

## ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ И ДИНАМИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ ТВЕРДЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ. ИНДЕНТОР ИМЕЕТ КОНИЧЕСКУЮ ГОЛОВНУЮ ЧАСТЬ

Д. И. Чернявский

Омский государственный технический университет, г. Омск

В работе проводится анализ динамических и статических зависимостей между силой и глубиной внедрения конических инденторов в преграды. Индентором является цилиндр с заостренной конической частью. Инденторы и преграды изготовлены из стали, дюралюминия и латуни. В результате оцифровки графиков исследуемых зависимостей получены интерполяционные формулы распределения энергий упругих и пластических деформаций в контактной зоне. Полученные результаты можно использовать при проектировании штампов и матриц для обработки материалов давлением, а также при разработке параметров технологических операций при изготовлении профильных деталей из стального и дюралюминиевого листового материала.

**Ключевые слова:** упругие и пластические деформации, цилиндрический индентор с конической головной частью, обработка материалов давлением, прочность, листовая штамповка, бесформенная многоточечная формовка.

**Для цитирования:** Чернявский Д. И. Исследование упругопластических деформаций при статическом и динамическом взаимодействии двух твердых деформируемых тел. Индентор имеет коническую головную часть // Омский научный вестник. 2025. № 2 (194). С. 5–17. DOI: 10.25206/1813-8225-2025-194-5-17. EDN: JXBIZZ.



© Чернявский Д. И., 2025.  
Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

## STUDY OF ELASTOPLASTIC DEFORMATIONS DURING STATIC AND DYNAMIC INTERACTION OF TWO DEFORMABLE SOLID BODIES. INDENTER WITH A CONICAL TIP

D. I. Chernyavsky

Omsk State Technical University, Omsk, Russia

The work analyzes the dynamic and static relationships between force and indentation depth when conical indenters are pressed into various materials. The indenter consists of a cylindrical body with a pointed conical tip. Indenters and targets are fabricated from steel, duralumin, and brass. Through digitization of graphs representing the investigated relationships, interpolation formulas describing the distribution of elastic and plastic deformation energies within the contact zone are derived. The obtained results can be applied in the design of dies and matrices for material forming processes, as well as in the determination of parameters for technological operations during the fabrication of profiled parts from steel and duralumin sheets.

**Keywords:** elastic and plastic deformations, cylindrical indenter with conical head part, processing of materials by pressure, strength, sheet stamping, formless multipoint forming.



© Chernyavsky D. I., 2025.  
The content is available under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

### Введение

Соударение двух тел часто встречается в практической деятельности человека. Это могут быть технологические операции, связанные с обработкой материалов давлением; разрушение породы с целью добычи полезных ископаемых; применение удара в строительстве или в военном деле; а также и другие случаи. Удар отличается от статического состояния тем, что в точке контакта тел в течение очень короткого времени формируются и затем исчезают значительные силы, которые в итоге действуют на всю механическую систему двух тел. В результате данного процесса в телах формируются ударные волны. В зоне контакта одно тело внедряется в поверхность другого тела, в результате чего в поверхности этого тела возникает ударный кратер за счет пластической деформации материала тел.

Среди значительного количества исследований, посвященных различным аспектам изучения динамического и статического взаимодействия двух твердых деформируемых тел, в первую очередь необходимо выделить следующие классические публикации. Johnson K. L. [1] рассматривает контактную прочность материалов при их давлении друг на друга в статических и динамических условиях. Goldsmith W. [2], Stronge W. J. [3], Александров Е. В. и др. [4], Popov V. L. [5], Meyers M. [6] изучают основные разделы теории удара: центральный удар твердых деформируемых тел; удар твердых деформируемых тел в плоскости и в пространстве; численное моделирование ударного процесса, удар тел переменной жесткости, а также и другие теории.

В данной работе рассматривается ударное и статическое взаимодействие двух тел. Удар осуществляется при средних скоростях, т.е. при скоростях соударения тел величиной до 100 м/с. Данный диапазон скоростей удара широко применяется в различных технологических целях, т.к. при этом значительная часть первоначальной кинетической энергии затрачивается на формирование пластических деформаций только в зоне контакта тел. При этом уровень возникающих напряжений не изменяет форму данных тел. Также исследования показали, что удар при таком диапазоне скоростей столкновения тел позволяет считать ударные процессы изотермическими, поэтому термодинамические процессы можно не учитывать.

Статическое давление тел друг на друга осуществлялось под действием сил, соизмеримых с возникающими в зоне контакта ударными силами. Для проведения статической части опытов использовался кузнечный пресс.

В области теории ударных процессов хорошо изучен случай удара твердых деформируемых тел с поверхностями контакта различной кривизны второго порядка. Такие поверхности описываются гладкими дифференцируемыми функциями, и решения соответствующих дифференциальных уравнений определены в исследованиях Герца Г. [7], Ти-

мошенко С. П. [8], Беляева Н. М. [9], Ишлинского А. Ю. [10] и других авторов. В работах [11], [12] анализируются экспериментальные результаты соотношений между ударной силой и глубиной внедрения индентора (сферического шара) во второе тело. Тела изготавливались из различных сортов стали, алюминиевых сплавов и других материалов.

Менее изучена задача статического и динамического взаимодействия твердых деформируемых тел для случая применения конического индентора. В данном варианте применять теорию Герца нельзя, так как при внедрении конического индентора высота перемещения приповерхностных слоев второго тела (высота буртика кратера) соизмерима с размером вершины конуса внедренного в поверхность второго тела. Геометрическая контактная теория Герца предполагает малую глубину внедрения сферического индентора в полупространство по сравнению с размерами контактной области. Поэтому для изучения процесса внедрения конического индентора в преграду широко применяется численное моделирование.

Так, в работе [13] авторы решают задачи ударного взаимодействия конического индентора с цилиндрической оболочкой. Сравнение с результатами аналогичного воздействия на полупространство показало, что жесткость цилиндрической оболочки существенно влияет на зависимость контактной силы в течение времени удара. В диссертации [14] Dubey R. определяет оптимальную форму носовой части цилиндрических инденторов, ударно взаимодействующих с плоскими пластинами из алюминиевого сплава. Особенность данных пластин состоит в том, что их получают с помощью прокатки из плит, предварительно охлажденных до криогенных температур. В работе Backman M. и др. [15] изучают удар стального закаленного шара о композитные пластины. Borvik T. и др. в публикации [16] рассматривают прямой и косой удар цилиндрического индентора об алюминиевые пластины. В [17] Forrestal M. и др. изучают удар цилиндрических инденторов с коническими носовыми частями, а также с носовыми концами в виде ожевала об алюминиевые пластины.

Таким образом, можно отметить, что теоретическое и экспериментальное изучение проблем динамического и статического контактных взаимодействий является важным направлением дальнейшего развития машиностроения. Обозначения физических величин, принятых в данной статье, приведены в табл. 1.

### Постановка задачи

Рассмотрим экспериментальные данные, приведенные Tang W. в работе [18], посвященной ударному взаимодействию конических инденторов с различными геометрическими параметрами и скоростями. На рис. 1 приведена фотография общего вида экспериментальной установки для определения параметров удара; на рис. 2 показана принци-

Таблица 1. Обозначения в формулах  
Table 1. Formula notations

Символы	Описание	Размерность
$F$	Контактная сила	Н
$2\beta$	Угол заострения конической головной части индентора	градус
$h$	Длина индентора	мм
$a$	Величина сближения контактирующих тел	мм
$V$	Начальная скорость удара	м/с
$F_{\max}$	Максимальная сила удара	Н
$A$	Энергия удара индентора	Дж
$A_y$	Энергия упругих деформаций	Дж
$A_n$	Энергия пластических деформаций	Дж
$\eta_y$	Величина доли энергии упругих деформаций в зоне контакта индентора и преграды	—
$\eta_n$	Величина доли энергии пластических деформаций в зоне контакта индентора и преграды	—

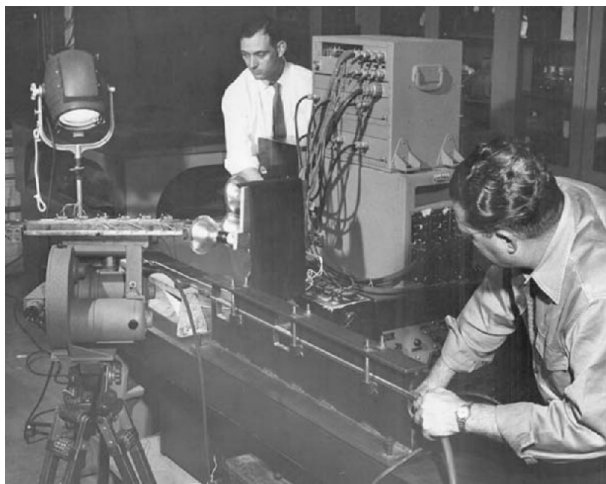


Рис. 1. Общий вид установки для проведения экспериментов по удару конических инденторов по плоским концам цилиндрических стержней [18]

Fig. 1. General view of the installation for conducting experiments on the impact of conical indenters on the flat ends of cylindrical rods [18]

пимальная схема данной экспериментальной установки.

Экспериментальная установка работает следующим образом. На прочном основании 1 установлена пневматическая пушка 2, способная разгонять индентор 3 (рис. 2) до скорости 115 м/с. Индентор 3 попадает в наковальню 4, передавая свою кинетическую энергию наковальне и далее массивному маятнику 5. Для настройки ударной системы маятник 5 можно передвигать по высоте вверх или вниз благодаря механизму подвеса 6. В результате удара массивный маятник поднимается в свое верхнее положение и далее совершает затухающие механические колебания вокруг точки подвеса 6. Резиновый амортизатор 7 препятствует колебаниям маятника и вскоре останавливает маятник. На заднем торце маятника точно по оси симметрии наковальни размещен измерительный блок акселерометров 8, подсоединенный к запоминающему осциллографу. Два лазерных датчика 9 при проведении эксперимента испускают лазерные лучи. По мере движения ин-

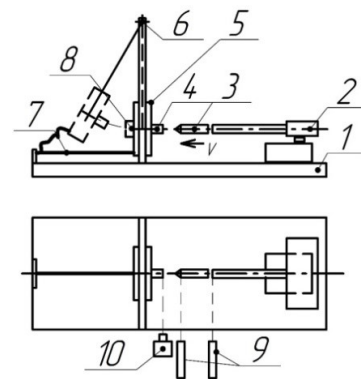


Рис. 2. Схема экспериментальной установки [18]: 1 — основание,

2 — пневматическая пушка, 3 — индентор, 4 — сменная наковальня (второе тело), 5 — массивный маятник, 6 — регулируемая по высоте подвеска маятника, 7 — демпфер (резиновый жгут), 8 — блок акселерометров, 9 — лазерные датчики, 10 — сверхскоростная кинокамера [18]

Fig. 2. Scheme of the experimental installation [18]: 1 — base; 2 — pneumatic gun; 3 — indenter; 4 — replaceable anvil (second body); 5 — massive pendulum; 6 — height-adjustable pendulum suspension; 7 — damper (rubber harness); 8 — accelerometer unit; 9 — laser sensors; 10 — ultrafast camera [18]

дентора в ходе опыта головная часть индентора пересекает лазерный луч ближайшего к обрезу ствола пушки лазерного датчика. При прерывании лазерного луча фотодатчик (на рисунке не показан) формирует управляющий сигнал для включения сверхскоростной кинокамеры 10, установленной точно в плоскости ударного торца наковальни 4. По разности времени прерывания лазерных лучей первого и второго лазерных датчиков 9 вычисляется скорость индентора во время текущего опыта. Вариан-

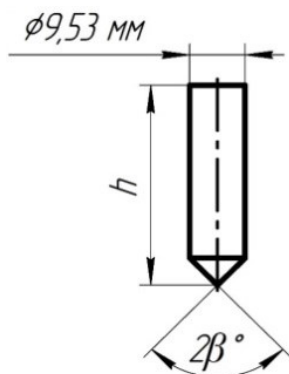


Рис. 3. Геометрические характеристики индентора.

$h = 37 \text{ мм}$  для  $\beta = 10^\circ$ ;

$h = 25 \text{ мм}$  для  $\beta = 30^\circ$ ;

$h = 21 \text{ мм}$  для  $\beta = 60^\circ$

Fig. 3. Geometrical features of the indenter:

$h = 37 \text{ mm}$  for  $\beta = 10^\circ$ ;

$h = 25 \text{ mm}$  for  $\beta = 30^\circ$ ;

$h = 21 \text{ mm}$  for  $\beta = 60^\circ$

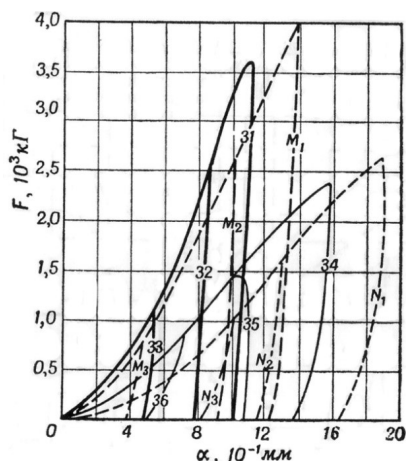


Рис. 4. Динамические и статические зависимости сила — глубина внедрения для случая удара конических цилиндрических инденторов по торцам цилиндрических стержней. Диаметр стержней 9,53 мм.

Угол при вершине —  $2\beta = 120^\circ$

Материалы индентора и преграды одинаковые [18]

Fig. 4. Dynamic and static force — depth of penetration dependences in case of tapered cylindrical indenters striking the ends of cylindrical rods. The diameter of the rods is 9.53 mm.

The angle at the apex —  $2\beta = 120^\circ$

The materials of the indenter and the barrier are the same [18]

ты исполнения конструкции индентора представлены на рис. 3.

На рис. 4–9 представлены экспериментальные диаграммы зависимостей сила — глубина внедрения при ударе и статическом контакте индентора о преграды, изготовленные из различных металлов. Результаты динамических и статических испытаний представлены в табл. 2, 3 [18].

Для решения практических задач при обработке металлов давлением часто целесообразно использовать энергетический метод. Например, для компен-

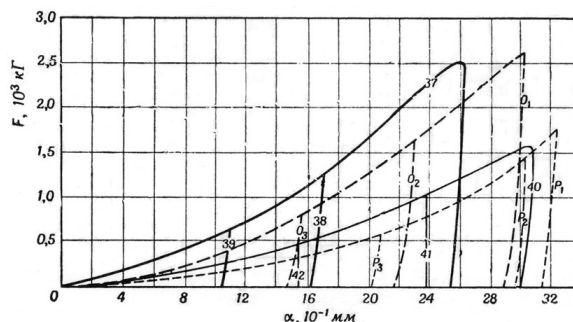


Рис. 5. Динамические и статические зависимости сила — глубина внедрения для случая удара конических цилиндрических инденторов по торцам цилиндрических стержней. Диаметр стержней 9,53 мм.

Угол при вершине —  $2\beta = 60^\circ$ .

Материалы индентора и преграды одинаковые [18]

Fig. 5. Dynamic and static force — depth of penetration dependences in case of conical cylindrical indenters striking the ends of cylindrical rods. The diameter of the rods is 9.53 mm. The angle at the apex —  $2\beta = 60^\circ$ .

The materials of the indenter and the barrier are the same [18]

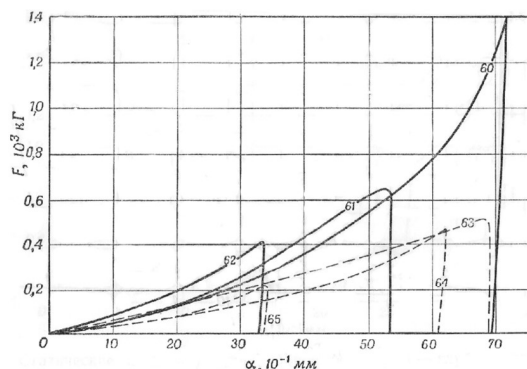


Рис. 6. Динамические и статические зависимости сила — глубина внедрения для случая удара конических цилиндрических инденторов по торцам цилиндрических стержней. Диаметр стержней 9,53 мм.

Угол при вершине —  $2\beta = 20^\circ$ .

Материалы индентора и преграды одинаковые [18]

Fig. 6. Dynamic and static force — depth of penetration dependences in case of conical cylindrical indenters striking the ends of cylindrical rods. The diameter of the rods is 9.53 mm. The angle at the apex —  $2\beta = 20^\circ$ .

The materials of the indenter and the barrier are the same [18]

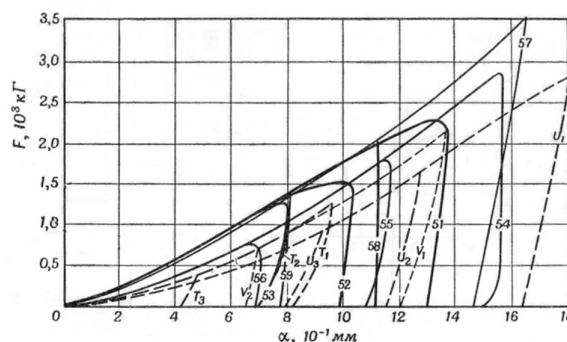


Рис. 7. Динамические и статические зависимости сила — глубина внедрения для случая удара конических цилиндрических инденторов по торцам цилиндрических стержней. Диаметр стержней 9,53 мм.

Угол при вершине —  $2\beta = 120^\circ$ .

Материалы индентора и преграды различные [18]

Fig. 7. Dynamic and static force — depth of penetration dependences in case of conical cylindrical indenters striking the ends of cylindrical rods. The diameter of the rods is 9.53 mm. The angle at the apex —  $2\beta = 120^\circ$ .

The materials of the indenter and the barrier are the same [18]



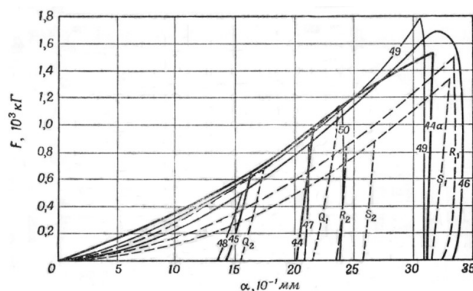


Рис. 8. Динамические и статические зависимости сила — глубина внедрения для случая удара конических цилиндрических инденторов по торцам цилиндрических стержней. Диаметр стержней 9,53 мм. Угол при вершине —  $2\beta = 60^\circ$ .

Материалы индентора и преграды различные [18]  
Fig. 8. Dynamic and static force — depth of penetration dependences in case of conical cylindrical indenters striking the ends of cylindrical rods. The diameter of the rods is 9.53 mm. The angle at the apex —  $2\beta = 60^\circ$ . The materials of the indenter and the barrier are the same [18]

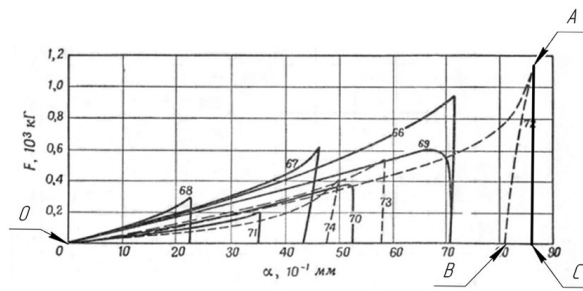


Рис. 9. Динамические и статические зависимости сила — глубина внедрения для случая удара конических цилиндрических инденторов по торцам цилиндрических стержней. Диаметр стержней 9,53 мм. Угол при вершине —  $2\beta = 20^\circ$ .

Материалы индентора и преграды различные [18]  
Fig. 9. Dynamic and static force — depth of penetration dependences in case of conical cylindrical indenters striking the ends of cylindrical rods. The diameter of the rods is 9.53 mm. The angle at the apex —  $2\beta = 20^\circ$ . The materials of the indenter and the barrier are the same [18]

Таблица 2. Исходные данные, рисунки 4, 5, 6  
Table 2. Initial data, Fig. 4, 5, 6

Номер опыта, динамика	Начальная скорость удара $V$ , м/с	Номер опыта, статика	Материал индентора	Материал преграды
31	57,4	$M_1$	Отожженная инструментальная сталь — HRC = 13,7; масса индентора — 10,8 г; $2\beta = 120^\circ$	Отожженная инструментальная сталь — HRC = 13,7
32	38,8	$M_2$		
33	20,4	$M_3$		
34	97,0	$N_1$	Дуралюмин 2024-T4 — HB = 80; масса индентора — 3,8 г; $2\beta = 120^\circ$	Дуралюмин 2024-T4 — HB = 80
35	63,0	$N_2$		
36	33,8	$N_3$		
37	74,0	$O_1$	Отожженная инструментальная сталь — HRC = 13,5; масса индентора — 10,8 г; $2\beta = 60^\circ$	Отожженная инструментальная сталь — HRC = 13,5
38	46,0	$O_2$		
39	22,5	$O_3$		
40	114,0	$P_1$	Дуралюмин 2024-T4 — HB = 80; масса индентора — 3,8 г; $2\beta = 60^\circ$	Дуралюмин 2024-T4 — HB = 75,5
41	74,5	$P_2$		
42	45,0	$P_3$		
60	84,0	—	Отожженная инструментальная сталь — HRC = 13,6; масса индентора — 10,8 г; $2\beta = 20^\circ$	Отожженная инструментальная сталь — HRC = 13,6
61	54,9	—		
62	38,6	—		
63	105,0	—	Дуралюмин 2024-T4 — HB = 80; масса индентора — 3,8 г; $2\beta = 20^\circ$	Дуралюмин 2024-T4 — HB = 80
64	82,0	—		
65	44,2	—		

сацией эффекта сжатия при операциях гибки металлических заготовок необходимо знать соотношение между упругими и пластическими деформациями в зоне гибки [19–20]. Используем данные, приведенные на рис. 4–9, для расчета соотношения энергий данных деформаций на основе принципа сохранения энергии.

С помощью системы трехмерного проектирования КОМПАС-3D была проведена оцифровка графиков, приведенных на рис. 4–9. Рассмотрим пример такой оцифровки графиков на примере рис. 9 (опыт 72).

Исходные данные для этого опыта приведены в табл. 3. Ось  $\alpha$ , показывающая величину сближения контактирующих тел, была разделена на отдельные отрезки, равные по величине 0,002 дюйма или 0,05 мм. Для каждого из этих значений  $\alpha$  опре-

делялась соответствующая величина действующей контактной силы  $F$  на оси абсцисс. В итоге были сформированы две матрицы с численными значениями сближения  $\alpha$  и контактной силы  $F$ . Далее строился отдельный график, описывающий дискретные значения зависимости  $F(\alpha)$ .

На рис. 9 видно, что график № 72 состоит из двух кривых — линии OA и линии AB. Кривая OA графически изображает функцию сжатия материалов индентора и преграды в зоне контакта; а линия AB характеризует функцию восстановления упругих параметров этих материалов в данной контактной зоне. Далее с помощью известных математических методов подбирались две интерполяционные функции для описания дискретных значений кривых OA и AB, удовлетворяющих математическим условиям интерполяции. Кривая OA описыва-

Таблица 3. Исходные данные, рисунки 7, 8, 9  
Table 3. Initial data, Fig. 7, 8, 9

Номер опыта, динамика	Начальная скорость удара $V$ , м/с	Номер опыта, статика	Материал индентора	Материал преграды
51	63,4	$T_1$	Отожженная инструментальная сталь — HRC = 17,0; масса индентора — 10,8 г; $2\beta = 120^\circ$	Дуралюмин 2024-T4 — HB = 82,0
52	40,8	$T_2$		
53	34,6	$T_3$		
54	89,3	$U_1$	Дуралюмин 2024-T4 — HB = 65,8; масса индентора — 3,8 г; $2\beta = 120^\circ$	Отожженная инструментальная сталь — HRC = 17,3
55	60,8	$U_2$		
56	30,4	$U_3$		
57	61,4	$V_1$	Латунь С26800 (Л68) — HB = 78,4; масса индентора — 11,6 г; $2\beta = 120^\circ$	Отожженная инструментальная сталь — HRC = 16,0
58	41,3	$V_2$		
59	27,2	—		
43	73,0	$Q_1$	Отожженная инструментальная сталь — HRC = 13,0; масса индентора — 10,8 г; $2\beta = 60^\circ$	Дуралюмин 2024-T4 — HB = 82
44	46,4	$Q_2$		
45	32,2	—		
46	108,0	$R_1$	Дуралюмин 2024-T4 — HB = 83,5; масса индентора — 3,8 г; $2\beta = 60^\circ$	Отожженная инструментальная сталь — HRC = 17,3
47	67,6	$R_2$		
48	38,0	—		
49	63,4	$S_1$	Латунь С26800 (Л68) — HB = 76; масса индентора — 11,6 г; $2\beta = 60^\circ$	Отожженная инструментальная сталь — HRC = 17,0
50	43,4	$S_2$		
66	84,6	—	Отожженная инструментальная сталь — HRC = 13,5; масса индентора — 10,8 г; $2\beta = 20^\circ$	Дуралюмин 2024-T4 — HB = 84,0
67	55,3	—		
68	24,5	—		
69	108,5	—	Дуралюмин 2024-T4 — HB = 65,7; масса индентора — 3,8 г; $2\beta = 20^\circ$	Отожженная инструментальная сталь — HRC = 17,0
70	77,9	—		
71	44,6	—		
72	76,4	—	Латунь С26800 (Л68) — HB = 79,0; масса индентора — 11,6 г; $2\beta = 20^\circ$	Отожженная инструментальная сталь — HRC = 17,0
73	56,6	—		
74	36,4	—		

ется выражением (1), и для кривой АВ интерполировано уравнение (2).

$$F_{OA} = 1,216 \cdot 10^9 \delta^{2,483} + 728,971, \quad (1)$$

$$F_{AB} = 5,362 \cdot 10^6 \delta^{0,039} - 4,453 \cdot 10^6. \quad (2)$$

Для определения работы, затраченной на сжатие материалов индентора и преграды в контактной зоне, необходимо определить площадь треугольника ОАС (рис. 9). Величина данной работы численно равна сумме энергий формирования упругих и пластических деформаций в зоне контакта. Соответственно, площадь треугольника АВС (рис. 9) численно равна работе, совершаемой упругими деформациями соударяющихся тел после окончания удара. Аналогичный расчетный прием используется при исследовании диаграмм, описывающих статическое контактное взаимодействие тел.

Для определения работы, совершаемой пластическими деформациями в контактной зоне, необходимо рассчитать разность площадей криволинейных треугольников ОАС и АВС. Для большего удобства вместо термина «работа» применим термин «Энергия формирования упругих деформаций —  $A_y$ » и «Энергия формирования пластических деформаций —  $A_n$ ».

Для проведения дальнейших расчетов запишем выражения (1) и (2) в общем виде:

$$F_{OA} = a_1 \delta^{a_2} + a_3, \quad (3)$$

$$F_{AB} = b_1 \delta^{b_2} + b_3. \quad (4)$$

Проинтегрируем выражения (3) и (4)

$$A_y + A_n = \int_0^{\delta_A} F_{OA} d\delta = \int_0^{\delta_A} (a_1 \delta^{a_2} + a_3) d\delta = \frac{a_1}{(a_2 + 1)} \delta_A^{(a_2 + 1)} + a_3 \delta_A, \quad (5)$$

$$A_y = \int_{\delta_B}^{\delta_A} F_{AB} d\delta = \frac{b_1}{(b_2 + 1)} \delta_A^{(b_2 + 1)} + b_3 \delta_A - \frac{b_1}{(b_2 + 1)} \delta_B^{(b_2 + 1)} - b_3 \delta_B. \quad (6)$$

Соответственно, энергия  $A_n$  будет определяться следующим выражением:

$$A_n = (A_y + A_n) - A_y. \quad (7)$$

Таблица 4. Силловые и энергетические характеристики взаимодействия индентора из отожжённой инструментальной стали с головной частью в виде конуса с различными углами при вершине с наковальней из различных материалов  
Table 4. Force and energy features of the interaction of the indenter made of annealed tool steel with a head part in the cone form with different angles at the apex with an anvil of different materials

Номер опыта	Энергия удара индентора — $A$ , Дж	Максимальная сила — $F_{max}$ , Н	Остаточное сближение — $a$ , мм	Энергия упругих деформаций — $A_y$ , Дж	Энергия пласт. деформаций — $A_n$ , Дж	Доля энергии упругих деформаций $n_y = \frac{A_y}{A_y + A_n}$	Доля энергии пластических деформаций $n_n = \frac{A_n}{A_y + A_n}$
Взаимодействие — сталь по стали, $2\beta = 120^\circ$							
31	17,792	34774	0,947	1,282	13,442	0,095	0,905
32	8,129	24491	0,719	1,030	6,883	0,150	0,850
33	2,247	11244	0,451	0,428	1,812	0,191	0,809
$M_1$	—	39124	1,211	1,958	19,176	0,093	0,907
$M_2$	—	26089	0,916	2,496	11,501	0,217	0,783
$M_3$	—	7473	0,373	0,403	1,407	0,286	0,714
Взаимодействие — сталь по стали, $2\beta = 60^\circ$							
37	29,570	26312	2,523	1,113	26,408	0,037	0,963
38	8,129	12905	1,620	0,507	7,608	0,062	0,938
39	2,473	6580	1,044	0,218	2,222	0,089	0,911
$O_1$	—	26869	2,882	1,257	28,408	0,042	0,958
$O_2$	—	16694	2,153	0,767	12,714	0,057	0,943
$O_3$	—	6505	1,037	0,121	1,678	0,067	0,933
Взаимодействие — сталь по стали, $2\beta = 20^\circ$							
60	38,102	13729	6,874	2,072	26,092	0,038	0,962
61	16,276	6654	5,155	0,651	12,531	0,053	0,947
62	8,046	4127	3,196	0,373	5,293	0,066	0,959
Взаимодействие — сталь по дуралюмину, $2\beta = 120^\circ$							
51	21,706	23263	1,203	0,642	14,887	0,041	0,896
52	8,989	15308	0,993	0,467	7,526	0,058	0,942
53	6,465	12498	0,700	0,419	4,427	0,086	0,914
$T_1$	—	11879	0,817	0,488	3,419	0,125	0,875
$T_2$	—	8029	0,685	0,455	2,068	0,180	0,820
$T_3$	—	3191	0,420	0,137	0,525	0,207	0,793
Взаимодействие — сталь по дуралюмину, $2\beta = 60^\circ$							
43	38,102	14340	3,110	0,393	19,969	0,019	0,981
44	16,276	9172	2,016	0,648	7,835	0,076	0,924
45	8,046	6070	1,442	0,544	4,050	0,118	0,882
$Q_1$	—	10694	2,156	1,055	8,406	0,112	0,888
$Q_2$	—	6359	1,542	0,556	3,588	0,134	0,866
Взаимодействие — сталь по дуралюмину, $2\beta = 20^\circ$							
66	38,649	9272	7,073	0,282	27,505	0,010	0,990
67	16,514	6177	4,332	0,819	10,554	0,072	0,928
68	3,241	2897	2,254	0,244	2,564	0,087	0,913

При практическом применении более удобно оперировать относительными величинами энергии деформаций.

$$n_y = \frac{A_y}{A_y + A_n}; n_n = \frac{A_n}{A_y + A_n} \quad (8)$$

$$n_y + n_n = 1. \quad (9)$$

Полученные величины энергии приведены в табл. 4, 5 и 6. В табл. 7 показаны полученные

функциональные зависимости силы  $F$  от скорости удара  $V$ , а также функции относительных величин энергии упругих деформаций  $n_y$  от скорости удара и ударной (статической) силы. Величины  $n_n$  легко определить из выражений (7–9). На рис. 10 и 11 приведены примеры графического описания полученных интерполяционных кривых, приведенных в табл. 7.

Интерполяционные выражения, приведенные в табл. 7, позволяют определить соотношения между величинами сближения и силы, возникающими в области контактной зоны взаимодействия инден-

Таблица 5. Силловые и энергетические характеристики взаимодействия индентора из дуралюмина с головной частью в виде конуса с различными углами при вершине с наковальней из различных материалов

Table 5. Force and energy features of the interaction of the duralumin indenter with a head part in the cone form with different angles at the apex with an anvil of different materials

Номер опыта	Энергия удара индентора — $A$ , Дж	Максимальная сила — $F_{max}$ , Н	Остаточное сближение — $\alpha$ , мм	Энергия упругих деформаций — $A_y$ , Дж	Энергия пласт. деформаций — $A_n$ , Дж	Доля энергии упругих деформаций $n_y = \frac{A_y}{A_y + A_n}$	Доля энергии пластических деформаций $n_n = \frac{A_n}{A_y + A_n}$
Взаимодействие — дуралюмин по дуралюмину, $2\beta = 120^\circ$							
34	17,877	23115	1,297	1,352	13,299	0,092	0,908
35	7,541	15980	0,986	0,801	5,454	0,128	0,872
36	2,171	8329	0,471	0,462	1,631	0,221	0,779
$N_1$	—	25508	1,541	1,803	15,790	0,102	0,898
$N_2$	—	15707	1,083	0,970	5,334	0,154	0,846
$N_3$	—	10100	0,777	0,783	2,407	0,245	0,755
Взаимодействие — дуралюмин по дуралюмину, $2\beta = 60^\circ$							
40	24,692	16571	2,988	0,706	18,229	0,037	0,963
41	10,545	10600	2,297	0,364	8,905	0,044	0,956
42	3,848	5036	1,498	0,161	2,965	0,052	0,948
$P_1$	—	17984	3,138	0,668	16,462	0,039	0,961
$P_2$	—	14738	2,931	0,591	13,101	0,043	0,957
$P_3$	—	6103	2,002	0,213	4,320	0,047	0,953
Взаимодействие — дуралюмин по дуралюмину, $2\beta = 20^\circ$							
63	22,162	5093	6,848	0,116	15,911	0,007	0,993
64	12,776	4533	6,093	0,194	9,601	0,020	0,980
65	3,712	2265	3,373	0,085	2,443	0,034	0,966
Взаимодействие — дуралюмин по стали, $2\beta = 120^\circ$							
54	15,152	28183	1,489	1,042	13,414	0,072	0,928
55	7,024	17622	1,069	0,678	6,512	0,104	0,896
56	1,756	7726	0,678	0,259	1,405	0,156	0,844
$U_1$	—	26979	1,632	1,830	16,680	0,079	0,921
$U_2$	—	15890	1,062	0,777	6,720	0,104	0,896
$U_3$	—	8373	0,801	0,465	2,719	0,146	0,854
Взаимодействие — дуралюмин по стали, $2\beta = 60^\circ$							
46	22,162	15777	3,313	1,009	19,652	0,049	0,951
47	8,683	8055	2,015	0,674	5,504	0,109	0,981
48	2,744	4725	1,365	0,479	2,208	0,178	0,822
$R_1$	—	13981	3,238	0,344	16,239	0,021	0,979
$R_2$	—	7917	2,354	0,460	6,372	0,067	0,933
Взаимодействие — дуралюмин по стали, $2\beta = 20^\circ$							
69	22,367	6677	7,047	0,405	20,216	0,020	0,980
70	11,530	3850	5,238	0,183	8,695	0,022	0,978
71	3,779	1961	3,494	0,072	2,905	0,024	0,976

тора и преграды. Задаваясь требуемыми значениями ударной скорости или ударной силы в пределах указанных диапазонов изменения скорости удара или силы можно оценить численные величины доли энергии как упругих  $n_y$ , так и пластических деформаций  $n_n$  в контактной зоне.

Коэффициент детерминации  $R^2$  показывает степень достоверности результатов интерполяционной формулы к имеющимся значениям экспериментальных данных.

Для наиболее достоверного случая коэффициент детерминации равен 1.

### Результаты теоретических исследований

При обработке металлов давлением известен физический процесс, который носит название «эффект пружинения». Углом пружинения при изгибе листовой заготовки или профилей называется угол  $\alpha$ , на который разгибается согнутый при прессовании до заданного угла  $\beta$  лист металла за счет его упругих свойств после снятия нагрузки. Используем вышеприведенные соотношения величин энергий упругих и пластических деформаций материала заготовки для расчета компенсации «эффекта пружинения».



Таблица 6. Силловые и энергетические характеристики взаимодействия индентора из латуни с головной частью в виде конуса с различными углами при вершине с наковальней из отожжённой инструментальной стали  
Table 6. Force and energy features of the interaction of the brass indenter with a head part in the cone form with different angles at the apex with an anvil of annealed tool steel

Номер опыта	Энергия удара индентора — $A$ , Дж	Максимальная сила — $F_{max}$ , Н	Остаточное сближение — $a$ , мм	Энергия упругих деформаций — $A_y$ , Дж	Энергия пласт. деформаций — $A_n$ , Дж	Доля энергии упругих деформаций $n_y = \frac{A_y}{A_y + A_n}$	Доля энергии пластических деформаций $n_n = \frac{A_n}{A_y + A_n}$
Взаимодействие — латунь по стали, $2\beta = 120^\circ$							
57	21,866	33873	1,457	3,014	17,525	0,147	0,853
58	9,893	20113	1,098	1,196	8,296	0,126	0,874
59	4,291	13112	0,752	0,472	4,087	0,104	0,896
$V_1$	—	20838	1,202	1,288	8,960	0,126	0,874
$V_2$	—	6632	0,650	0,135	1,597	0,078	0,922
Взаимодействие — латунь по стали, $2\beta = 60^\circ$							
49	23,313	16755	3,085	0,365	19,293	0,019	0,981
50	10,925	10473	2,385	0,109	9,986	0,011	0,989
$S_1$	—	12467	3,167	0,846	12,883	0,062	0,938
$S_2$	—	8255	2,574	0,382	6,915	0,052	0,948
Взаимодействие — латунь по стали, $2\beta = 20^\circ$							
72	33,854	11106	8,080	3,427	25,489	0,119	0,881
73	18,581	5286	5,765	1,409	12,456	0,102	0,898
74	7,685	4120	4,767	0,520	5,350	0,089	0,911

Таблица 7. Интерполяционные функции для расчета силы и относительной величины энергии упругих деформаций в зоне контакта конического индентора и наковальни при ударе и статическом нагружении  
Table 7. Interpolation functions for calculating the force and relative energy value of elastic deformations in the contact zone of the conical indenter and anvil at impact and static loading

Вид интерполяционной функции		Диапазоны изменения скорости удара $V$ (м/с) и силы $F$ (Н)	Коэффициент детерминации $R^2$
Взаимодействие — сталь по стали, $2\beta = 120^\circ$			
Динамика	$F = -357,023 + 613,353V + 0,11V^2$	$20,4 \leq V \leq 57,4$	0,999
	$n_y = 0,223 - 1 \cdot 10^{-3}V - 1,772 \cdot 10^{-5}V^2$		0,998
	$n_y = 0,212 - 1,172 \cdot 10^{-6}F - 6,410 \cdot 10^{-11}F^2$	$1 \cdot 10^4 \leq F \leq 4 \cdot 10^4$	0,990
Статика	$n_y = 0,290 + 3,157 \cdot 10^{-7}F - 1,384 \cdot 10^{-10}F^2$	$7 \cdot 10^3 \leq F \leq 4 \cdot 10^4$	0,961
Взаимодействие — сталь по стали, $2\beta = 60^\circ$			
Динамика	$F = 275,15 + 203,001V + 1,974V^2$	$22,5 \leq V \leq 74,0$	0,997
	$n_y = 0,12 - 2 \cdot 10^{-3}V + 5,798 \cdot 10^{-6}V^2$		0,999
	$n_y = 0,122 - 5,806 \cdot 10^{-6}F + 9,892 \cdot 10^{-11}F^2$	$5 \cdot 10^3 \leq F \leq 3 \cdot 10^4$	0,995
Статика	$n_y = 0,072 - 5,914 \cdot 10^{-7}F - 1,936 \cdot 10^{-11}F^2$	$5 \cdot 10^3 \leq F \leq 3 \cdot 10^4$	0,996
Взаимодействие — сталь по стали, $2\beta = 20^\circ$			
Динамика	$F = 17,68 + 52,57V + 1,321V^2$	$38,6 \leq V \leq 84,0$	0,999
	$n_y = 0,103 - 1 \cdot 10^{-3}V + 4,215 \cdot 10^{-6}V^2$		0,996
	$n_y = 0,087 - 6,045 \cdot 10^{-6}F + 1,823 \cdot 10^{-10}F^2$	$4 \cdot 10^3 \leq F \leq 1,4 \cdot 10^4$	0,986
Взаимодействие — сталь по дуралюмину, $2\beta = 120^\circ$			
Динамика	$F = -50,819 + 372,528V - 0,057V^2$	$33,0 \leq V \leq 65,0$	0,998
	$n_y = 0,131 - 3 \cdot 10^{-3}V + 1,782 \cdot 10^{-5}V^2$		0,997
	$n_y = 0,273 - 2,13 \cdot 10^{-5}F + 4,898 \cdot 10^{-10}F^2$	$1 \cdot 10^4 \leq F \leq 2,5 \cdot 10^4$	0,966
Статика	$n_y = 0,203 + 4,182 \cdot 10^{-6}F - 9,157 \cdot 10^{-10}F^2$	$3 \cdot 10^3 \leq F \leq 12 \cdot 10^3$	0,987
Взаимодействие — сталь по дуралюмину, $2\beta = 60^\circ$			
Динамика	$F = -38,825 + 191,867V + 0,081V^2$	$31,0 \leq V \leq 72,0$	0,998
	$n_y = 0,291 - 7 \cdot 10^{-3}V + 3,833 \cdot 10^{-5}V^2$		0,992
	$n_y = 0,262 - 2,801 \cdot 10^{-5}F + 7,603 \cdot 10^{-10}F^2$	$6 \cdot 10^3 \leq F \leq 1,5 \cdot 10^4$	0,983
Статика	$n_y = 0,145 + 1,22 \cdot 10^{-7}F - 3,047 \cdot 10^{-10}F^2$	$6 \cdot 10^3 \leq F \leq 1,1 \cdot 10^4$	0,997

Продолжение табл. 7  
Continuation of the Table 7.

Вид интерполяционной функции		Диапазоны изменения скорости удара $V$ (м/с) и силы $F$ (Н)	Коэффициент детерминации $R^2$
Взаимодействие — сталь по дуралюмину, $2\beta = 20^\circ$			
Динамика	$F = -124,275 + 80,612V + 0,413V^2$	$37,0 \leq V \leq 85,0$	0,983
	$n_y = 0,087 + 8,27 \cdot 10^{-4}V - 2,081 \cdot 10^{-5}V^2$		0,996
	$n_y = 0,080 + 7,722 \cdot 10^{-6}F - 1,693 \cdot 10^{-9}F^2$	$3 \cdot 10^3 \leq F \leq 1 \cdot 10^4$	0,983
Взаимодействие — дуралюмин по дуралюмину, $2\beta = 120^\circ$			
Динамика	$F = -113,226 + 268,077V - 0,283V^2$	$33,8 \leq V \leq 97,0$	0,999
	$n_y = 0,384 - 6 \cdot 10^{-3}V + 2,854 \cdot 10^{-5}V^2$		0,994
	$n_y = 0,374 - 2,162 \cdot 10^{-5}F + 4,091 \cdot 10^{-10}F^2$	$8 \cdot 10^3 \leq F \leq 2,6 \cdot 10^4$	0,996
Статика	$n_y = 0,485 - 3,007 \cdot 10^{-5}F + 5,938 \cdot 10^{-10}F^2$	$1 \cdot 10^4 \leq F \leq 2,6 \cdot 10^4$	0,991
Взаимодействие — дуралюмин по дуралюмину, $2\beta = 60^\circ$			
Динамика	$F = -159,131 + 115,978V + 0,291V^2$	$45,0 \leq V \leq 114,0$	0,996
	$n_y = 0,069 - 4,251 \cdot 10^{-4}V + 2,297 \cdot 10^{-6}V^2$		0,999
	$n_y = 0,061 - 1,841 \cdot 10^{-6}F + 2,428 \cdot 10^{-11}F^2$	$5 \cdot 10^3 \leq F \leq 1,7 \cdot 10^4$	0,997
Статика	$n_y = 0,046 + 3,677 \cdot 10^{-7}F - 4,191 \cdot 10^{-11}F^2$	$6 \cdot 10^3 \leq F \leq 1,8 \cdot 10^4$	0,996
Взаимодействие — дуралюмин по дуралюмину, $2\beta = 20^\circ$			
Динамика	$F = -40,66 + 61,998V - 0,121V^2$	$43,0 \leq V \leq 107,0$	0,992
	$n_y = 0,043 - 1,392 \cdot 10^{-4}V - 1,875 \cdot 10^{-6}V^2$		0,991
	$n_y = 0,048 - 5,223 \cdot 10^{-6}F + 7,853 \cdot 10^{-11}F^2$	$2 \cdot 10^3 \leq F \leq 5,5 \cdot 10^3$	0,997
Взаимодействие — дуралюмин по стали, $2\beta = 120^\circ$			
Динамика	$F = -68,833 + 234,668V + 0,926V^2$	$30,0 \leq V \leq 90,0$	0,999
	$n_y = 0,226 - 3 \cdot 10^{-3}V + 9,894 \cdot 10^{-6}V^2$		0,999
	$n_y = 0,21 - 7,784 \cdot 10^{-6}F + 1,037 \cdot 10^{-10}F^2$	$7 \cdot 10^3 \leq F \leq 2,9 \cdot 10^4$	0,998
Статика	$n_y = 0,209 - 8,952 \cdot 10^{-6}F + 1,54 \cdot 10^{-10}F^2$	$8 \cdot 10^3 \leq F \leq 2,8 \cdot 10^4$	0,997
Взаимодействие — дуралюмин по стали, $2\beta = 60^\circ$			
Динамика	$F = 124,781 + 91,963V + 0,481V^2$	$38,0 \leq V \leq 108,0$	0,997
	$n_y = 0,301 - 4 \cdot 10^{-3}V + 1,272 \cdot 10^{-5}V^2$		0,999
	$n_y = 0,299 - 3,064 \cdot 10^{-5}F + 9,466 \cdot 10^{-10}F^2$	$4 \cdot 10^3 \leq F \leq 1,7 \cdot 10^4$	0,994
Статика	$n_y = 0,234 - 2,886 \cdot 10^{-5}F + 9,784 \cdot 10^{-10}F^2$	$7 \cdot 10^3 \leq F \leq 1,5 \cdot 10^4$	0,998
Взаимодействие — дуралюмин по стали, $2\beta = 20^\circ$			
Динамика	$F = 36,094 + 27,127V + 0,310V^2$	$43,0 \leq V \leq 110,0$	0,998
	$n_y = 0,026 - 5,159 \cdot 10^{-5}V - 7,186 \cdot 10^{-8}V^2$		0,999
	$n_y = 0,026 - 1,369 \cdot 10^{-6}F + 6,103 \cdot 10^{-11}F^2$	$1,5 \cdot 10^3 \leq F \leq 7 \cdot 10^3$	0,999
Взаимодействие — латунь по стали, $2\beta = 120^\circ$			
Динамика	$F = 56,463 + 396,574V + 2,474V^2$	$26,0 \leq V \leq 63,0$	0,998
	$n_y = 0,201 - 2 \cdot 10^{-3}V - 1,114 \cdot 10^{-5}V^2$		0,999
	$n_y = 0,198 - 4,682 \cdot 10^{-6}F + 5,631 \cdot 10^{-11}F^2$	$1,2 \cdot 10^4 \leq F \leq 4 \cdot 10^4$	0,998
Статика	$n_y = 0,150 - 3,680 \cdot 10^{-6}F + 1,095 \cdot 10^{-11}F^2$	$6 \cdot 10^3 \leq F \leq 2,2 \cdot 10^4$	0,999
Взаимодействие — латунь по стали, $2\beta = 60^\circ$			
Динамика	$F = -12,832 + 194,857V + 1,110V^2$	$42,0 \leq V \leq 65,0$	0,999
	$n_y = -0,006 + 4 \cdot 10^{-4}V - 1,030 \cdot 10^{-7}V^2$		0,996
	$n_y = -0,002 + 1,290 \cdot 10^{-6}F - 5,902 \cdot 10^{-13}F^2$	$1,0 \cdot 10^4 \leq F \leq 1,9 \cdot 10^4$	0,991
Статика	$n_y = 0,029 + 3,129 \cdot 10^{-6}F - 3,661 \cdot 10^{-11}F^2$	$7 \cdot 10^3 \leq F \leq 1,3 \cdot 10^4$	0,992
Взаимодействие — латунь по стали, $2\beta = 20^\circ$			
Динамика	$F = 182,761 + 35,035V + 1,323V^2$	$42,0 \leq V \leq 65,0$	0,983
	$n_y = 0,074 + 2,383 \cdot 10^{-4}V + 4,623 \cdot 10^{-6}V^2$		0,999
	$n_y = 0,052 + 1,144 \cdot 10^{-5}F - 4,92 \cdot 10^{-10}F^2$	$4,0 \cdot 10^3 \leq F \leq 1,2 \cdot 10^4$	0,985

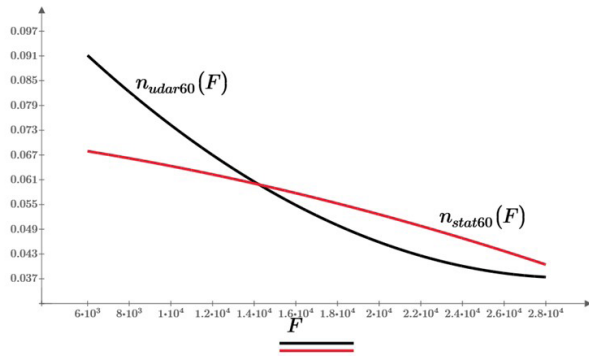


Рис. 10. Пример построения интерполяционных кривых на основе данных табл. 7. Взаимодействие сталь по стали. Угол заострения конуса индентора — 60°.  $n_{udar60}(F)$  — график ударного взаимодействия;  $n_{stat60}(F)$  — график статического взаимодействия  
Fig. 10. Example of interpolation curves based on the Table 7 data. Steel-on-steel interaction. The angle of sharpening of the indenter cone is 60°.  $n_{udar60}(F)$  — impact interaction graph;  $n_{stat60}(F)$  — static interaction graph

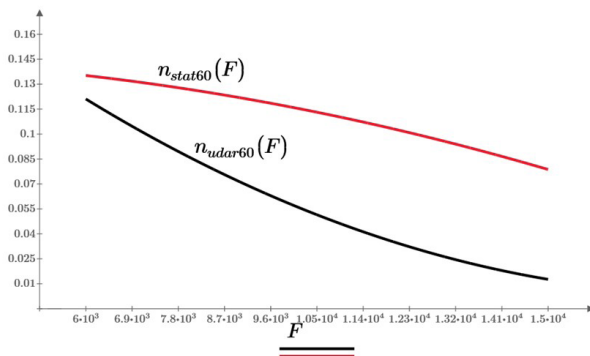


Рис. 11. Пример построения интерполяционных кривых на основе данных таблицы 7. Взаимодействие сталь по дуралюмину. Угол заострения конуса индентора — 60°.  $n_{udar60}(F)$  — график ударного взаимодействия;  $n_{stat60}(F)$  — график статического взаимодействия  
Fig. 11. Example of interpolation curves based on the Table 7 data. Steel on duralumin interaction. The angle of sharpening of the indenter cone is 60°.  $n_{udar60}(F)$  — impact interaction graph;  $n_{stat60}(F)$  — static interaction graph

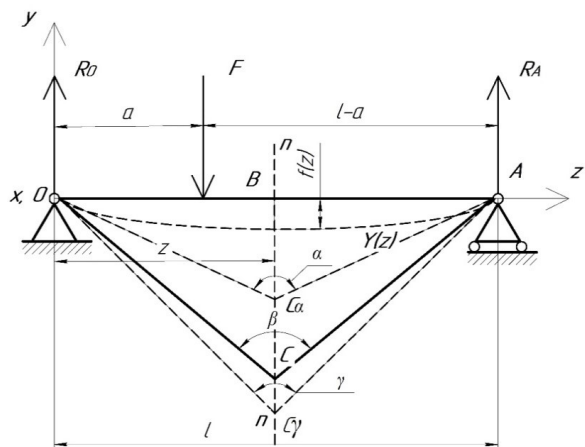


Рис. 12. Расчетная схема изгиба листовой заготовки ОА на основе примера расчета изгиба двухопорной статически определяемой балки  
Fig. 12. Calculation scheme of OA sheet bending based on the example of bending calculation of a two-supported statically determinate beam

Расчетная схема изгиба листовой заготовки приведена на рис. 12. Отрезок ОА обозначает начальное положение листа заготовки. Линия ОС<sub>а</sub> показывает заданное конечное положение готовой детали. Линия ОС<sub>а</sub> показывает фактическое конечное положение готовой детали вследствие эффекта пружинения. На основании материалов справочника [21] запишем уравнение поперечного изгиба  $Y(z)$  и максимального прогиба  $f(z)$  нейтральной линии заготовки ОА. Для условия  $0 \leq z \leq a$  при  $0 \leq a \leq 0,5l$  получим уравнение:

$$Y(z) = -\frac{Fa^2(l-a)^2}{6E_2J_2l} \left[ 2\frac{z}{a} + \frac{z}{l-a} - \frac{z^3}{a^2(l-a)} \right]. \quad (10)$$

Для условия  $a \leq z \leq l$  получим:

$$Y(z) = -\frac{Fa^2(l-a)^2}{6E_2J_2l} \left[ 2\frac{l-z}{l-a} + \frac{l-z}{a} - \frac{(l-z)^3}{a(l-a)^2} \right]. \quad (11)$$

Значение максимального прогиба  $f(z)$  вычисляется уравнением:

$$f(z) = -\frac{F(l-a)l^2\sqrt{3}}{27E_2J_x} \sqrt{\left(1 - \frac{(l-a)^2}{l^2}\right)^3},$$

при  $z = \sqrt{\frac{l^2 - (l-a)^2}{3}}. \quad (12)$

Тогда работа необходимая для изгиба заготовки на величину  $f(z)$  равна

$$A = Ff(z) = -\frac{F^2(l-a)l^2\sqrt{3}}{27E_2J_x} \sqrt{\left(1 - \frac{(l-a)^2}{l^2}\right)^3},$$

при  $z = \sqrt{\frac{l^2 - (l-a)^2}{3}}. \quad (13)$

Примем допущение, что вся энергия формоизменения заготовки ОА расходуется только на формирование упругих и пластических деформаций в плоскости изгиба листа  $n-n$ , т.е. в точке С. Заметим, что на рис. 6 приведена проекция заготовки в плоскости  $YZ$ . В действительности в точке С расположена линия изгиба листа ОА, и эта линия направлена вдоль оси  $X$ , т.е. в глубину рис. 12.

Как видно из рис. 12, для компенсации эффекта пружинения необходимо изогнуть лист ОА до линии ОС<sub>а</sub>, чтобы далее заготовка вернулась на линию ОС<sub>а</sub>, которая показывает заданное конечное положение готовой детали. Иными словами, для компенсации эффекта пружинения необходимо затратить дополнительную энергию  $\Delta A$ . Запишем выражение с учетом уравнений (8) и (9).

$$\frac{A_y + \Delta A_y}{A + \Delta A} + \frac{A_n + \Delta A_n}{A + \Delta A} = 1. \quad (14)$$

Основным условием выражения (14) является то, что энергия дополнительных пластических деформаций должна полностью компенсировать энергию упругих деформаций, которые вызывают эффект пружинения.

$$\Delta A_n = A_y = A_{n_y}, \quad (15)$$

$$\frac{A_y + \Delta A_y}{A + \Delta A} + \frac{A_n + A_{n_y}}{A + \Delta A} = 1. \quad (16)$$

Примем допущение, что при малом увеличении силы, а соответственно, и малом увеличении общей энергии деформации соотношение между энергиями упругих и пластических деформаций остается неизменным. Тогда получим следующие выражения.

$$\frac{A_n + An_y}{A + \Delta A} = n_n, \quad \frac{A_n}{A} = n_n, \quad (17)$$

$$\frac{An_n + An_y}{A + \Delta A} = n_n, \quad (18)$$

$$\Delta A = A \frac{n_y}{n_n} = A \frac{(1 - n_n)}{n_n}, \quad (19)$$

$$A + \Delta A = A \left[ 1 + \frac{(1 - n_n)}{n_n} \right]. \quad (20)$$

С учетом выражения (13) можно записать:

$$A = F_A f(z) \text{ и } A + \Delta A = F_{A+\Delta A} f(z). \quad (21)$$

Раскрыв функцию  $f(z)$  и решая выражения (21), совместно получим:

$$F_{A+\Delta A}^2 = F^2 \left[ 1 + \frac{(1 - n_n)}{n_n} \right], \quad (22)$$

$$F_{A+\Delta A} = F \frac{1}{\sqrt{n_n}}. \quad (23)$$

Таким образом, используя данные, приведенные в табл. 4–7, можно рассчитать режимы компенсации эффекта пружинения.

### Выводы и заключение

При анализе полученных данных, представленных на рис. 4–12 и в табл. 4–7, можно сделать следующие выводы.

1. Получено цифровое описание экспериментальных графиков [18], которое позволяет определить соотношение между величинами упругих и пластических деформаций в контактной зоне конического индентора и наковальни при динамическом и статическом нагружении в зависимости от величины действующей силы.

2. Полученные данные необходимо использовать при проектировании штампов и матриц при обработке материалов давлением. Особенно это актуально при проведении технологических операций получения профильных деталей из стального и дюралюминиевого листового материала на основе применения бесформенной многоточечной формовки. Это современная гибкая технология обработки листовых заготовок и пластин, при которой штамп и матрица состоят из равномерно расположенного по площади листовой заготовки большого количества вертикально установленных стержней. За счет изменения высоты данных стержней в режиме реального времени создается дискретная трехмерная поликонтактная формообразующая поверхность для получения трехмерного листового изделия.

3. В дальнейшем предполагается проанализировать величины упругих и пластических деформаций в контактной зоне конического индентора и наковальни для случаев, когда вершины конических инденторов имеют закругления различного радиуса.

### Список источников / References

1. Johnson K. L. Contact mechanics. University of Cambridge, Cambridge University Press, 1985. 462 p. DOI: 10.1017/CBO9781139171731.
2. Goldsmith W. Impact: The theory and physical behavior of colliding solids. London: Arnold, 1960. 379 p.
3. Stronge W. J. Impact mechanics. University of Cambridge, Cambridge University Press, 2000. 300 p.
4. Александров Е. В., Соколинский В. Б. Прикладная теория и расчеты ударных систем: моногр. Москва: Наука, 1969. 201 с.
5. Aleksandrov E. V., Sokolinskiy V. B. Prikladnaya teoriya i raschety udarnykh sistem [Applied theory and calculations of impact systems]. Moscow, 1969. 201 p. (In Russ.).
5. Popov V. L. Contact Mechanics and Friction. Physical Principles and Applications. Springer—Verlag, 2010. 362 p.
6. Meyers M. Dynamic Behavior of Materials. John Wiley & Sons, Inc, 1994. 688 p. ISBN 978-0-471-58262-5.
7. Herz H. Gesammelte Werke. Band 1. Schriften vermischten inhalts. Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1895. S. 155.
8. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости / пер. с англ. М. И. Рейтмана; под ред. Г. С. Шапиро. Москва: Наука, 1975. 576 с.
9. Timoshenko S. P., Gud'yer Dzh. Teoriya uprugosti [Theory of elasticity] / trans. from Engl. M. I. Reytmán; ed. by G. S. Shapiro. Moscow, 1975, 576 p. (In Russ.).
9. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. Москва: Наука, 1976. 608 с.
10. Belyayev N. M. Soprotivleniye materialov [Resistance of materials]. Moscow, 1976. 608 p. (In Russ.).
10. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. Москва: Физматлит, 2001. 704 с.
11. Ishlinskiy A. Yu., Ivlev D. D. Matematicheskaya teoriya plastichnosti [Mathematical theory of plasticity]. Moscow, 2001. 704 p. (In Russ.).
11. Goldsmith W., Lyman P. The penetration of hard—steel spheres into plane metal surfaces. *Journal of Applied Mechanics*. 1960. Vol. 27. P. 717—725. DOI: 10.1115/1.3644088.
12. Чернявский Д. И., Чернявский Д. Д. Исследование динамических характеристик удара двух твердых деформируемых тел при скорости удара до 100 м/с // Омский научный вестник. 2021. № 5 (179). С. 5—14. DOI: 10.25206/1813-8225-2021-179-5-14. EDN: BBYOHG.
12. Chernyavskiy D. I., Chernyavskiy D. D. Issledovaniye dinamicheskikh kharakteristik udara dvukh tverdykh deformiruyemykh tel pri skorosti udara do 100 m/s [Study of dynamic impact characteristics of two solid deformable bodies at impact speed up to 100 m/s]. *Omskiy nauchnyy vestnik. Omsk Scientific Bulletin*. 2021. No. 5 (179). P. 5—14. DOI: 10.25206/1813-8225-2021-179-5-14. EDN: BBYOHG. (In Russ.).
13. Beskopylny A., Veremeenko A., Kadomtseva E., Shilov A. Dynamic response of a plate laying on elastic base during the impact of f conical indenter. *MATEC Web of Conferences*. 2018. Vol. 196. 01001. DOI: 10.1051/mateconf/201819601001.
14. Dubey R. Ballistic impact response of thermo-mechanically processed Al alloy (6082): the Thesis. Indian Institute of Technology. Madras, 2023. 288 p.
15. Backman M., Goldsmith W. The mechanics of penetration of projectiles into targets. *International Journal of Engineering Science*. 1978. Vol. 16. P. 1—99. DOI: 10.1016/0020-7225(78)90002-2.
16. Borvik T., Olovsson L., Dey S., Langseth M. Normal and oblique impact of small arms bullets on AA6082-T4 aluminium protective plates. *International Journal of Impact Engineering*. 2011. Vol. 38 (7). P. 577—589. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2011.02.001.
17. Forrestal M., Warren T. Perforation equations for conical and ogival nose rigid projectiles into aluminum target plates. *International Journal of Impact Engineering*. 2009. Vol. 36 (2). P. 220—225. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2008.04.005.



18. Tang W. The Penetration of Conical Indenters with Hemispherical Tips into Plane Metal Surfaces: the Thesis (M.S.). University of California. Berkeley, 1962.

19. Чернявский Д. И., Чернявский Д. Д. Исследование упругопластического изгиба листовой заготовки различной толщины при ее вальцевании // Омский научный вестник. 2023. № 2 (186). С. 44–54. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-186-44-54. EDN: WSRGEE.

Chernyavskiy D. I., Chernyavskiy D. D. Issledovaniye uprugoplasticheskogo izgiba listovoy zagotovki razlichnoy tolshchiny pri eye val'tsevanii [Study elastoplastic bending of a sheet blank of different thickness while rolling]. Omskiy nauchnyy vestnik. *Omsk Scientific Bulletin*. 2023. No. 2 (186). P. 44–54. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-186-44-54. EDN: WSRGEE. (In Russ.).

20. Чернявский Д. И., Чернявский Д. Д. Исследование упругопластического изгиба листовой заготовки различной толщины при ее гибке с учетом эффекта пружинения // Омский научный вестник. 2024. № 2 (190). С. 5–14. DOI: 10.25206/1813-8225-2024-190-5-14. EDN: VQZRG1.

Chernyavskiy D. I., Chernyavskiy D. D. Issledovaniye uprugoplasticheskogo izgiba listovoy zagotovki razlichnoy tolshchiny pri eye gibke s uchetom effekta pruzhineniya [Study of elastoplastic bending of sheet blank of different thickness at its bending taking into account the springing effect]. Omskiy nauchnyy vestnik. *Omsk Scientific Bulletin*. 2024. No. 2 (190). P. 5–14. DOI: 10.25206/1813-8225-2024-190-5-14. EDN: VQZRG1. (In Russ.).

21. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. 2-е изд., перераб. и доп. Киев: Наукова думка, 1988. 736 с.

Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveyev V. V. Spravochnik po soprotivleniyu materialov [Handbook of Strength of Materials]. 2nd ed. Kyiv, 1988. 736 p. (In Russ.).

**ЧЕРНЯВСКИЙ Дмитрий Иванович**, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры

«Машиноведение» Омского государственного технического университета, г. Омск.

SPIN-код: 8610-2957

AuthorID (РИНЦ): 473365

ORCID: 0000-0002-7585-433X

AuthorID (SCOPUS): 6506002416

ResearcherID: N-2038-2015

Адрес для переписки: maneg1@omgtu.ru

**Прозрачность финансовой деятельности:** автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.

Статья поступила в редакцию 31.01.2025; одобрена после рецензирования 23.04.2025; принята к публикации 29.04.2025.

**CHERNYAVSKY Dmitry Ivanovich**, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Mechanical Engineering Department, Omsk State Technical University, Omsk.

SPIN-code: 8610-2957

AuthorID (RCSI): 473365

ORCID: 0000-0002-7585-433X

AuthorID (SCOPUS): 6506002416

ResearcherID: N-2038-2015

Correspondence address: maneg1@omgtu.ru

**Financial transparency:** the author has no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.

The article was submitted 31.01.2025; approved after reviewing 23.04.2025; accepted for publication 29.04.2025.