



СИНТЕЗ АДАПТИВНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАЧИ С АРОЧНЫМИ ЗУБЬЯМИ С ДВУМЯ ЗОНАМИ КОНТАКТА

Цилиндрические передачи с арочными зубьями обладают требуемой работоспособностью в условиях как нежестких корпусов машин, так и неизбежных погрешностей изготовления и сборки. Компенсация погрешностей осуществляется путем самоустановки колес, возможности которой в передачах с одной линией зацепления ограничены. В статье исследуется адаптивная передача с арочными зубьями с двумя зонами контакта, обеспечивающая самоустановку колес независимо от величины угла перекоса зубьев в зацеплении. Рассмотрен наиболее перспективный, в плане реализации в промышленности, способ нарезания арочных зубьев круговой резцовой головкой методом обката с единичным делением на станках ЧПУ. Решены и проиллюстрированы на примерах задачи расчета параметров процесса формообразования поверхностей арочных зубьев, обеспечивающих в зацеплении зубьев прохождение двух активных действующих линий через заданные центры пятен контакта и требуемый для реализации приближенного характера зацепления закон изменения передаточной функции.

Ключевые слова: цилиндрическая передача, арочные зубья, две зоны контакта, синтез геометрии, адаптивная передача, передаточная функция.

Введение. Вследствие линейного характера касания прямых, косых и шевронных зубьев цилиндрических эвольвентных зубчатых передач они очень чувствительны к углу перекоса осей шестерни и колеса [1–3]. При наличии этого угла функция положения в передаче приобретает пилообразную форму [1, 4], вход зубьев в зацепление происходит с ударом, вследствие чего возникают вибрации и шум передач. Более того, перекося поверхностей зубьев приводит к выходу площадок контакта на край зуба, концентрации контактных напряжений и преждевременному выходу передач из строя [1–3]. Обеспечить требуемую работоспособность в этих условиях эксплуатации позволяют передачи с арочной (криволинейной, круговой) формой зубьев (рис. 1), исследование которых начато в СССР и за рубежом во второй половине прошлого столетия [2, 3, 5] и продолжается в настоящее время как в России [2, 3, 6–11], так и за рубежом [1, 5, 12], особенно активно — в Китайской Народной Республике [13–24].

Основным преимуществом колес с арочными зубьями является то, что локализация контакта зацепления их активных поверхностей, как в продольном, так и профильном направлениях достигается в процессе изготовления одного из колес. Кроме того, повышенная изгибная прочность арочных зубьев, отсутствие осевых сил в передаче, улучшенные условия смазки и способность к самоустановке колес определяют эффективность применения цилиндрических передач с арочными зубья-

ми в высоконагруженных приводах современных машин.

Известен опыт использования этих передач в приводах цементного оборудования и прокатных станов [1], редукторах ветряных мельниц [5], шестеренчатых насосах и редукторах станков-качалок [10], конечных передач локомотивов и тракторов [2, 3]. К настоящему времени предложено полтора десятка способов изготовления арочных зубьев, отличающихся формообразующими движениями и инструментами [2, 5] и, как следствие, геометрическими параметрами активных поверхностей арочных зубьев. Характеристика способов предложенных в основном зарубежными учеными, представлена в работе [5], а разработанных в СССР и РФ — в работах [2, 3].

Главное назначение арочных зубьев — компенсировать угол перекоса путем осевого перемещения (самоустановки) одного из колес. В шевронных передачах этот процесс, вследствие значительного угла наклона зубьев, легко реализуется, а в передачах с арочными зубьями, как показано в работах [2, 3], из-за смещения рабочей линии по поверхности арочного зуба в зону с малым углом его наклона, самоустановка колеса существенно ограничена. Для решения этой проблемы предложена адаптивная передача [8] с арочными зубьями, в которой, по аналогии с шевронной передачей, реализуются две зоны контакта. Настоящая статья посвящена определению параметров процесса формообразования арочных зубьев такой передачи, исследованию

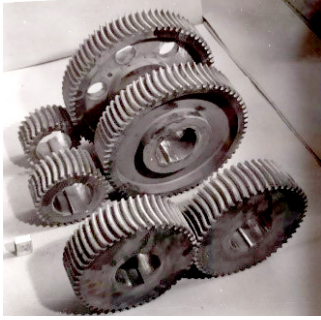


Рис. 1. Цилиндрические передачи с арочными зубьями и схема нарезания зубьев резцовой головкой

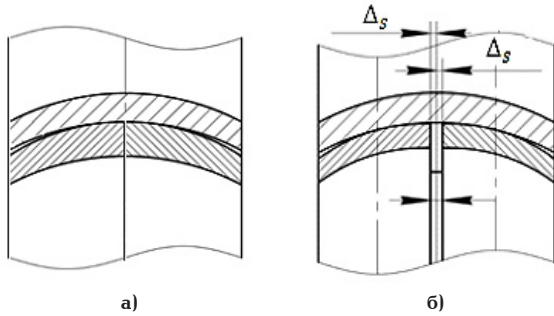


Рис. 2. Схема образования передачи с разнесенными зонами контакта

и получению требуемых геометрических и кинематических ее характеристик.

Определение геометрических параметров цилиндрических передач с арочными зубьями, обеспечивающих в их зацеплении две зоны контакта. Следуя способу [8, 11] образования в зацеплении арочных зубьев двух, разнесенных по их длине, зон контакта, колесо передачи выполняется сборным, состоящим из двух полуколес. Нарезание арочных зубьев выполняется при жестком закреплении полуколес друг относительно друга (рис. 2а), а при установке полуколес на валу между ними устанавливается прокладка, обеспечивающая смещение контактной линии из среднего сечения арочного зуба в середину зуба каждого из полуколес (рис. 2б).

В результате получается передача, подобная шевронной, но с точечным начальным контактом зубьев в зацеплении. В шевронной передаче за счет уравнивания направленных друг против друга осевых сил в зацеплениях полушевронов происходит самоустановка колес. Рассмотренный способ позволяет получить аналогичный эффект в зацеплении арочных зубьев цилиндрических передач для любого процесса их формообразования.

Среди предложенных и исследованных к настоящему времени многочисленных способов изготовления арочных зубьев цилиндрических колес [2, 3, 5], учитывая возможности современных станков с программным управлением, наиболее перспективным, с позиций использования в практике, является формообразование арочных зубьев круговой резцовой головкой методом обката с единичным делением [2, 3, 5, 6, 10], в процессе которого резцовая головка согласованно с поворотом заготовки вращается вокруг своей оси вращения совершает поступательное перемещение в направлении, перпендикулярном этой

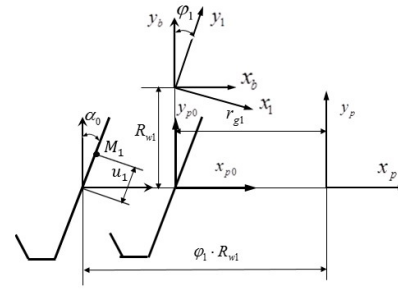


Рис. 3. Системы координат для определения элементов матрицы $\tilde{A}_{i,p}(\varphi_1)$

оси. Поверхность арочного зуба является однопараметрической огибающей семейства производящей поверхности круговой резцовой головки, ее математические модели построены в работе [7]. Для этого способа рассмотрим определение геометрических параметров передачи с двумя зонами контакта в зацеплении арочных зубьев.

В системе координат $S_p(x_p, y_p, z_p)$, жестко связанной с резцовой головкой, проекции координат x_p, y_p, z_p радиуса-вектора $\vec{r}_p$ производящей поверхности (прямого кругового конуса) и проекции m_{xp}, m_{yp}, m_{zp} ее орта нормали $\vec{m}_p$, описаны формулами [7]:

$$\begin{aligned} x_p &= \cos \vartheta_1 (u_1 \cdot \sin \alpha_0 - r_{g1}); \quad y_p = u_1 \cdot \cos \alpha_0; \\ z_p &= \sin \vartheta_1 (u_1 \cdot \sin \alpha_0 - r_{g1}); \\ m_{px} &= \cos \alpha_0 \cdot \cos \vartheta_1; \quad m_{py} = -\sin \alpha_0; \\ m_{pz} &= \cos \alpha_0 \cdot \sin \vartheta_1, \end{aligned} \quad (1)$$

где u_1, ϑ_1 — линейный и угловой параметры текущей точки M_1 (рис. 3) прямого кругового конуса при обработке вогнутой поверхности арочного зуба шестерни; α_0 — угол профиля исходного производящего контура; r_{g1} — расчетный радиус резцовой головки.

В процессе нарезания арочного зуба система координат $S_p(x_p, y_p, z_p)$ относительно системы координат $S_1(x_1, y_1, z_1)$, жестко связанной с шестерней, совершает в зависимости от угла поворота φ_1 (параметр обкатки) шестерни вокруг оси z_1 при формообразовании арочного зуба, движения, описываемые (рис. 3) матрицей перехода $\tilde{A}_{i,p}(\varphi_1)$. Поверхность арочного зуба в этом случае является однопараметрической огибающей семейства производящих поверхностей [7]:

$$\begin{aligned} \vec{r}_i(u_1, \vartheta_1, \varphi_1) &= \tilde{A}_{i,p}(\varphi_1) \cdot \vec{r}_p(u_1, \vartheta_1); \\ \vec{m}_i(\vartheta_1, \varphi_1) &= \tilde{A}_{i,p}(\varphi_1) \cdot \vec{m}_p(\vartheta_1); \\ f_i(u_1, \vartheta_1, \varphi_1) &= \\ &= \vec{m}_p(\vartheta_1) \cdot \tilde{A}_{i,p}^{-1}(\varphi_1) \frac{d\tilde{A}_{i,p}(\varphi_1)}{d\varphi_1} \vec{r}_p(u_1, \vartheta_1) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\vec{r}_i(u_1, \vartheta_1, \varphi_1), \vec{r}_p(u_1, \vartheta_1), \vec{m}_p(\vartheta_1), \vec{m}_i(\vartheta_1, \varphi_1)$ — матрицы столбцы, составленные соответственно из проекций координат $x_1, y_1, z_1; x_p, y_p, z_p; m_{xp}, m_{yp}, m_{zp}$ и m_{x1}, m_{y1}, m_{z1} — радиусов-векторов $\vec{r}_1, \vec{r}_p$, орта нормали $\vec{m}_p$, орта нормали $\vec{m}_1$ поверхности арочного зуба шестерни; $f_i(u_1, \vartheta_1, \varphi_1) = 0$ — уравнение связи параметров (уравнение станочного зацепления при формообразовании арочного зуба шестерни).

Раскрывая (2), выпишем проекции x_1 , y_1 , z_1 радиуса-вектора $\vec{r}_1$ вогнутой поверхности арочного зуба шестерни:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos \varphi_1 - B_1 \sin \varphi_1; \\ y_1 &= A_1 \sin \varphi_1 + B_1 \cos \varphi_1; \quad z_1 = C_1 \sin \vartheta_1; \\ f_1(u_1, \vartheta_1, \varphi_1) &= \\ &= D_1 \cos \vartheta_1 - P_1 \sin \alpha_0 + r_{g1} \sin \alpha_0 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь введены обозначения: $A_1 = C_1 \cos \vartheta_1 - P_1 + r_{g1}$; $B_1 = u_1 \cdot \cos \alpha_0 - R_{w1}$; $C_1 = u_1 \cdot \sin \alpha_0 - r_{g1}$; $P_1 = \varphi_1 R_{w1}$; $D_1 = u_1 - r_{g1} \sin \alpha_0$; R_{w1} — радиус начальной окружности шестерни.

Проекции m_{x1} , m_{y1} , m_{z1} орта нормали $\vec{m}_1$ поверхности (2) в системе $S_1(x_1, y_1, z_1)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} m_{x1} &= \cos \varphi_1 \cos \alpha_0 \cos \vartheta_1 + \sin \varphi_1 \sin \alpha_0; \\ m_{y1} &= \sin \varphi_1 \cos \alpha_0 \cos \vartheta_1 - \cos \varphi_1 \sin \alpha_0; \\ m_{z1} &= \cos \alpha_0 \sin \vartheta_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Проекции x_2 , y_2 , z_2 радиуса-вектора $\vec{r}_2$ выпуклой поверхности арочного зуба колеса в системе координат $S_2(x_2, y_2, z_2)$, жестко связанной с колесом, по аналогии с (2), описываются зависимостями [7]:

$$\begin{aligned} x_2 &= A_2 \cos \varphi_2 + B_2 \sin \varphi_2; \\ y_2 &= -A_2 \sin \varphi_2 + B_2 \cos \varphi_2; \quad z_2 = C_2 \sin \vartheta_2; \\ f_2(u_2, \vartheta_2, \varphi_2) &= \\ &= D_2 \cos \vartheta_2 - P_2 \sin \alpha_0 + r_{g2} \sin \alpha_0 = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $A_2 = C_2 \cos \vartheta_2 - P_2 + r_{g2}$, $B_2 = u_2 \cdot \cos \alpha_0 + R_{w2}$; $C_2 = u_2 \cdot \sin \alpha_0 - r_{g2}$; $P_2 = \varphi_2 R_{w2}$; $D_2 = u_2 - r_{g2} \sin \alpha_0$; u_2 , ϑ_2 — линейный и угловой параметры производящей поверхности при обработке поверхности зуба колеса; φ_2 — угол поворота колеса в станочном зацеплении; r_{g2} — расчетный радиус резцовой головки при нарезании выпуклой стороны арочных зубьев колеса; R_{w2} — радиус начальной окружности колеса; $f_2(u_2, \vartheta_2, \varphi_2) = 0$ — уравнение станочного зацепления при формообразовании поверхности зуба колеса.

Для проекций m_{x2} , m_{y2} , m_{z2} орта нормали $\vec{m}_2$ поверхности (3) в системе $S_2(x_2, y_2, z_2)$ получены выражения:

$$\begin{aligned} m_{x2} &= \cos \varphi_2 \cos \alpha_0 \cos \vartheta_2 + \sin \varphi_2 \sin \alpha_0; \\ m_{y2} &= \sin \varphi_2 \cos \alpha_0 \cos \vartheta_2 - \cos \varphi_2 \sin \alpha_0; \\ m_{z2} &= \cos \alpha_0 \sin \vartheta_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим задачу расчета координат точек активной действующей линии в зацеплении арочных зубьев цилиндрической передачи. С шестерней жестко связана система координат $S_1(x_1, y_1, z_1)$, а с колесом — $S_2(x_2, y_2, z_2)$, которые поворачиваются соответственно на угол φ_1 и φ_2 вокруг осей z_1 и z_2 . Начало отсчета углов ψ_1 и ψ_2 шестерни и колеса в зацеплении арочных зубьев соответствует расположению осей y_1 и y_2 в осевой плоскости передачи. Положение систем координат $S_1(x_1, y_1, z_1)$ и $S_2(x_2, y_2, z_2)$ по отношению друг к другу при образовании передачи задается межосевым расстоянием a_{wp} , величиной смещения Δ_s средней плоскости арочного зуба колеса вдоль оси z_2 относительно этой же плоскости арочного зуба шестерни, углом перекаса γ в зацеплении арочных зубьев и описывается матрицей перехода четвертого порядка $\tilde{D}_{1,2}(\psi_1, \psi_2) = \|d_{ij}\|$, $i, j = \overline{1,4}$, элементы которой имеют вид:

$$\begin{aligned} d_{11} &= \cos \psi_1 \cos \psi_2 - \sin \psi_1 \cos \gamma \sin \psi_2; \\ d_{12} &= -\cos \psi_1 \sin \psi_2 - \sin \psi_1 \cos \gamma \cos \psi_2; \\ d_{13} &= -\sin \psi_1 \sin \gamma; \quad d_{14} = \sin \psi_1 (a_{wp} + \Delta_s \sin \gamma); \\ d_{21} &= \sin \psi_1 \cos \psi_2 + \cos \psi_1 \cos \gamma \sin \psi_2; \\ d_{22} &= -\sin \psi_1 \sin \psi_2 + \cos \psi_1 \cos \gamma \cos \psi_2; \\ d_{23} &= \cos \psi_1 \sin \gamma; \quad d_{24} = -\cos \psi_1 (a_{wp} + \Delta_s \sin \gamma); \\ d_{31} &= -\sin \gamma \sin \psi_2; \quad d_{32} = -\sin \gamma \cos \psi_2; \quad d_{33} = \cos \gamma; \\ d_{34} &= -\Delta_s \cos \gamma; \quad d_{41} = d_{42} = d_{43} = 0; \quad d_{44} = 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Расчет проекций координат точки касания вогнутой поверхности арочного зуба шестерни и выпуклой поверхности арочного зуба колеса при заданных a_{wp} , Δ_s и γ выполняется путем решения обратной задачи теории пространственных зацеплений [7, 9, 25–27], представляющей собой в единой системе координат равенство проекций векторов $\vec{r}_1(u_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ (3), $\vec{r}_2(u_2, \vartheta_2, \varphi_2)$ (5) проекций ортов нормалей $\vec{m}_1(\vartheta_1, \varphi_1)$ (4), $\vec{m}_2(\vartheta_2, \varphi_2)$ (6), а также уравнений станочных зацеплений $f_1(u_1, \vartheta_1, \varphi_1) = 0$ (3) и $f_2(u_2, \vartheta_2, \varphi_2) = 0$ (5). Выбирая в качестве единой системы координат $S_1(x_1, y_1, z_1)$, математическую модель обратной задачи запишем в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{r}_1^1(u_1, \vartheta_1, \varphi_1) &= \tilde{D}_{1,2}(\psi_1, \psi_2, a_{wp}, \Delta_s, \gamma) \tilde{r}_2^2(u_2, \vartheta_2, \varphi_2); \\ \tilde{m}_1^1(\vartheta_1, \varphi_1) &= \tilde{D}_{1,2}(\psi_1, \psi_2, a_{wp}, \Delta_s, \gamma) \tilde{m}_2^2(\vartheta_2, \varphi_2); \\ f_1(u_1, \vartheta_1, \varphi_1) &= 0; \quad f_2(u_2, \vartheta_2, \varphi_2) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь через $\tilde{r}_1^1(u_1, \vartheta_1, \varphi_1)$, $\tilde{r}_2^2(u_2, \vartheta_2, \varphi_2)$, $\tilde{m}_1^1(\vartheta_1, \varphi_1)$, $\tilde{m}_2^2(\vartheta_2, \varphi_2)$ обозначены матрицы столбцы, составленные из проекций векторов $\vec{r}_1(u_1, \vartheta_1, \varphi_1)$, $\vec{r}_2(u_2, \vartheta_2, \varphi_2)$, $\vec{m}_1(\vartheta_1, \varphi_1)$ и $\vec{m}_2(\vartheta_2, \varphi_2)$; верхний индекс в обозначении матриц отражает систему координат, в которой записан вектор; $f_1(u_1, \vartheta_1, \varphi_1) = 0$ и $f_2(u_2, \vartheta_2, \varphi_2) = 0$ уравнения станочного зацепления (3) и (5) при формообразовании арочных зубьев шестерни и колеса.

Поскольку равенство ортов нормалей дает только два независимых уравнения, выражения (8) представляют собой систему семи трансцендентных уравнений при восьми неизвестных: u_1 , ϑ_1 , φ_1 , u_2 , ϑ_2 , φ_2 , ψ_1 , ψ_2 . Решая при фиксированном угле поворота шестерни ($\psi_1^* = \psi_1 = \text{const}$) в рабочем зацеплении систему (8) численным методом, определяем значения параметров u_1^* , ϑ_1^* , φ_1^* , u_2^* , ϑ_2^* , φ_2^* , ψ_2^* , которые позволяют по зависимостям (3) и (5) установить искомые проекции точки касания поверхностей арочных зубьев. Варьируя величину ψ_1 в пределах углового шага шестерни, описанная процедура позволяет рассчитать все точки активной действующей линии в зацеплении арочных зубьев. При $\gamma = \Delta_s = 0$ эта линия располагается в среднем сечении арочного зуба, где угол его наклона $\beta = 0$, профиль является эвольвентным [7], а передача как в случае линейного, так и точечного касания является сопряженной. Принципиальная особенность предложенной в работе [8] адаптивной передачи заключается в необходимости расположения двух активных действующих линий в зацеплении арочных зубьев в совершенно других участках их поверхности, соответствующих середине как левого, так и правого полуколеса, в которых угол наклона зуба β обеспечивает величину осевых сил, достаточных для перемещения полуколес в процессе их самоустановки. Профиль сечений этих участков эвольвентным не является.

Известно [4, 25, 27], что наиболее важным требованием к передачам является сохранение их работоспособности при наличии погрешностей изготов-

ления и взаимного положения звеньев, в результате которых передача становится несопряженной. Для снижения чувствительности передач к погрешностям в общем случае необходима локализация контакта в обоих направлениях — как по длине, так и по высоте зуба. Впервые решение данной задачи потребовалось для получения заданных геометро-кинематических характеристик зацепления в конических и гипоидных передачах с криволинейными зубьями [25]. В настоящее время данная задача является основой современных методов синтеза различных передач с пространственным зацеплением зубьев [4, 25, 27]. Следуя этим методам, определим центр пятна контакта (ЦПК) на поверхности арочного зуба, относительно которого рассчитываются границы инерционной зоны касания, необходимой для контроля передачи. В ЦПК мгновенное передаточное отношение передачи равно отношению чисел зубьев колеса и шестерни. В качестве ЦПК на поверхности арочного зуба шестерни зададим для левого полуколеса точку M_1 с координатами:

$$z_1(u_1, \vartheta_1) = -b_w/2; \sqrt{[x_1(u_1, \vartheta_1, \varphi_1)]^2 + [y_1(u_1, \vartheta_1, \varphi_1)]^2} = R_{w1}, \quad (9)$$

а для правого полуколеса — точку M_2 , имеющую координаты

$$z_1(u_1, \vartheta_1) = b_w/2; \sqrt{[x_1(u_1, \vartheta_1, \varphi_1)]^2 + [y_1(u_1, \vartheta_1, \varphi_1)]^2} = R_{w1}. \quad (10)$$

В формулах (9) и (10) через b_w обозначена ширина зуба.

Дополняя систему (8) уравнениями (9) и решая полученную систему девяти трансцендентных уравнений при $\gamma = 0$, определим неизвестные: $u_1^*, \vartheta_1^*, \varphi_1^*, u_2^*, \vartheta_2^*, \varphi_2^*, \psi_1^*, \psi_2^*, \Delta_s^*$, при которых активная действующая линия для левого полуколеса проходит через ЦПК в точке M_1 . Аналогичным образом устанавливаются параметры ЦПК для точки M_2 при дополнении системы (8) уравнениями (10). В результате реализации рассмотренного алгоритма определяется для каждого из полуколес величина смещения Δ_s^* , обеспечивающая расположение активной действующей линии вне среднего сечения арочного зуба.

В качестве иллюстрации (рис. 4) показаны две активные действующие линии для цилиндрической передачи с арочными зубьями, имеющей параметры: числа зубьев шестерни и колеса $z_1^* = 23$ и $z_2^* = 73$; нормальный модуль $m_n = 10$ мм; коэффициенты смещения при нарезании арочных зубьев шестерни и колеса $\chi_1 = 0,44$ и $\chi_2 = 0,042$; $b_w = 120,0$ мм, $\alpha_0 = 20^\circ$, $R_{w1} = 116,115$ мм и $R_{w2} = 368,540$ мм; $a_{wp} = 484,655$ мм; $r_{g1} = 220,0$ мм, $r_{g2} = 215$ мм, то есть в продольном направлении арочного зуба контакт локализован. Величина Δ_s для левого полуколеса $\Delta_s = 0,682$ мм, для правого полуколеса $\Delta_s = -0,682$ мм.

Далее показаны результаты подобных расчетов при наличии угла перекоса $\gamma = 0,0030$ (рис. 5).

В этом случае, для того чтобы ЦПК располагались в тех же точках M_1 и M_2 , требуется самоустановка полуколес — смещение их вдоль оси вращения, соответственно, на величину $\Delta_s = 1,321$ мм и $\Delta_s = -1,321$ мм.

Сравнивая рис. 4 и рис. 5, нетрудно видеть, что геометрические параметры контакта в пере-

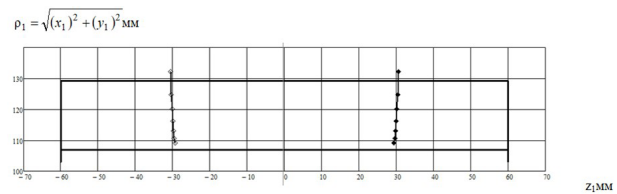


Рис. 4. Активные действующие линии в зацеплении арочных зубьев цилиндрической передачи с разнесенными зонами контакта ($\gamma=0$)

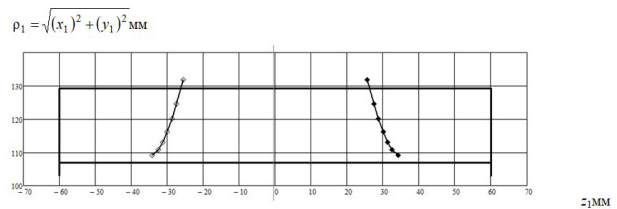


Рис. 5. Активные действующие линии в зацеплении арочных зубьев цилиндрической передачи с разнесенными зонами контакта при $\gamma = 0,0030$

даче при наличии перекоса арочных зубьев изменяются.

Синтез геометро-кинематических характеристик зацепления арочных зубьев колес цилиндрических передач. В работе [4] показано, что геометрическая сопряженность активных поверхностей зубьев для реальных передач является не достоинством, а недостатком. Вследствие погрешностей изготовления и сборки элементов реальной передачи, неизбежных деформаций зубьев и их поверхностей при работе передачи под нагрузкой, зацепление зубьев следует проектировать как приближенное, вводя преднамеренную функцию $\Delta\psi_2(\psi_1^*)$ ошибок угла поворота ведомого звена (ψ_2^*) в период однопарного зацепления зубьев [4]. Следуя теории реальных передач зацепления [4, 25, 27], функция ошибок (кривая Бакстера) должна представлять собой параболу, экстремум (максимум) которой соответствует касанию поверхностей зубьев шестерни и колеса в ЦПК:

$$\begin{aligned} \Delta\psi_2(\psi_1) &= \psi_2 - \frac{\psi_1 \dot{z}_1}{z_2} = \\ &= \psi_2 - i_{12} \dot{\psi}_2 z_1 / z_2 = -a_\psi (\psi_2 i_{12})^2, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\psi_1 = \psi_2 i_{12}$, ψ_2 — углы поворота соответственно шестерни и колеса в рабочем зацеплении; i_{12} — мгновенное передаточное отношение в передаче; a_ψ — коэффициент, зависящий от величины погрешностей, которые необходимо компенсировать.

Совокупность установленных в результате решения обратной задачи зацепления (8) значений ψ_1 , ψ_2 для точек активной действующей линии, по выражению (11), позволяет определить функцию ошибок $\Delta\psi_2(\psi_1)$ и оценить ее с позиций как предотвращения кромочных ударов при пересопрежении зубьев, так и возможности реализации в передаче приближенного зацепления зубьев. Расчет функции $\Delta\psi_2(\psi_1)$ для передачи с арочными зубьями, рабочие линии которой показаны на рис. 4, свидетельствует, что ошибка в передаточной функции отсутствует, то есть передача является сопряженной. Ситуация

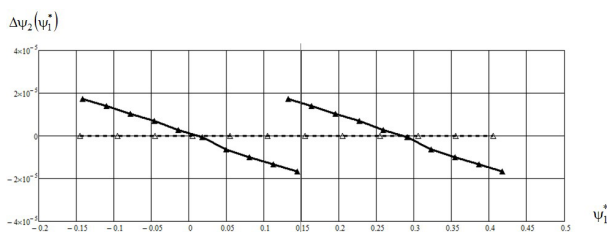


Рис. 6. Функция $\Delta\psi_2(\psi_1^*)$ в зацеплении арочных зубьев цилиндрической передачи с разнесенными зонами контакта при $\gamma = 0,0030$

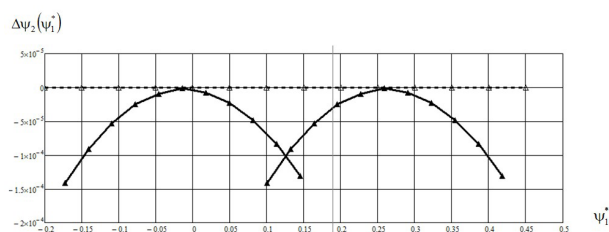


Рис. 7. Функция $\Delta\psi_2(\psi_1^*)$ в зацеплении арочных зубьев цилиндрической передачи при $\gamma = 0,0030$, профиль зуба колеса модифицирован

меняется принципиально, когда передача работает в условиях перекоса зубьев (рис. 5). Функция $\Delta\psi_2(\psi_1^*)$ приобретает пилообразную форму (рис. 6), при этом для геометрически правильного входа зубьев в зацепление необходима деформация их поверхностей.

Для исключения ударов при входе зубьев в зацепление при формообразовании криволинейных зубьев конических и гипоидных колес их профиль корректируют путем модификации движения обката в зуборезных станках с помощью специального механизма [25].

При нарезании арочных зубьев цилиндрического колеса методом обката с единичным делением на станках ЧПУ модификация профиля возможна на уровне задания связи перемещения (P_2) резцовой головки и угла поворота колеса ϕ_2 . Для определения этой связи воспользуемся уравнением (11). В точке геометрического пересопрежения зубьев угол поворота $\psi_1^* = \pi/z_1$, при этом, исходя из кинематической точности передачи, известна допустимая величина ее кинематической погрешности $\Delta\psi_2^*$. В этом случае из уравнения (11) найдем:

$$a_\psi = -\Delta\psi_2^* \left(z_1 / \pi \right)^2 \quad (12)$$

При любом другом угле ψ_1^* уравнение (11) позволяет через корректировку z_2 осуществить модификацию перемещения P_2 и в итоге коррекцию профиля зуба колеса при его нарезании. Для передачи рис. 5 получим $\psi_1^* = \frac{\pi}{z_1} = 0,136591$ и, задавшись $\Delta\psi_2^* = -1 \cdot 10^{-4}$, по формуле (12) определим $a_\psi = 5,359891 \cdot 10^{-3}$. Для двух пар зубьев представлены результаты расчета точек функции $\Delta\psi_2(\psi_1^*)$ ошибки поворота колеса с модифицированным профилем зуба в период зацепления с зубом шестерни (рис. 7).

Поскольку функция $\Delta\psi_2(\psi_1^*)$ имеет вид параболы, то зацепление зубьев в передаче является приближенным, удары при входе зубьев в зацепление отсутствуют.

Выводы

1. Предложена и реализована в программном продукте математическая модель синтеза параметров цилиндрической передачи с арочными зубьями, обеспечивающая в любой фазе их зацепления контакт в двух точках, разнесенных по длине зубьев.

2. Разработана процедура расчета коррекции поступательного движения резцовой головки при формообразовании арочного зуба на станке ЧПУ, позволяющая получить приближенный характер зацепления арочных зубьев в условиях работы передачи при наличии угла перекоса зубьев.

Библиографический список

1. Fuentes-Aznar A., Ruiz-Orzaez R., Gonzalez-Perez I. Comparison of spur, helical and curvilinear gear drives by means of stress and tooth contact analyses // *Meccanica*. 2017. Vol. 52. P. 1721 – 1738. DOI: 10.1007/s11012-016-0515-y.
2. Сызранцев В. Н., Сызранцев К. В. Цилиндрические зубчатые передачи с арочными зубьями: геометрия, прочность, надежность: моногр. Тюмень: Изд-во Тюменского промышленного университета, 2021. 170 с. ISBN 978-5-9961-2378-0.
3. Syzrantsev V. N. Cylindrical Arc Gears: History, Achievements, and Problem // *Mechanisms and Machine Science*. 2021. Vol. 101. P. 131 – 151. DOI: 10.1007/978-3-030-73022-2_6. EDN: LGNAIU.
4. Лагутин С. А. Предопределение функции ошибок в передачах с двойной модификацией зубьев // *Пространство зацеплений: докл. научн. семинара Учебно-научного центра зубчатых передач и редукторостроения*, 2001 г. / ИЖГТУ. Ижевск, 2001. С. 26 – 37.
5. Arafa H. A. C-gears: Geometry and Machining, Part C // *Journal of Mechanical Engineering Science*. 2005. Vol. 219, no. 7. P. 709 – 726. DOI: 10.1243/095440605X31481.
6. Бочкова Д. Е., Бобков М. Н., Золотова С. А. Обработка круговых зубьев пары цилиндрических колес с локализованной зоной касания // *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. 2020. № 5. С. 344 – 349. EDN: PXFZWU.
7. Сызранцев В. Н., Стариков А. И. Расчет геометро-кинематических характеристик зацепления арочных зубьев цилиндрической передачи при погрешностях взаимного расположения // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение»*. 2023. Т. 23, № 1. С. 5 – 18. DOI: 10.14529/engin230101.
8. Пат. 2721579 Российская Федерация, МПК F 16 H1/06. Адаптивная цилиндрическая передача с арочными зубьями / Сызранцев В. Н., Сызранцева К. В., Виб В. П., Денисов Ю. Г. № 2019136799; заявл. 15.11.2019; опубл. 20.05.2020, Бюл. № 14.
9. Syzrantsev V., Syzrantseva K. The Arc Teeth Semi-rolled Cylindrical Gear Meshing Geometry // *Acta Polytechnica Hungarica*. 2022. Vol. 19, no. 2. P. 173 – 192. DOI: 10.12700/APH.19.2.2022.2.10.
10. Паршин А. Н. Изготовление цилиндрических колес с арочными зубьями резцовыми головками на станках с ЧПУ и опыт их внедрения // *Теория и практика зубчатых передач: сб. тр. междунар. симп. / под ред. В. И. Гольдфарба*. Ижевск: Изд-во Ижевского государственного технического университета им. М. Т. Калашникова, 2014. С. 151 – 159.
11. Сызранцев В. Н. Цилиндрические передачи с разнесенными по длине арочных зубьев зонами контакта // *Вестник ИЖГТУ имени М. Т. Калашникова*. 2021. Т. 24, № 2. С. 33 – 39. DOI: 10.22213/2413-1172-2021-2-33-39. EDN: AJKQPV.
12. Arafa H. A., Bedewy M. Manufacturability and viability of different c-gear types: A comparative study // *Proc. of the ASME Design Engineering Technical Conf.* 2012. Vol. 5. P. 381. DOI: 10.1115/DETC2012-71030.
13. Chang Q., Hou. L. Parallel translating mechanism process-oriented mathematical model and 3-D model for cylindrical gears

with curvilinear shaped teeth // *Jordan Journal Mechanical and Industrial Engineering*. 2016. Vol. 10. P. 171–177.

14. Zhang Q., Hou L., Tang R. [et al.]. Method of processing and an analysis of meshing and contact of circular arc tooth trace cylindrical gears // *Transactions of FAMENA*. 2016. Vol. 40, no. 4. P. 11–24. DOI: 10.21278/TOF.40402.

15. Ma D., Ye Z., Yang H. Tooth surface reconstruction and tooth profile geometric analysis of circular arc tooth trace cylindrical gears // *Transactions of FAMENA*. 2019. Vol. 43, no. 1. P. 29–44. DOI: 10.21278/TOF.43103.

16. Jiang Y. Contact ratio calculation of involute arc gear device Academic // *Journal of Manufacturing Engineering*. 2017. Vol. 15, no. 3. P. 19–22.

17. Wu Y., Hou L., Lan L. [et al.]. Milling machine error modelling and analysis in the machining of circular-arc-tooth-trace cylindrical gears // *Transactions of FAMENA*. 2021. Vol. 44, no. 4. P. 13–29. DOI: 10.21278/TOF.444009419.

18. Zhang X., Liang Z. Mathematical model and contact characteristics of curvilinear cylindrical gears with line contact // *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2021. Vol. 43, no. 4. DOI: 10.1007/s40430-021-02894-w.

19. Zhang Q., Hou L., Tang R. [et al.]. Method of Processing and an Analysis of Meshing and Contact of Circular Arc Tooth Trace Cylindrical Gears // *Trans Famena*. 2016. Vol. 40, no. 4. P. 11–24. DOI: 10.21278/TOF.40402.

20. Liu Y., Ma D. Surface modification and tooth contact analysis of variable hyperbolic circular-arc-tooth-trace cylindrical gears // *Mechanical Sciences*. 2011. Vol. 13. P. 909–920. DOI: 10.5194/ms-13-909-2022.

21. Ma D., Liu Y., Ye Z. [et al.]. Meshing Contact Impact Properties of Circular Arc Tooth Trace Cylindrical Gear Based on Rotating Knife Dish Milling Process // *Mathematical Problems in Engineering*. 2021. Vol. 2021. DOI: 10.1155/2021/8819818.

22. Guo R., Wei Y., Liu Y. [et al.]. Analytical solution to contact characteristics for a variable hyperbolic circular-arc-tooth-trace cylindrical gear // *Mechanical Sciences*. 2021. Vol. 12. P. 923–932. DOI: 10.5194/ms-12-923-2021.

23. Wei Y., Guo R., Liu Y. [et al.]. Analytical Calculation of the Tooth Surface Contact Stress of Cylindrical Gear with Variable Hyperbolic Circular-Arc-Tooth-Trace // *Symmetry*. 2020. Vol. 12, no. 8. 1318. DOI: 10.3390/sym12081318.

24. Yongqiao W., Shuhong Y., Qi Z. [et al.]. Numerical Analysis of Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Cylindrical Gears with Variable Hyperbolic Circular Arc and

Tooth Trace // *Transactions of FAMENA*. 2018. Vol. 42, no. 1. P. 61–72. DOI: 10.21278/TOF.42106.

25. Лопато Г. А., Кабатов Н. Ф., Сегаль М. Г. Конические и гипоидные передачи с круговыми зубьями: справ. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. Москва: Машиностроение, 1977. 423 с.

26. Babichev D. T., Lagutin S. A., Barmina N. A. Russian School of the Theory and Geometry of Gearing. Part 2. Development of the Classical Theory of Gearing and Establishment of the Theory of Real Gearing in 1976–2000 // *New Approaches to Gear Design and Production*. 2020. Vol. 81. P. 1–46. DOI: 10.1007/978-3-030-34945-5_1.

27. Волков А. Э., Медведев В. И., Матвеевков Д. С. Алгоритм оптимизационного синтеза спирально-конических зубчатых передач // *Современное машиностроение. Наука и образование*. 2018. № 7. С. 693–709. DOI: 10.1872/MMF-2018-59.

СЫЗРАНЦЕВ Владимир Николаевич, доктор технических наук, профессор (Россия), заведующий кафедрой «Машины и оборудование нефтяной и газовой промышленности» Тюменского индустриального университета (ТИУ), г. Тюмень.

SPIN-код: 5665-5454

ORCID: 0000-0002-1422-4799

AuthorID (SCOPUS): 6507778873

ResearcherID: C-1075-2017

Адрес для переписки: syzrantsevvn@tyuiu.ru

СТАРИКОВ Александр Иванович, старший преподаватель кафедры «Технология машиностроения» ТИУ, г. Тюмень.

SPIN-код: 8635-1504

AuthorID (РИНЦ): 176570

ORCID: 0000-0001-7594-6114

AuthorID (SCOPUS): 7006814382

Адрес для переписки: starikovai@tyuiu.ru

Для цитирования

Сызранцев В. Н., Стариков А. И. Синтез адаптивной цилиндрической передачи с арочными зубьями с двумя зонами контакта // *Омский научный вестник*. 2023. № 4 (188). С. 38–45. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-188-38-45.

Статья поступила в редакцию 22.06.2023 г.

© В. Н. Сызранцев, А. И. Стариков



SYNTHESIS OF AN ADAPTIVE CYLINDRICAL GEAR WITH ARCHED TEETH WITH TWO CONTACT ZONES SPACED ALONG THE LENGTH OF THE TOOTH

Cylindrical gears with arched teeth have the required performance in conditions of both non-rigid machine bodies and inevitable manufacturing and assembly errors. Error compensation is carried out by self-alignment of the wheels, the possibilities of which are limited in gears with one line of engagement. The article investigates an adaptive gear with arched teeth with two contact zones, which provides self-alignment of the wheels, regardless of the angle of misalignment of the teeth in engagement. The most promising in terms of implementation in the industry method of cutting arched teeth with a circular cutter head by the rolling method with a single division on CNC machines. Solved and illustrated by examples of the problem of calculating the parameters of the process of shaping the surfaces of arched teeth, which ensure the passage of two active lines in the meshing of the teeth through the given centers of the contact patches and the law of change of the transfer function required for the implementation of the approximate nature of the meshing.

Keywords: cylindrical gear, arched teeth, two contact zones, geometry synthesis adaptive gear, transfer function.

References

1. Fuentes-Aznar A., Ruiz-Orzaez R., Gonzalez-Perez I. Comparison of spur, helical and curvilinear gear drives by means of stress and tooth contact analyses // *Meccanica*. 2017. Vol. 52. P. 1721 – 1738. DOI: 10.1007/s11012-016-0515-y. (In Engl.).

2. Syzrantsev V. N., Syzrantseva K. V. Tsilindricheskiye zubchatyye peredachi s arochnymi zub'yami: geometriya, prochnost', nadezhnost' [Spur gears with arched teeth: geometry, strength, reliability]. Tyumen, 2021. 170 p. ISBN 978-5-9961-2378-0. (In Russ.).

3. Syzrantsev V. N. Cylindrical Arc Gears: History, Achievements, and Problem // *Mechanisms and Machine Science*. 2021. Vol. 101. P. 131 – 151. DOI: 10.1007/978-3-030-73022-2_6. EDN: LGNAIU. (In Engl.).

4. Lagutin S. A. Predopredeleniye funktsii oshibok v peredachakh s dvoynoy modifikatsiyey zub'yev [Predetermination of the error function in gears with double tooth modification] // *Prostranstvo zatsepleniya. Gearing Space*. Izhevsk, 2001. P. 26 – 37. (In Russ.).

5. Arafa H. A. C-gears: Geometry and Machining, Part C // *Journal of Mechanical Engineering Science*. 2005. Vol. 219, no. 7. P. 709 – 726. DOI: 10.1243/095440605X31481. (In Engl.).

6. Bochkova D. E., Bobkov M. N., Zolotova S. A. Obrabotka krugovykh zub'yev pary tsilindricheskikh koles s lokalizovannoy zonoy kasaniya [Processing of circular teeth of a pair of cylindrical wheels with localized touch zone] // *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskiye nauki. Izvestiya Tula State University. Series Technical Sciences*. 2020. No. 5. P. 344 – 349. EDN: PXFWZU. (In Russ.).

7. Syzrantsev V. N., Starikov A. I. Raschet geometro-kinemacheskikh kharakteristik zatsepleniya arochnykh zub'yev tsilindricheskoy peredachi pri pogreshnostyakh vzaimnogo

raspolozheniya [Calculation of the geometric and kinematic characteristics of the engagement of the arched teeth of a cylindrical gear with errors in the relative position] // *Vestnik YuUrGU. Seriya «Mashinostroyeniye». Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mechanical Engineering Industry*. 2023. Vol. 23, no. 1. P. 5 – 18. DOI: 10.14529/engin230101. (In Russ.).

8. Patent 2721579 Russian Federation, IPC F 16 H1/06. Adaptivnaya tsilindricheskaya peredacha s arochnymi zub'yami [Adaptive cylindrical gear with arched teeth] / Syzrantsev V. N., Syzrantseva K. V., Vibe V. P., Denisov Yu. G. No. 2019136799. (In Russ.).

9. Syzrantsev V., Syzrantseva K. The Arc Teeth Semi-rolled Cylindrical Gear Meshing Geometry // *Acta Polytechnica Hungarica*. 2022. Vol. 19, no. 2. P. 173 – 192. DOI: 10.12700/APH.19.2.2022.2.10. (In Engl.).

10. Parshin A. N. Izgotovleniye tsilindricheskikh koles s arochnymi zub'yami reztsovymi golovkami na stankakh s ChPU i opyt ikh vnedreniya [Arched toothed cylindrical gears manufacture on cnc lathes and experience of their inculcation] // *Teoriya i praktika zubchatykh peredach. Theory and Practice of Gearings*. Izhevsk, 2014. P. 151 – 159. (In Russ.).

11. Syzrantsev V. N. Tsilindricheskiye peredachi s raznesennymi po dline arochnykh zub'yev zonami kontakta [Cylindrical gears with contact areas distributed along the arc teeth length] // *Vestnik IzhGTU imeni M. T. Kalashnikova. Vestnik IzhGTU imeni M.T. Kalashnikova*. 2021. Vol. 24, no. 2. P. 33 – 39. DOI: 10.22213/2413-1172-2021-2-33-39. EDN: AJKQPV. (In Russ.).

12. Arafa H. A., Bedewy M. Manufacturability and viability of different c-gear types: A comparative study // *Proc. of the ASME Design Engineering Technical Conf.* 2012. Vol. 5. P. 381. DOI: 10.1115/DETC2012-71030. (In Engl.).

13. Chang Q., Hou L. Parallel translating mechanism process-oriented mathematical model and 3-D model for cylindrical gears with curvilinear shaped teeth // *Jordan Journal Mechanical and Industrial Engineering*. 2016. Vol. 10. P. 171–177. (In Engl.).
14. Zhang Q., Hou L., Tang R. [et al.]. Method of processing and an analysis of meshing and contact of circular arc tooth trace cylindrical gears // *Transactions of FAMENA*. 2016. Vol. 40, no. 4. P. 11–24. DOI: 10.21278/TOF.40402. (In Engl.).
15. Ma D., Ye Z., Yang H. Tooth surface reconstruction and tooth profile geometric analysis of circular arc tooth trace cylindrical gears // *Transactions of FAMENA*. 2019. Vol. 43, no. 1. P. 29–44. DOI: 10.21278/TOF.43103. (In Engl.).
16. Jiang Y. Contact ratio calculation of involute arc gear device Academic // *Journal of Manufacturing Engineering*. 2017. Vol. 15, no. 3. P. 19–22. (In Engl.).
17. Wu Y., Hou L., Lan L. [et al.]. Milling machine error modelling and analysis in the machining of circular-arc-tooth-trace cylindrical gears // *Transactions of FAMENA*. 2021. Vol. 44, no. 4. P. 13–29. DOI: 10.21278/TOF.444009419. (In Engl.).
18. Zhang X., Liang Z. Mathematical model and contact characteristics of curvilinear cylindrical gears with line contact // *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2021. Vol. 43, no. 4. DOI: 10.1007/s40430-021-02894-w. (In Engl.).
19. Zhang Q., Hou L., Tang R. [et al.]. Method of Processing and an Analysis of Meshing and Contact of Circular Arc Tooth Trace Cylindrical Gears // *Trans Famena*. 2016. Vol. 40, no. 4. P. 11–24. DOI: 10.21278/TOF.40402. (In Engl.).
20. Liu Y., Ma D. Surface modification and tooth contact analysis of variable hyperbolic circular-arc-tooth-trace cylindrical gears // *Mechanical Sciences*. 2011. Vol. 13. P. 909–920. DOI: 10.5194/ms-13-909-2022. (In Engl.).
21. Ma D., Liu Y., Ye Z. [et al.]. Meshing Contact Impact Properties of Circular Arc Tooth Trace Cylindrical Gear Based on Rotating Knife Dish Milling Process // *Mathematical Problems in Engineering*. 2021. Vol. 2021. DOI: 10.1155/2021/8819818. (In Engl.).
22. Guo R., Wei Y., Liu Y. [et al.]. Analytical solution to contact characteristics for a variable hyperbolic circular-arc-tooth-trace cylindrical gear // *Mechanical Sciences*. 2021. Vol. 12. P. 923–932. DOI: 10.5194/ms-12-923-2021. (In Engl.).
23. Wei Y., Guo R., Liu Y. [et al.]. Analytical Calculation of the Tooth Surface Contact Stress of Cylindrical Gear with Variable Hyperbolic Circular-Arc-Tooth-Trace // *Symmetry*. 2020. Vol. 12, no. 8. 1318. DOI: 10.3390/sym12081318. (In Engl.).
24. Yongqiao W., Shuhong Y., Qi Z. [et al.]. Numerical Analysis of Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Cylindrical Gears with Variable Hyperbolic Circular Arc and Tooth Trace // *Transactions of FAMENA*. 2018. Vol. 42, no. 1. P. 61–72. DOI: 10.21278/TOF.42106. (In Engl.).
25. Lopato G. A., Kabatov N. F., Segal' M. G. Konicheskiye i gipoidnyye peredachi s krugovymi zub'yami [Bevel and hypoid gears with circular teeth]. 2nd ed. Moscow, 1977. 423 p. (In Russ.).
26. Babichev D. T., Lagutin S. A., Barmina N. A. Russian School of the Theory and Geometry of Gearing. Part 2. Development of the Classical Theory of Gearing and Establishment of the Theory of Real Gearing in 1976–2000 // *New Approaches to Gear Design and Production*. 2020. Vol. 81. P. 1–46. DOI: 10.1007/978-3-030-34945-5_1. (In Engl.).
27. Volkov A. E., Medvedev V. I., Matveyenkov D. S. Algoritm optimizatsionnogo sinteza spiral'no-konicheskikh zubchatykh peredach [Algorithm of optimisation synthesis of spiral bevel gears] // *Sovremennoye mashinostroyeniye. Nauka i obrazovaniye. Modern Mechanical Engineering. Science and Education*. 2018. No. 7. P. 693–709. DOI: 10.1872/MMF-2018-59. (In Russ.).

SYZRANTSEV Vladimir Nikolaevich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Machines and Equipment for the Oil and Gas Industry Department, Industrial University of Tyumen (IUT), Tyumen.
 SPIN-code: 5665-5454
 ORCID: 0000-0002-1422-4799
 AuthorID (SCOPUS): 6507778873
 ResearcherID: C-1075-2017
 Correspondence address: syzrantsevn@tyuiu.ru

STARIKOV Aleksander Ivanovich, Senior Lecturer of Mechanical Engineering Technology Department, IUT, Tyumen.
 SPIN-code: 8635-1504
 AuthorID (RSCI): 176570
 ORCID: 0000-0001-7594-6114
 AuthorID (SCOPUS): 7006814382
 Correspondence address: starikovai@tyuiu.ru

For citations

Syzrantsev V. N., Starikov A. I. Synthesis of an adaptive cylindrical gear with arched teeth with two contact zones spaced along the length of the tooth // *Omsk Scientific Bulletin*. 2023. No. 4 (188). P. 38–45. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-188-38-45.

Received June 22, 2023.

© V. N. Syzrantsev, A. I. Starikov