого вала ( $360^\circ$ , или  $2\pi$ ).

Определим частоту вращения коленчатого вала (количество оборотов в минуту), которая соответствует резонансному режиму

$$n_p = \Omega_{\text{кол}} / \Gamma_{\text{рез}} = 31146 / 14 = 2224,7 \, \text{мин}^{-1} \text{ (или об/мин)}. \quad (14)$$

Из анализа формулы (14) следует, что величина  $n_p$  находится в диапазоне частот вращения коленчатого вала дизеля ЯМЗ-5340 ( $600 - 2300 \, \text{мин}^{-1}$ ).

Угловая скорость вращения коленчатого вала двигателя при резонанском числе оборотов  $n_p$  коленчатого вала равна

$$\omega_p = 2\pi \cdot n_p / 60 = 6,28 \cdot 2224,7 / 60 = 232,8 \, \text{рад}/\text{с}.$$

Уравнение (13) в окончательном виде должно быть записано так, чтобы единицы измерения величины в левой и правой частях равенства совпали ( $\text{кол}/\text{мин} = \text{кол}/\text{мин}$ ).

$$\Gamma_{\text{рез}} \, (\text{кол}/\text{об}) \cdot n_p \, (\text{об}/\text{мин}) = \Omega_{\text{кол}} \, (\text{кол}/\text{мин}).$$

$$14 \cdot 2224,7 = 31146.$$

Для обеспечения равенства левой и правой частей уравнения (13) частота резонирующей гармоники ( $\Gamma_{\text{рез}}$ ) должна быть равна 14.

Из выражения (14) следует, что для двигателя ЯМЗ-5340 при частоте вращения коленчатого вала  $2224,7 \, \text{мин}^{-1}$  (диапазон частот  $600 - 2300 \, \text{мин}^{-1}$ ) и резонирующей гармоники 14 могут возникнуть резонансные колебания.

Для надежной и долговечной работы коленчатого вала он должен иметь гаситель крутильных колебаний.

## Выводы

1. Приведена методика расчета гармоник крутящего момента дизеля Ярославского моторного завода ЯМЗ 5340 мощностью 100 кВт и частоте вращения коленчатого вала 2300 мин<sup>-1</sup>, представлена вспомогательная таблица для расчета коэффициентов Фурье.
2. Рассмотрен пример расчета гармоник первого и второго порядков крутящего момента дизельного двигателя марки ЯМЗ-5340.
3. Определены частоты собственных и вынужденных колебаний коленчатого вала в минуту и его резонирующая критическая частота вращения.
4. Определён номер гармоники крутящего момента, равный 14, который по частоте вынужденных колебаний, с учетом резонансного числа оборотов коленчатого вала в минуту, совпадет с частотой собственных колебаний и вызывает резонанс, приводящий к поломке коленчатого вала.

## Библиографический список

1. Попык К. Г. Динамика автомобильных и тракторных двигателей. Москва: Высшая школа, 1970. 328 с.
2. Макушев Ю. П., Полякова Т. А., Михайлова Л. Ю. [и др.]. Расчет систем и механизмов двигателей внутреннего сгорания математическими методами / под ред. Ю. П. Макушева. Омск: Изд-во СибАДИ, 2011. 284 с.
3. Юнусов С. З., Гапиров А. Д., Кенжав С. Н. [и др.]. Динамический анализ трехмассовой системы с учетом технологического сопротивления // Теория и практика современной науки. 2023. № 5. С. 227 – 232.
4. Яманин А. И. Динамический расчет напряженно-деформированного состояния коленчатого вала // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2023. № 4 (757). С. 55 – 61. DOI 10.18698/0536-1044-2023-4-55-6. EDN: HVXKOQ.
5. Реутов А. А. Анализ крутильных колебаний деталей трансмиссии автомобиля с двухмассовым маховиком ДВС // Транспортное машиностроение. 2023. № 5 (17). С. 14 – 25. DOI: 10.30987/2782-5957-2023-5-14-25.
6. Milasinovic A., Filipovic I., Milovanovic Z. [et al.]. Determination of the engine torque of a four cylinder four stroke diesel engine on the basis of harmonic analysis of the crankshaft's angular velocity // Transactions of FAMENA. 2011. Vol. 35, no. 4. P. 55 – 65.
7. Zheng Z. C., Gao Y., Liu N. [et al.]. The Harmonic Response Analysis of Engine Block Based on Modal Analysis // Applied Mechanics and Materials. 2011. Vol. 138 – 139. P. 246 – 251. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.138-139.246.
8. Zhang B., Chen X., Xiang F. [et al.]. Dynamic Characteristics of Rotor-SFD-Support System Excited by Base Harmonic Excitations Using MHB-AFT Method // Conference: ASME Turbo Expo 2022: Turbomachinery Technical Conference and Exposition. Netherlands, 2022. 08BT26A011. DOI: 10.1115/GT2022-82536.
9. Sangilivadamlu R., Beidl C. Adaptive Harmonic and Disturbance Estimators for Rotary Machines with Applications to Engines // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2021. Vol. 26, no. 1. P. 381 – 392. DOI: 10.1109/TMECH.2020.3022736.
10. Kwak S. W., Shim J. K., Mo Y. K. Kinematic Conceptual Design of In-Line Four-Cylinder Variable Compression Ratio Engine Mechanisms Considering Vertical Second Harmonic Acceleration // Applied Sciences. 2020. Vol. 10. P. 3765. DOI: 10.3390/app10113765.
11. Макушев Ю. П., Полякова Т. А., Рындин В. В. [и др.] Способы расчета рабочего цикла бензинового двигателя с построением индикаторной диаграммы // Наука и техника Казахстана. 2018. № 2. С. 73 – 81. EDN: VJMSOT.
12. Лашко В. А., Лейбович М. В. Матричные методы в расчетах крутильных колебаний силовых установок с ДВС. Хабаровск: Изд-во ТОГУ, 2003. 211 с. ISBN 5-7389-0233-5: 200.
13. Антонов Н. С., Мазиков Ю. С., Гоц А. Н. [и др.]. Экспресс-метод оценки параметров демпферов крутильных колебаний жидкостного трения // Тракторы и сельхозмашины. 1986. № 10. С. 15 – 17.
14. Гоц А. Н. Динамика двигателей. Курсовое проектирование. Владимир: Изд-во ВлГУ, 2012. 105 с. ISBN 978-5-9984-0193-0.
15. Железко Б. Е., Адамов В. М., Русецкий И. К. Расчет и конструирование автомобильных и тракторных двигателей (дипломное проектирование). Минск: Вышэйшая школа, 1987. 247 с.

**МАКУШЕВ Юрий Петрович**, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры «Автоматизация и энергетическое машиностроение» Сибирского государственного автомобильно-дорожного университета (СибАДИ), г. Омск.

SPIN-код: 4777-2831

AuthorID (РИНЦ): 650763

AuthorID (SCOPUS): 57210975800

Адрес для переписки: makushev321@mail.ru

**ПОЛЯКОВА Татьяна Анатольевна**, кандидат педагогических наук, доцент (Россия), доцент кафедры «Физика и математика» СибАДИ, г. Омск; доцент кафедры «Прикладная математика и фундаментальная информатика» Омского государственного технического университета, г. Омск.

SPIN-код: 4090-8339

AuthorID (РИНЦ): 652910

ORCID: 0000-0002-9673-1750

AuthorID (SCOPUS): 57287283100

Адрес для переписки: ta\_polyakova@mail.ru

## Для цитирования

Макушев Ю. П., Полякова Т. А. Гармонический анализ крутящего момента двигателя ЯМЗ-5340 // Омский научный вестник. 2024. № 3 (191). С. 39 – 47. DOI: 10.25206/1813-8225-2024-191-39-47.

Статья поступила в редакцию 14.02.2024 г.

© Ю. П. Макушев, Т. А. Полякова

# HARMONIC ANALYSIS OF THE TORQUE OF THE YAMZ-5340 ENGINE

The purpose of the study is to find a technique and conduct on its basis a harmonic analysis of the torque of an internal combustion engine for the subsequent determination of resonant vibrations of the crankshaft. The method of calculating the harmonics of the engine torque is given on the example of a YaMZ-5340 diesel engine with a power of 100 kW at a crankshaft rotation speed of 2300 min<sup>-1</sup>. Based on the results of thermal and dynamic calculation of the YaMZ-5340 engine, a graph of changes in its torque is constructed and harmonics of the first and second orders are calculated. The frequencies of natural and forced vibrations of the crankshaft and its resonant critical rotation frequency are determined. The number of the torque harmonic has been determined, which, according to the frequency of forced vibrations, coincides with the frequency of natural vibrations and causes resonance. The results of the study can be applied in the design and fine-tuning of engines in order to calculate and reduce torsional vibrations.

**Keywords:** internal combustion engine, torque, torsional vibrations, harmonic, frequency and amplitude, resonance.

## References

1. Popyk K. G. Dinamika avtomobil'nykh i traktornykh dvigateley [Dynamics of automobile and tractor engines]. Moscow, 1970. 328 p. (In Russ.).
2. Makushev Yu. P., Polyakova T. A., Mikhaylova L. Yu. [et al.]. Raschet sistem i mekhanizmov dvigateley vnutrennego sgoraniya matematicheskimi metodami [Calculation of systems and mechanisms of internal combustion engines using mathematical methods] / Ed. by Makusheva Yu. P. Omsk, 2011. 284 p. (In Russ.).
3. Yunusov S. Z., Gapirov A. D., Kenzhayev S. N. [et al.]. Dinamicheskiy analiz trekhmassovoy sistemy s uchetom tekhnologicheskogo soprotivleniya [Dynamic analysis of a three-mass system taking into Account process resistance] // Teoriya i praktika sovremennoy nauki. *Theory and Practice of Modern Science*. 2023. No. 5. P. 227–232. (In Russ.).
4. Yamanin A. I. Dinamicheskiy raschet napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya kolenchatogo vala [Dynamic calculation of the crankshaft stress-strain state] // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 2023. No. 4 (757). P. 55–61. DOI 10.18698/0536-1044-2023-4-55-6. EDN: HVXKOQ. (In Russ.).
5. Reutov A. A. Analiz krutil'nykh kolebaniy detaley transmissii avtomobiliya s dvukhmassovym makhovikom DVS [Analysis of torsional vibrations of transmission Parts in a car with a two-mass flywheel of internal combustion engine] // Transportnoye mashinostroyeniye. *Transport Engineering*. 2023. No. 5 (17). P. 14–25. DOI: 10.30987/2782-5957-2023-5-14-25. (In Russ.).
6. Milasinovic A., Filipovic I., Milovanovic Z. [et al.]. Determination of the engine torque of a four cylinder four stroke diesel engine on the basis of harmonic analysis of the crankshaft's angular velocity // Transactions of FAMENA. 2011. Vol. 35, no. 4. P. 55–65. (In Engl.).
7. Zheng Z. C., Gao Y., Liu N. [et al.]. The Harmonic Response Analysis of Engine Block Based on Modal Analysis // Applied Mechanics and Materials. 2011. Vol. 138–139. P. 246–251. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.138-139.246. (In Engl.).
8. Zhang B., Chen X., Xiang F. [et al.]. Dynamic Characteristics of Rotor-SFD-Support System Excited by Base Harmonic Excitations Using MHB-AFT Method // Conference: ASME Turbo Expo 2022: Turbomachinery Technical Conference and Exposition. Netherlands, 2022. Vol. 08BT26A011. DOI: 10.1115/GT2022-82536. (In Engl.).
9. Sangilivadamalu R., Beidl C. Adaptive Harmonic and Disturbance Estimators for Rotary Machines With Applications to Engines // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2021. Vol. 26, no. 1. P. 381–392. DOI: 10.1109/TMECH.2020.3022736. (In Engl.).
10. Kwak S. W., Shim J. K., Mo Y. K. Kinematic Conceptual Design of In-Line Four-Cylinder Variable Compression Ratio Engine Mechanisms Considering Vertical Second Harmonic Acceleration // Applied Sciences. 2020. Vol. 10. P. 3765. DOI: 10.3390/app10113765. (In Engl.).
11. Makushev Yu. P., Polyakova T. A., Ryndin V. V. [et al.]. Sposoby rascheta rabochego tsikla benzинovogo dvigatelya s postroyeniem indikatornoy diagrammy [The methods of calculating gasoline engine operating cycle with the construction of the indicator diagram] // Nauka i tekhnika Kazakhstana. *Science and Technology of Kazakhstan*. 2018. No. 2. P. 73–81. EDN: VJMSOT. (In Kaz.).
12. Lashko V. A., Leybovich M. V. Matrichnyye metody v raschetakh krutil'nykh kolebaniy silovykh ustyanovok s DVS [Matrix methods in calculating torsional vibrations of power plants with internal combustion engines]. Khabarovsk, 2003. 211 p. ISBN 5-7389-0233-5: 200. (In Russ.).
13. Antonov N. S., Mazikov Yu. S., Gots A. N. [et al.]. Ekspress-metod otsenki parametrov demperov krutil'nykh kolebaniy zhidkostnogo trenaia [Express method for estimating the parameters of liquid friction torsional vibration dampers] // Traktory i sel'khoz mashiny. *Tractors and Agricultural Machinery*. 1986. No. 10. P. 15–17. (In Russ.).

14. Gots A. N. Dinamika dvigateley. Kursovoye proyektirovaniye [Engine dynamics. Course design]. Vladimir, 2012. 105 p. ISBN 978-5-9984-0193-0. (In Russ.).

15. Zhelezko B. E., Adamov V. M., Rusetskiy I. K. Raschet i konstruirovaniye avtomobil'nykh i traktornykh dvigateley (diplomnoye proyektirovaniye) [Calculation and design of automobile and tractor engines (graduate design)]. Minsk, 1987. 247 p. (In Russ.).

---

**MAKUSHEV Yuri Petrovich**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Automation and Power Engineering Department, Siberian State Automobile and Highway University (SibADI), Omsk.

SPIN-code: 4777-2831

AuthorID (RSCI): 650763

AuthorID (SCOPUS): 57210975800

Correspondence address: makushev321@mail.ru

**POLYAKOVA Tatiana Anatolyevna**, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate

Professor of Physics and Mathematics Department, SibADI, Omsk; Associate Professor of Applied Mathematics and Fundamental Informatics Department, Omsk State Technical University, Omsk.  
SPIN-code: 4090-8339  
AuthorID (RSCI): 652910  
ORCID: 0000-0002-9673-1750  
AuthorID (SCOPUS): 57287283100  
Correspondence address: ta\_polyakova@mail.ru

#### For citations

Makushev Yu. P., Polyakova T. A. Harmonic analysis of the torque of the YAMZ-5340 engine // Omsk Scientific Bulletin. 2024. No. 3 (191). P. 39 – 47. DOI: 10.25206/1813-8225-2024-191-39-47.

Received February 14, 2024.

© Yu. P. Makushev, T. A. Polyakova