

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ МНОГОМЕРНЫХ КОНЕЧНЫХ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

В. Ю. Юрков, М. А. Чижик

Омский государственный технический университет, г. Омск

Демонстрируется формальный подход к описанию геометрической формы точечных нерегулярных множеств в многомерном евклидовом пространстве. Под геометрической формой точечного множества понимается совокупность числовых параметров, определяющих взаимное положение всех точек множества с точностью до подобия. Числовые параметры формы определяются как отношения расстояний между точками к расстояниям между вершинами некоторого базисного симплекса. Базисный симплекс выбирается в заданном множестве точек. Показано, что геометрическая форма множества или совокупность числовых параметров не зависит от выбора базисного симплекса. Переход от одного базисного симплекса к любому другому приводит к пересчету значений параметров формы по формулам линейного преобразования. Многомерный объект, геометрическую форму которого предполагается описать числовыми параметрами, предварительно подвергается симплицальной аппроксимации. Такая аппроксимация рассматривается как симплицальный комплекс, имеющий комбинаторную структуру. Если совокупность параметров задается предварительно, то в статье приводятся условия, которым должны удовлетворять значения параметров формы. Приводятся несколько примеров, иллюстрирующих описанный подход. Предложенный подход может быть применен к решению ряда теоретических и прикладных задач инженерной геометрии в области многомерной геометрической морфометрии.

Ключевые слова: геометрическая форма, параметризация, симплекс, комплекс, симплицальная аппроксимация, преобразование подобия, геометрическая морфометрия.

Для цитирования: Юрков В. Ю., Чижик М. А. Параметризация геометрической формы многомерных конечных нерегулярных точечных множеств // Омский научный вестник. 2025. № 3 (195). С. 13–18. DOI: 10.25206/1813-8225-2025-195-13-18. EDN: GFDAVO.



© Юрков В. Ю., Чижик М. А., 2025.
Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

GEOMETRIC SHAPE PARAMETERIZATION OF MULTIDIMENSIONAL FINITE NON-REGULAR POINT SETS

V. Yu. Yurkov, M. A. Chizhik

Omsk State Technical University, Omsk, Russia

The paper is devoted to a formal approach to parameterization the geometric shape of spatial point irregular sets in multidimensional Euclidean space. The geometric shape of the point set is described by means of the set of numerical parameters that determine the relative position of all points of the set up to similarity. Numeric shape parameters are defined as ratios of distances between given points and vertices of some basis simplex. The basis simplex is selected at the given set of points. It is shown that geometric shape of the set or the set of numerical parameters does not depend on the choice of the basis simplex. Change of the basis means recalculation of shape parameters values by linear transformation formulas. A multidimensional object, the geometric shape of which is supposed to be described by numerical parameters, is previously subjected to simplicial approximation. Such an approximation is considered as a simplicial complex having a combinatorial structure. The paper also shows that all values of the shape parameters have to be satisfy some conditions that generate some area in the multidimensional space of parameters. To illustrate the described approach several examples are given. The proposed approach can be applied to solving a number of theoretical and applied problems of engineering geometry in the field of multidimensional geometric morphometry.

Keywords: geometric shape, parameterization, simplex, complex, simplicial approximation, similarity, geometric morphometry.

For citation: Yurkov V. Yu., Chizhik M. A. Geometric shape parameterization of multidimensional finite non-regular point sets. *Omsk Scientific Bulletin*. 2025. No. 3 (195). P. 13–18. DOI: 10.25206/1813-8225-2025-195-13-18. EDN: GFDAVO.



© Yurkov V. Yu., Chizhik M. A., 2025.
The content is available under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Введение

В инженерной геометрии, и в частности в теории параметризации, геометрическая форма фигуры определяется совокупностью независимых числовых параметров, инвариантных относительно движений пространства, в котором рассматривается фигура [1, 2]. В техническом дизайне геометрическая форма фигуры определяется как некоторое визуально воспринимаемое свойство, которое сопоставляется с визуально воспринимаемыми свойствами какой-либо известной геометрической фигуры [3, 4]. Это образный подход, формализовать который достаточно сложно. Поскольку таких, определенных по геометрической форме фигур, конечное множество, а формальное определение геометрической формы фигуры отсутствует, то возникают сложности при математическом описании такого понятия, как геометрическая форма.

В геометрической морфометрии — сравнительно новом подходе к анализу образов — используются декартовы координаты специально задаваемых точек — меток, расставляемых на анализируемых объектах [5, 6]. Эти метки определяют пространственную конфигурацию объекта и его расположение в пространстве форм. Такой подход позволяет исключить влияние размеров и положения объекта на результаты анализа формы.

В данной работе в качестве геометрических объектов рассматриваются точечные образы, представляющие собой нерегулярные точечные сети, допускающие разбиение на симплексы или объединение симплексов различных размерностей [7–9]. Их можно назвать точечными комплексами или полигональными моделями, или политопными моделями, если они расположены в многомерном пространстве. Геометрическая форма таких объектов будет определяться совокупностью независимых числовых параметров [10]. Однако они должны быть вычислены относительно выбранного точечного базиса и быть инвариантными относительно преобразования подобия.

Параметризация формы n -мерного симплекса

Пусть A_i , $i = 0, \dots, n$, есть множество независимых точек n -мерного евклидова пространства. Они образуют n -симплекс A^n . Если координаты всех его вершин известны, то симплекс задан в пространстве метрически и позиционно. Число параметров симплекса равно $n(n+1)$. Если известны только расстояния между вершинами, то симплекс может быть задан только метрически и определен с точностью до движения при условии, что расстояния заданы не произвольно, а подчиняются некоторым ограничениям, которые можно назвать условиями существования симплекса. Число параметров равно C_{n+1}^2 . Любая пара вершин A_i, A_j , $i < j$, образует 1-симплекс, который можно назвать базисным 1-сим-

плексом симплекса A^n . Тогда образуются следующие отношения:

$$\begin{aligned} a_{ik} &= \frac{|A_i A_k|}{|A_i A_j|}, \quad a_{jk} = \frac{|A_j A_k|}{|A_i A_j|}, \\ k &= 0, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n; \\ a_{0k} &= \frac{|A_0 A_k|}{|A_i A_j|}, \\ k &= 1, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n; \\ a_{1k} &= \frac{|A_1 A_k|}{|A_i A_j|}, \\ k &= 2, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n; \\ &\dots; \\ a_{n-1,n} &= \frac{|A_{n-1} A_n|}{|A_i A_j|}, \quad i \neq n-1, \quad j \neq n. \end{aligned} \quad (1)$$

Число этих отношений равно $(n^2 + n - 2)/2$. Они определены относительно базисного 1-симплекса $A_i A_j$, поэтому множество этих отношений обозначим символом $\{a_{ij}^k\}$. Они определяют симплекс с точностью до подобия, то есть определяют геометрическую форму n -симплекса. Однако необходимо учитывать, что эти отношения не могут быть заданы произвольно. Они тоже должны удовлетворять условиям существования n -симплекса.

Условия существования n -симплекса

Рассмотрим условия существования n -симплекса для множества параметров $a_{0,i}, \dots, a_{n-1,n}$. Первое условие очевидно: вершина A_2 не должна лежать на прямой $A_0 A_1$. Поэтому если один параметр, например $a_{0,2}$, задается произвольно, то второй параметр должен удовлетворять условию $a_{0,2} - 1 < a_{1,2} < a_{0,2} + 1$. Выберем систему координат так, чтобы начало координат было в вершине A_0 , ось Ox_1 совпадала по направлению с ребром $A_0 A_1$, а все остальные i -е вершины имели неотрицательными свои координаты от 0-й до i -й и нулевыми все остальные:

$$\begin{aligned} A_0(0, \dots, 0), \quad A_1(x_{1,1}, 0, \dots, 0), \quad A_2(x_{1,2}, x_{2,2}, 0, \dots, 0), \dots \\ A_i(x_{1,i}, \dots, x_{i,i}, 0, \dots, 0), \dots, A_n(x_{1,n}, \dots, x_{n,n}). \end{aligned}$$

Тогда для определения числового промежутка существования очередного параметра $a_{j-1,j}$ необходимо решить систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{j-1} (x_{i,j} - x_{i,i})^2 &= (a_{j-1,j} - 1)^2 (A_0 A_1)^2, \\ k &= 0, \dots, j-2. \end{aligned}$$

Решением будет пара точек $A_j^{(1)}(\dots, x_{j-1,j}^{(1)} > 0, 0, \dots, 0)$, $A_j^{(2)}(\dots, x_{j-1,j}^{(2)} < 0, 0, \dots, 0)$. Условием выбора параметра $a_{j-1,j}$ является

$$|A_{j-1}A_j^{(1)}|/|A_0A_1| < a_{j-1,j} < |A_{j-1}A_j^{(2)}|/|A_0A_1|.$$

Таким образом, n -симплекс будет определен с точностью до подобия следующим множеством параметров:

$$\dots \{a_{\dots}^{01}\} = \{a_{0,2}^{01}, a_{1,2}^{01}, a_{0,3}^{01}, a_{1,3}^{01}, \dots, a_{2,3}^{01}, a_{3,4}^{01}, \dots, a_{n-1,n}^{01}\}.$$

Условие эквивалентности геометрической формы двух симплексов можно сформулировать следующим образом. Пусть заданы два n -симплекса A^n и B^n . Для симплекса A^n существует C_{n+1}^2 систем $\{a_{\dots}^{\#}\}$ параметризации геометрической формы. Для B^n существует такое же число систем $\{b_{\dots}^{\#}\}$ параметризации формы.

ТЕОРЕМА. Если для двух n -симплексов A^n и B^n , $A^n \neq B^n$, какая-либо из систем параметризации $\{a_{\dots}^{\#}\}$ с точностью до перестановки индексов совпадает с какой-либо системой $\{b_{\dots}^{\#}\}$, то данные симплексы обладают одной и той же геометрической формой или, другими словами, эквивалентны по форме.

Доказательство теоремы основано на комбинаторном анализе множества систем параметризации. Мы здесь не приводим его ввиду экономии места. Оно будет приведено в статье, посвященной теоретическим аспектам многомерной морфометрии.

Пример 1. Множество треугольников на плоскости параметров формы располагаются в виде точек открытой области

$$\{S_1: a_{02} + a_{12} - 1 > 0\} \cap \{S_2: -a_{02} + a_{12} - 1 < 0\} \cap \{S_3: a_{02} - a_{12} - 1 < 0\}.$$

Подмножество равносторонних треугольников: $a_{02} = a_{12} = 1$.

Подмножество равнобедренных треугольников:

$$\{S_1: a_{02} = 1, 0 < a_{12} < 2\} \cup \{S_2: 0 < a_{02} < 2, a_{12} = 1\} \cup \left\{S_3: a_{02} = a_{12}, \frac{1}{2} < a_{02} < \infty\right\}.$$

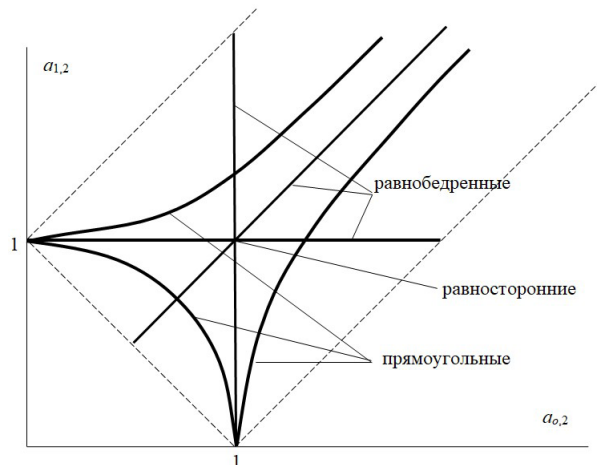


Рис. 1. Область треугольников в пространстве параметров формы
 Fig. 1. Triangles areas in the space of shape parameters

Подмножество прямоугольных треугольников:

$$\begin{aligned} &\{S_1: (a_{02})^2 + (a_{12})^2 = 1, 0 < a_{01} < 1, 0 < a_{12} < 1\} \cup \\ &\cup \{S_2: (a_{02})^2 = (a_{12})^2 + 1, a_{02} > 1, a_{12} > 0\} \cup \\ &\cup \{S_3: (a_{02})^2 = (a_{12})^2 - 1, a_{02} > 0, a_{12} > 1\}. \end{aligned}$$

Эти подмножества показаны на рис. 1. Видно, что с увеличением значений параметров равнобедренные треугольники мало отличаются по форме от прямоугольных (длина катета стремится сравняться с длиной гипотенузы).

Пример 2. Одна из двенадцати систем параметризации правильной треугольной прямой призмы с единичными ребрами есть $\{1, 1, 1, 2^{1/2}, 2^{1/2}, 1, 2^{1/2}, 2^{1/2}, 1, 1, 1\}$. Одна из двадцати четырех систем параметризации куба с единичными ребрами есть $\{2^{1/2}, 1, 1, 2^{1/2}, 1, 2^{1/2}, 2^{1/2}, 1, 3^{1/2}, 2^{1/2}, 2^{1/2}, 3^{1/2}, 1, 3^{1/2}, 2^{1/2}, 1, 2^{1/2}\}$.

Форма n -мерного точечного комплекса

Пусть $A^{n,m}\{A_i: A_i \in E^n, i = 0, \dots, m; m > n\}$ — точечный комплекс. В качестве базисного 1-симплекса можно взять любую пару вершин (1-грань) выпуклой оболочки множества $A^{n,m}$. Обозначим эту пару A_0, A_1 и примем эту 1-грань за ось x_1 координат. Ось x_2 можно взять в 2-границе выпуклой оболочки так, чтобы вершина A_2 имела положительную координату x_2 . И так далее. При таком выборе вершины $A_i, i = n+1, \dots, m$ не могут иметь отрицательных значений координат. Общее число параметров формы комплекса равно $(n^2 + n - 2)/2 + 2(n - m)$. Общее число базисных симплексов равно C_{m+1}^{n+1} . Поэтому общее число всех возможных параметризаций формы комплекса равно $C_{m+1}^{n+1} \cdot 2(n - m)$. Обозначим множество всех возможных параметризаций формы комплекса как $\{a_{\dots}^{\#}\}$, а конкретную параметризацию — как $\{a_{\dots}^{\#}\}_i, i = 1, \dots, C_{m+1}^{n+1} \cdot 2(n - m)$.

ТЕОРЕМА. Два комплекса $A^{n,m}$ и $B^{n,m}$ эквивалентны по форме, если в $\{a_{\dots}^{\#}\}$ и в $\{b_{\dots}^{\#}\}$ найдутся такие параметризации $\{a_{\dots}^{\#}\}_i, \{b_{\dots}^{\#}\}_i$, что $\{a_{\dots}^{\#}\}_i = \{b_{\dots}^{\#}\}_i$ с точностью до перестановки их элементов.

Доказательство этой теоремы также основано на комбинаторном анализе множества систем параметризации комплексов. Оно также будет приведено в статье, посвященной теоретическим аспектам многомерной морфометрии.

Пример 3. В качестве примера рассмотрим параметризацию формы комплекса $A^{2,m}$. Выберем любую сторону выпуклой оболочки комплекса и обозначим её A_0A_1 . Также обозначим её длину. Будем считать её базисным 1-симплексом. Имеем параметризацию

$$a_{0,i}^{0,1} = \frac{A_0A_i}{A_0A_1}, \quad a_{1,i}^{0,1} = \frac{A_1A_i}{A_0A_1}, \quad i = 2, \dots, m.$$

Выберем другую сторону выпуклой оболочки комплекса, например, $A_pA_q, p = 0, \dots, m-1, q = 1, \dots, m$. Будем считать её другим базисным 1-симплексом. Имеем параметризацию

$$a_{p,i}^{p,q} = \frac{A_pA_i}{A_pA_q}, \quad a_{q,i}^{p,q} = \frac{A_qA_i}{A_pA_q}, \quad i = 0, \dots, m, i \neq p, i \neq q.$$

Поскольку форма комплекса не изменилась, должны существовать формулы перехода от одной

параметризации к другой. Другими словами, обе параметризации должны быть связаны линейными уравнениями. Некоторые из них очевидны:

$$\alpha_{p,0}^{p,q} = a_{0,p}^{0,1} \frac{A_0 A_1}{A_p A_q}, \quad \alpha_{q,0}^{p,q} = a_{0,q}^{0,1} \frac{A_0 A_1}{A_p A_q},$$

$$\alpha_{p,1}^{p,q} = a_{1,p}^{0,1} \frac{A_0 A_1}{A_p A_q}, \quad \alpha_{q,1}^{p,q} = a_{1,q}^{0,1} \frac{A_0 A_1}{A_p A_q}.$$

Обозначим $P_{p,i}$ — периметр четырехугольника $A_0 A_1 A_p A_i$, а $P_{q,i}$ — периметр четырехугольника $A_0 A_1 A_q A_i$. Выразив длины сторон четырехугольников при помощи введенных параметризаций, получим

$$\alpha_{p,i}^{p,q} = \frac{P_{p,i}}{A_p A_q} - \frac{A_0 A_1}{A_p A_q} (a_{0,p}^{0,1} + a_{1,i}^{0,1} + 1),$$

$$\alpha_{q,i}^{p,q} = \frac{P_{q,i}}{A_p A_q} - \frac{A_0 A_1}{A_p A_q} (a_{0,q}^{0,1} + a_{1,i}^{0,1} + 1).$$

Пример 4. Рассмотрим параметризацию формы комплекса $A^{3,m}$. Выберем любое одномерное ребро выпуклой оболочки комплекса и обозначим его $A_0 A_1$. Также обозначим его длину. Будем считать его базисным 1-симплексом. Выберем какое-либо другое одномерное ребро и обозначим его $A_p A_q$. Также обозначим его длину. Будем считать его другим базисным 1-симплексом. Имеем две параметризации базисного 3-симплекса $A_0 A_1 A_p A_q$

$$a_{0,p}^{0,1} = \frac{A_0 A_p}{A_0 A_1}, \quad a_{0,q}^{0,1} = \frac{A_0 A_q}{A_0 A_1},$$

$$a_{1,p}^{0,1} = \frac{A_1 A_p}{A_0 A_1}, \quad a_{1,q}^{0,1} = \frac{A_1 A_q}{A_0 A_1}, \quad a_{p,q}^{0,1} = \frac{A_p A_q}{A_0 A_1},$$

$$\alpha_{p,0}^{p,q} = \frac{A_0 A_p}{A_p A_q}, \quad \alpha_{q,0}^{p,q} = \frac{A_0 A_q}{A_p A_q},$$

$$\alpha_{p,1}^{p,q} = \frac{A_1 A_p}{A_p A_q}, \quad \alpha_{q,1}^{p,q} = \frac{A_1 A_q}{A_p A_q}, \quad \alpha_{0,1}^{p,q} = \frac{A_0 A_1}{A_p A_q}.$$

Пусть $A_i A_j$ — какое-либо одномерное ребро комплекса, $i \neq 0, i \neq 1, i \neq p, i \neq q, j \neq 0, j \neq 1, j \neq p, j \neq q$. Тогда это ребро можно параметризовать как относительно базисного 1-симплекса $A_0 A_1$, так и относительно базисного 1-симплекса $A_p A_q$. Следовательно, между двумя различными параметризациями должны существовать линейные уравнения связи. Имеем

$$a_{0,i}^{0,1} = \frac{A_0 A_i}{A_0 A_1}, \quad a_{0,j}^{0,1} = \frac{A_0 A_j}{A_0 A_1},$$

$$a_{1,i}^{0,1} = \frac{A_1 A_i}{A_0 A_1}, \quad a_{1,j}^{0,1} = \frac{A_1 A_j}{A_0 A_1}, \quad a_{i,j}^{0,1} = \frac{A_i A_j}{A_0 A_1},$$

$$\alpha_{p,i}^{p,q} = \frac{A_p A_i}{A_p A_q}, \quad \alpha_{p,j}^{p,q} = \frac{A_p A_j}{A_p A_q},$$

$$\alpha_{q,i}^{p,q} = \frac{A_q A_i}{A_p A_q}, \quad \alpha_{q,j}^{p,q} = \frac{A_q A_j}{A_p A_q}, \quad \alpha_{i,j}^{p,q} = \frac{A_i A_j}{A_p A_q}.$$

Тогда, опуская вывод, получим

$$\alpha_{p,i}^{p,q} = \frac{P_{p,i}}{A_p A_q} - \frac{A_0 A_1}{A_p A_q} (a_{0,p}^{0,1} + a_{1,p}^{0,1} + a_{0,i}^{0,1} + a_{1,i}^{0,1} + 1),$$

$$\alpha_{q,i}^{p,q} = \frac{P_{q,i}}{A_p A_q} - \frac{A_0 A_1}{A_p A_q} (a_{0,q}^{0,1} + a_{1,q}^{0,1} + a_{0,i}^{0,1} + a_{1,i}^{0,1} + 1).$$

Здесь $P_{p,i}$ и $P_{q,i}$ — сумма длин ребер соответствующих 3-симплексов.

Параметризация формы некоторых специальных комплексов

Рассмотрим параметризацию формы комплекса $A^{1,m} \in E^n, m > n$. Предположим, что никакие k смежные 1-симплексы не лежат в одной $(k-1)$ -плоскости. Выберем любые n смежных 1-симплексов, образующих связный подкомплекс. Например, подкомплекс с вершинами $A_0, \dots, A_n$. Параметризация его геометрической формы выполняется так, как описано выше. Добавление вершины A_{n+1} требует n параметров, вычисленных относительно вершин $A_1, \dots, A_n$. И так далее. В результате на заданный комплекс будет «натяннут» n -мерный комплекс $A^{n, m-n+1}$, состоящий из $m-n+1$ n -симплексов. При этом

$$A^{n,i} \cap A^{n,i+1} = A^{n-1,i}, \quad i = 0, \dots, m-n. \quad (1)$$

Общее число параметров формы будет $(n^2 + n - 2) / 2 + n(m-n)$. Схема описанной параметризации приведена на рис. 2.

Рассмотрим комплекс $A^{2,m} \in E^n, m > n$.

Пусть у него каждые два смежных 2-симплекса имеют общую вершину. Понятно, что m — четное.

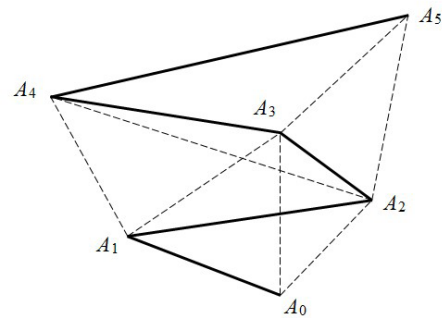


Рис. 2. Схема параметризации формы пространственной ломаной (комплекса $A^{1,5}$)
Fig. 2. Parameterization scheme of the spatial polyline shape (complex $A^{1,5}$)

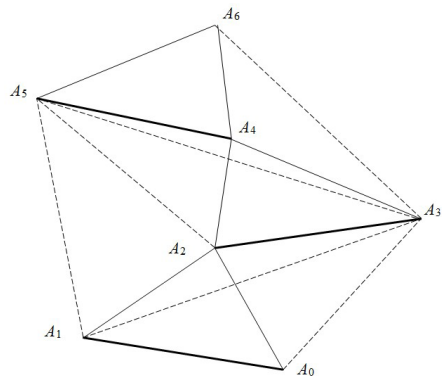


Рис. 3. Схема параметризации формы двумерного пространственного комплекса
Fig. 3. Scheme of parameterization of the shape of a two-dimensional spatial complex

Пусть смежными будут вершины $A_2, A_4, \dots, A_{m-2}$. Пусть нумерация 2-симплексов $A^{2, i/2}$, где i — меньший из двух номеров смежной вершины. Независимость множества 2-симплексов означает, что никакие два смежных 2-симплекса не лежат в одной 3-плоскости.

Пусть n четное. Тогда форма n -симплекса $A^{2, n/2}$ параметризуется так, как описано выше. Пусть $i = 0$. Тогда n -симплекс образуется вершинами $A_0, \dots, A_n$. Для определения положения вершины A_{n+1} потребуется $n - 1$ параметров, вычисленных относительно вершин $A_1, \dots, A_{n-1}$. То есть будет выделен n -симплекс с вершинами $A_1, \dots, A_{n+1}$, имеющий с предыдущим общую $(n - 1)$ -мерную грань с вершинами $A_1, \dots, A_n$. Для определения положения следующей вершины A_{n+2} потребуется $n - 2$ параметров, вычисленных относительно вершин $A_2, \dots, A_{n-1}$. То есть будет выделен следующий n -симплекс с вершинами $A_2, \dots, A_{n+2}$.

Пусть n нечетное и $i = 0$. Тогда для определения положения вершины A_{n+1} потребуется $n - 2$ параметров, вычисленных относительно вершин $A_1, \dots, A_{n-2}$. И так далее. В итоге на комплекс $A^{2, m}$ будет «натянута» комплекс $A^{n, m - n + 1}$, состоящий из $m - n + 1$ n -симплексов, для которых сохраняется условие (1). Схема такой параметризации показана на рис. 3.

Аналогично можно рассмотреть комплексы $A^{2, m}$, у которых смежные 2-симплексы имеют общую одномерную грань. Все эти рассуждения обобщаются на комплексы $A^{p, m}$, $p \leq n$. Общий вывод заключается в том, что для определения параметров геометрической формы точечного множества (комплекса) в E^n на него нужно «натянуть» $m - n + 1$ n -симплексов, связанных общими $(n - 1)$ -мерными гранями.

Заключение

Как показал анализ литературы, геометрическая форма объектов играет существенные роль в прикладных исследованиях, связанных с анализом образов. Однако опубликованных научных работ, в которых геометрическая форма объекта была бы предметом численного анализа, крайне мало. В данной статье сделана попытка рассмотреть некоторые подходы к численному анализу геометрической формы многомерного объекта, представленному как результат симплицальной аппроксимации.

Геометрическая форма многомерного объекта описывается конечным множеством числовых параметров, которые представляют собой отношения длин ребер аппроксимирующих симплексов к длинам выбранного базисного симплекса.

Список источников / References

1. Кондусов Д. В., Кондусова В. Б. Сравнительный анализ методов поиска 3D-моделей изделий машиностроения по их геометрической форме // Вестник машиностроения. 2024. Т. 103, № 10. С. 873–876. DOI: 10.36652/0042-4633-2024-103-10-873-876. EDN: FTJILC.
2. Kondusov D. V., Kondusova V. B. Sravnitel'nyy analiz metodov poiska 3D-modeley izdeliy mashinostroyeniya po ikh geometricheskoy forme [Comparative analysis of methods for searching of 3D models of mechanical engineering products by their geometric shape]. *Vestnik Mashinostroyeniya*. 2024. Vol. 103, no. 10. P. 873–876. DOI: 10.36652/0042-4633-2024-103-10-873-876. EDN: FTJILC. (In Russ.).
3. Виноградова Г. А., Захарова Е. А. Автоматизация инженерного анализа изделий сложной геометрической формы в T-FLEXCAD // Вестник Костромского государственного

технологического университета. 2011. № 1 (26). С. 66–71. EDN: OGIRQN.

Vinogradova G. A., Zazharova E. A. Avtomatizatsiya inzhenernogo analiza izdeliy slozhnoy geometricheskoy formy v T-FLEXCAD [Automatization of engineering analysis of complex geometric shape of products in T-FLEX CAD]. *Vestnik Kostromskogo Gosudarstvennogo Tekhnologicheskogo Universiteta*. 2011. No. 1 (26). P. 66–71. EDN: OGIRQN. (In Russ.).

3. Бырдина М. В., Мищик М. Ф., Бельшева В. С. Расчет и оптимизация геометрических параметров изделий легкой промышленности конической формы // Известия высших учебных заведений. Технология легкой промышленности. 2022. Т. 56, № 2. С. 52–56. DOI: 10.46418/0021-3489-2022-56-02-10. EDN: CDWGTK.

Byrdina M. V., Mitsik M. F., Belysheva V. S. Raschet i optimizatsiya geometricheskikh parametrov izdeliy legkoy promyshlennosti konicheskoy formy [Calculation and optimization of geometric parameters of light industry products of conical shape]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Tekhnologiya legkoy promyshlennosti. The News of Higher Educational Institutions. Technology of Light Industry*. 2022. Vol. 56, no. 2. P. 52–56. DOI: 10.46418/0021-3489-2022-56-02-10. EDN: CDWGTK. (In Russ.).

4. Казакова Н. А., Иванова О. В., Хамматова В. В. Геометрическая классификация сложных пространственных форм в одежде и интерьерном текстиле // Вестник Технологического университета. 2017. Т. 20, № 3. С. 91–94. EDN: XXQHSH.

Kazakova N. A., Ivanova O. V., Khammatova V. V. Geometricheskaya klassifikatsiya slozhnykh prostranstvennykh form v odezhde i inter'yernom tekstile [Geometric classification of complex spatial shapes in clothing and interior textiles]. *Vestnik Tekhnologicheskogo universiteta. Herald of Technological University*. 2017. Vol. 20, no. 3. P. 91–94. EDN: XXQHSH. (In Russ.).

5. Васильев А. Г., Васильева И. А. Геометрическая морфометрия в популяционной экологии: новые возможности и научные перспективы // Принципы экологии. 2016. № 3 (19). С. 34. EDN: WOIRUN.

Vasilyev A. G., Vasilyeva I. A. Geometricheskaya morfometriya v populyatsionnoy ekologii: novyye vozmozhnosti i nauchnyye perspektivy [Geometric morphometrics in populatative ecology: New possibilities and scientific perspectives]. *Printsipy ekologii. Principles of the Ecology*. 2016. No. 3 (19). P. 34. EDN: WOIRUN. (In Russ.).

6. Мандрица С. А. К использованию геометрической морфометрии в ихтиологии // Вестник Пермского университета. 2007. № 5 (10). С. 38–52. EDN: PAVBYD.

Mandritsa S. A. K ispol'zovaniyu geometricheskoy morfometrii v ikhtiologii [On the use of geometric morphometrics in ichthyology]. *Vestnik Permskogo universiteta. Bulletin of Perm University*. 2007. No. 5 (10). P. 38–52. EDN: PAVBYD. (In Russ.).

7. Чижов М. И., Усупхов А. А., Троценко А. С. Метод точной оценки близости геометрических форм полигональных моделей // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2018. № 2. С. 118–122. EDN: XWPOAH.

Chizhov M. I., Uspekhov A. A., Trotsenko A. S. Metod tochnoy otsenki blizosti geometricheskikh form poligonal'nykh modeley [The precise method of the geometric forms similarity estimation for the polygonal models]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Sistemnyy analiz i informatsionnyye tekhnologii. Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies*. 2018. No. 2. P. 118–122. EDN: XWPOAH. (In Russ.).

8. Тарасова А. С. Методы определения оптимальной геометрической формы кластеров в задачах кластерного анализа // Информационные технологии. 2008. № 2. С. 10–15. EDN: KFQGHZ.

Tarasova A. S. Metody opredeleniya optimal'noy geometricheskoy formy klasterov v zadachakh klaster'nogo analiza

[Detecting optimal geometrical cluster forms in clusterization problems]. *Informatsionnyye tekhnologii. Information Technologies*. 2008. No. 2. P. 10 – 15. EDN: KFQGHZ. (In Russ.).

9. Лаптева Е. Н. Методика получения и анализа пространственной формы объекта на основе трехмерных координат точек его поверхности. Москва, 2004. Деп. в ВИНТИ РАН 05.04.2004, № 556-B2004.

Lapteva E. N. Metodika polucheniya i analiza prostranstvennoy formy ob'ekta na osnove trekhmernykh koordinat tochek ego poverkhnosti [Method for obtaining and analyzing the spatial shape of an object based on the three-dimensional coordinates of its surface points]. Moscow, 2004. Deposited in VINITI RAS. 05.04.2004. No. 556-B2004. (In Russ.).

10. Косников Ю. Н. Целочисленная параметризация геометрических форм на координатной плоскости // Международный научно-исследовательский журнал. 2023. № 12 (138). С. 1 – 9. DOI: 10.23670/IRJ.2023.138.15 EDN: JHSQRE.

Kosnikov Yu. N. Tselochislennaya parametrizatsiya geometricheskikh form na koordinatnoy ploskosti [Integer parameterization of geometric shapes on the coordinate plane]. *Mezhdunarodnyy nauchno-issledovatel'skiy zhurnal. International Research Journal*. 2023. No. 12 (138). P. 1 – 9. DOI: 10.23670/IRJ.2023.138.15. EDN: JHSQRE. (In Russ.).

ЮРКОВ Виктор Юрьевич, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры «Конструирование и технологии изделий легкой промышленности» Омского государственного технического университета (ОмГТУ), г. Омск.

SPIN-код: 2414-1438

AuthorID (РИНЦ): 173644

AuthorID (SCOPUS): 55857657200

ORCID: 0000-0003-2667-8103

Адрес для переписки: viktor_yurkov@mail.ru

ЧИЖИК Маргарита Анатольевна, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры «Конструирование и технологии изделий легкой промышленности» ОмГТУ, г. Омск.

SPIN-код: 7582-7019

AuthorID (РИНЦ): 474040

AuthorID (SCOPUS): 13406046300

ORCID: 0000-0003-0797-875X

Адрес для переписки: margarita-chizhik@rambler.ru

Прозрачность финансовой деятельности: авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.

Статья поступила в редакцию 11.04.2025; одобрена после рецензирования 15.05.2025; принята к публикации 04.07.2025.

YURKOV Viktor Yuryevich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Design and Technology of Light Industry Product Manufacture Department, Omsk State Technical University (OmSTU), Omsk.

SPIN-code: 2414-1438

AuthorID (RSCI): 173644

AuthorID (SCOPUS): 55857657200

ORCID: 0000-0003-2667-8103

Correspondence address: viktor_yurkov@mail.ru

CHIZHIK Margarita Anatolyevna, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Design and Technology of Light Industry Product Manufacture Department, OmSTU, Omsk.

SPIN-code: 7582-7019

AuthorID (RSCI): 474040

AuthorID (SCOPUS): 13406046300

ORCID: 0000-0003-0797-875X

Correspondence address: margarita-chizhik@rambler.ru

Financial transparency: the authors have no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.

The article was submitted 11.04.2025; approved after reviewing 15.05.2025; accepted for publication 04.07.2025.