УДК 621.0
DOI: 10.25206/1813-8225-2023-187-15-22
EDN: EHSGYX

В. А. НЕХАЕВ
В. А. НИКОЛАЕВ
А. Н. СМАЛЕВ
К. О. СЕРЯКОВ

Омский государственный
университет путей сообщения,
г. Омск

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНЫМ УПРУГИМ ПОДВЕСОМ И СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Исследована динамика нелинейной механической системы при воздействии на нее кинематического возмущения. Исследуемая система виброизоляции объекта основана на применении принципа компенсации внешних возмущений — введении в подвеску дополнительного упругого элемента с так называемой отрицательной жесткостью. В результате система виброизоляции защищаемого объекта описывается жесткой кубической силовой характеристикой. Обычно отыскивается приближенное решение на частоте внешнего возмущения, выполняя соответствующую гармоническую линеаризацию нелинейности. В результате получают, что собственная частота консервативной динамической системы равна $k_0^2\left(1 \pm \frac{3}{4}\mu A^2\right)$, где k_0 — собственная частота консервативной системы при отсутствии нелинейности. И далее исследователь работает, считая динамическую систему линейной. К сожалению, не всегда можно так полагать. Поэтому авторами было выполнено численное моделирование механической системы, описываемой уравнением Дуффинга при кинематическом возбуждении.

Установлено, что в дорезонансной и резонансной областях общее решение должно состоять из трех составляющих: субгармоники порядка 1/3, основной гармоники и третьей гармоники. Отмечено, что в зарезонансной зоне важны только субгармоника порядка 1/3 и основная гармоника. Наиболее чувствительным параметром является ускорение защищаемого от вибрации объекта. Поэтому на спектральной мощности ускорения перемещения, кроме основной гармоники, различима и третья гармоника. Построенный численно модуль передаточной функции системы в абсолютном движении указывает на возможность скачка амплитуды, что ярко демонстрируется в лабораторных экспериментах.

Показано, что при исследовании динамики даже простых нелинейных механических систем нужно использовать как приближенные аналитические, так и численные методы, но в сочетании со спектральным анализом, поскольку традиционные методы нелинейной механики не приспособлены к решению задач с учетом сравнительно большого числа составляющих гармоник, появляющихся вследствие нелинейности.

Ключевые слова: механическая система, жесткая кубическая силовая характеристика, уравнение Дуффинга, приближенные и аналитические методы, математическое моделирование, спектральная плотность (мощность), субгармоники, третья гармоника, модуль передаточной функции, амплитудно-частотная характеристика.

Введение. Острая необходимость повышения производительности транспортных и технологических машин различного назначения влечет за собой повышение уровня вибрационных воздействий на их узлы, а также и на человека-оператора (механика-водителя гусеничных маши, водителя большегрузного автомобиля, машиниста локомотива и др.). Высокие современные требования к качеству

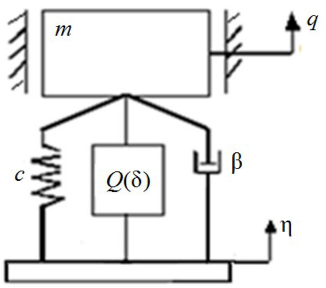


Рис. 1. Расчетная схема системы виброзащиты человека-оператора

виброзащиты не во всех случаях удается обеспечить путем применения типовых пассивных систем виброизоляции, основанных на применении упругих элементов и гасителей колебаний, так как эти системы не всегда могут обеспечить желаемый вид переходного процесса, стабилизацию объекта в широком диапазоне частот и др.

Известно, что одним из эффективных способов виброзащиты является создание систем, основанных на применении принципа компенсации внешних возмущений, приоритет открытия которого принадлежит Г. В. Щипанову [1]. Основной результат — условие независимости одной или нескольких координат объекта от внешних возмущений, строго доказан академиком Н. Н. Лузиным [2] и составляет фундамент теории инвариантности. Проблема инвариантности — это определение таких структур и параметров динамических систем, при которых влияния произвольно изменяющихся внешних возмущений и собственных параметров систем на протекающие процессы могут быть частично или полностью компенсированы. Согласно принципу двухканальности, сформулированному академиком Б. Н. Петровым [3] и выражающему критерий физической реализуемости условий для достижения инвариантности выходной координаты системы, необходимо иметь, по крайней мере, два канала передачи воздействия между точкой приложения силы и той точкой, относительно координаты которой достигается инвариантность. На основе принципа компенсации внешних возмущений можно обеспечить весьма малую, почти на порядок меньше, чем у типовой схемы виброизолятора, его динамическую жесткость, что позволяет обеспечить эффективную защиту объекта от воздействия вибрации и ударов [4−9].

Основная часть. Расчетная схема системы виброзащиты с компенсирующим устройством приведена на рис. 1. Здесь введены следующие обозначения: m — масса защищаемого объекта, c — жёсткость основного упругого элемента, β — коэффициент вязкого трения гасителя колебаний, q — обобщенная координата, характеризующая перемещение груза, $\eta = \eta_0 \sin\omega t$ — кинематическое внешнее возбуждение, $Q(\delta) = -a_1\delta + a_3\delta_3$ — динамическая реакция компенсирующего устройства, $\delta = z - \eta$ — прогиб виброизолятора от положения статического равновесия.

В процессе колебаний в результате сложения динамических реакций основного упругого элемента и компенсирующего устройства формируется жёсткая кубическая силовая характеристика системы виброзащиты объекта. Таким образом, динамика этой системы описывается уравнением Дуффинга [10, 11].

Как отмечено в работе [12], математическое моделирование динамики и определение устойчивости в технических системах является актуальнейшим направлением в научном и технологическом развитии любого государства, которое стремится занять лидирующие позиции в современном мире. Изучение предельных динамических режимов и устойчивости необходимо как в классических теоретических, так и в актуальных практических задачах. Поиск и анализ возникновения колебательных режимов требует разработки специальных аналитических и численных методов.

Общеизвестно, что при определённых условиях в решении нелинейного уравнения типа Дуффинга появляются и субгармоники — такие составляющие, частота которых в целое число раз меньше частоты внешнего возмущения. В системе, описываемой уравнением Дуффинга, легче всего экспериментально получить субгармонику, частота которой равна одной трети частоты воздействия. Субгармоники других порядков могут быть также получены экспериментально и их появление предугадывается в результате теоретических исследований [13−17]. Эксперимент показывает, что для получения в системе субгармонического резонанса большое значение имеют условия запуска. При этом амплитуда и частота внешнего возбуждения должны находиться в некоторых заданных пределах и сама система должна удовлетворять определённым начальным условиям. В связи с такой сильной зависимостью от начальных условий очевидно, что субгармонические колебания связаны с тем, что обычно понимается под переходными процессами в линейной колебательной системе.

Колебательную систему, будь она линейной или нелинейной, можно заставить совершать колебания с помощью какого-нибудь начального импульса. Поскольку в любой физической системе существуют потери энергии, то любые колебания, вызванные импульсом, рано или поздно затухают. В нелинейной системе колебания несинусоидальны и содержат высшие составляющие, частота которых в целое число раз больше или меньше основной частоты. Представляется возможным при некоторых условиях поддерживать установившиеся колебания системы, подводя энергию на частоте одной из этих гармоник. При этом, поскольку частота внешнего воздействия в целое число раз больше основной частоты колебаний системы, эта частота является субгармонической по отношению к частоте внешнего возбуждения. Таковы условия возникновения субгармонических колебаний.

Будем выполнять численное моделирование нелинейной механической системы в сочетании со спектральным анализом, который, согласно широко известной монографии Дж. Бендата и А. Пирсола [18], может быть осуществлён разными методами, например, быстрым преобразованием Фурье (БПФ), имеющим тот недостаток, что частотные отношения между «пиковыми» частотами носят рациональный характер. Авторами был применён модернизированный метод спектрального анализа, избавленный от указанного выше недостатка. По результатам моделирования строилась корреляционная функция, которая в дальнейшем на малых отрезках времени аппроксимировалась квадратным полиномом. Следовательно, можно утверждать, что интеграл, представляющий собой произведение корреляционной функции на косинус от некоторой частоты, вычислялся точно. Итак, точность вычис-

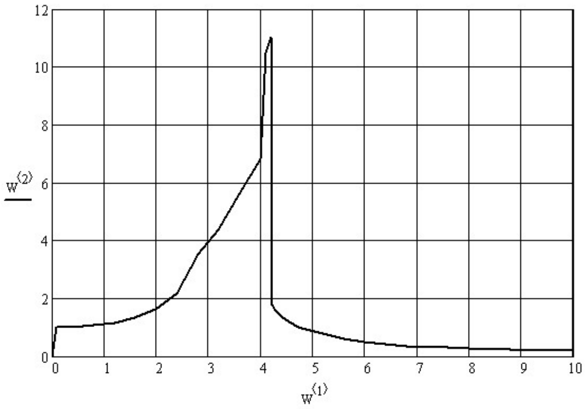


Рис. 2. Модуль передаточной функции системы виброзащиты человека-оператора в абсолютном измерении (АЧХ)

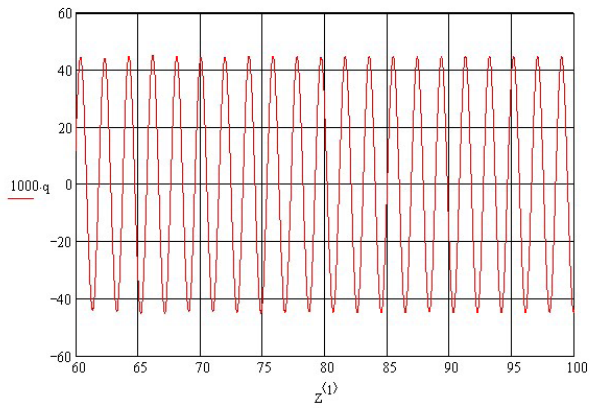


Рис. 3. Абсолютное перемещение защищаемого объекта, мм, при резонансе, ω ≈ 3,2519 рад/с

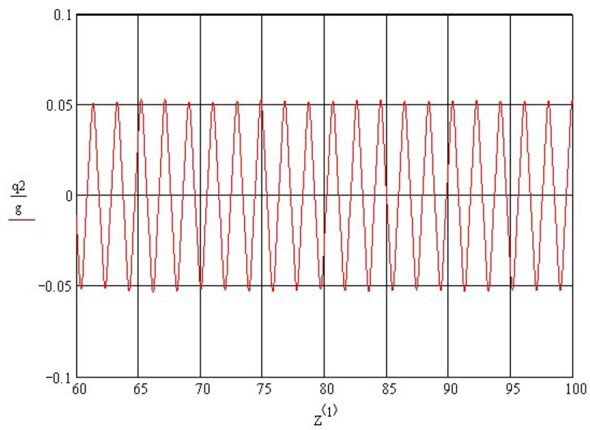


Рис. 4. Абсолютные ускорения объекта, в долях *g*

ления спектрального интеграла определяется точностью представления корреляционной функции.

Запишем дифференциальное уравнение рассматриваемой одностепенной механической системы с жёсткой кубической силовой характеристикой при кинематическом возбуждении в общепринятой форме Коши, которая больше всего подходит для численного интегрирования систем дифференциальных уравнений (здесь, в соответствии с рис. 1, $X_1 = q$; $2n = \beta/m$):

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2; \\ \dot{X}_2 = \omega^2 \eta_0 \sin \omega t - 2nX_2 - k_0^2 \left(1 + hX_1^2\right) X_1. \end{cases} \qquad (1)$$

Чтобы избежать дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, оно записано с учетом прогиба основного упругого элемента подвешивания. Перейти к абсолютным координатам достаточно просто, добавив к полученному численным методом результату величину внешнего возмущения в данный момент времени. Численное интегрирование системы (1) выполнялось методом Рунге—Кутты четвёртого порядка, написанным на языке программирования в системе Mathcad с добавлением в выводной список правых частей дифференциальных уравнений, ибо стандартная функция данного математического пакета этим свойством не обладает.

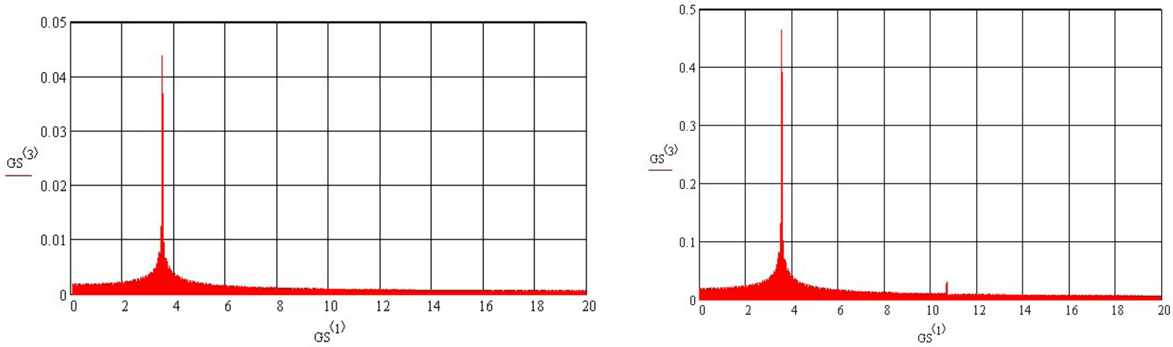
На рис. 2 показан модуль передаточной функции системы в абсолютном измерении (чтобы получить этот рисунок ещё более идеальным для построения модуля передаточной функции, нужно пройти с более мелким шагом по частоте; потому в данном случае использовались 37 точек). В представленном рисунке по оси ординат откладывалась величина модуля передаточной функции, а по оси абсцисс — частота внешнего возбуждения. На нём хорошо виден скачок амплитуды колебаний системы с верхней ветви АЧХ на нижнюю ветвь. Понятно, что существует средняя ветвь АЧХ, которая, в принципе, не реализуется численными методами из-за неустойчивости.

Наличие вязкого трения, как известно, скругляет левую и среднюю ветви АЧХ и вследствие этого на ней существует точка, в которой производная от амплитуды колебания по частоте возмущения равна бесконечности. Действительно, модуль передаточной функции с 11,015 мгновенно изменился до 1,812, т. е. уменьшился в шесть раз. Далее система двигается по нижней ветви передаточной функции, асимптотически приближаясь к нулевому значению.

Ниже на рис. 3 представлено абсолютное перемещения защищаемого объекта. Сделаем замечание относительно используемого понятия «резонанс», так как для нелинейных систем оно не означает совпадение частоты внешнего возмущения с собственной частотой системы. Для нелинейной системы понятие резонанса указывает на равенство работ сил трения и возмущающих сил. Но в данном непринципиальном случае подразумевается классическое понятие.

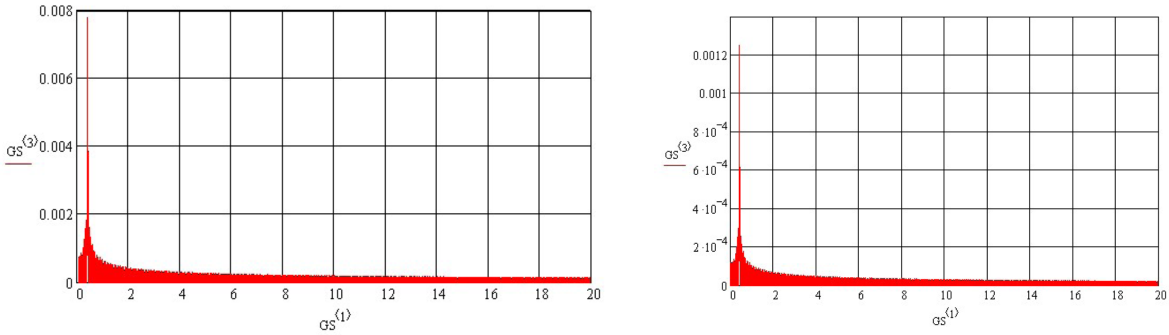
На первый взгляд, кажется, что колебания происходят с одной частотой, но спектральный анализ, выполненный ниже, покажет, что решение состоит из трёх составляющих: основной, субгармоники порядка 1/3 и третьей гармоники. На рис. 3, рис. 4 даны результаты оценивания абсолютного перемещения и абсолютного ускорения защищаемого объекта при резонансе.

Здесь ещё раз отметим особенность подхода к вычислению, вообще говоря, осциллирующего интеграла $\int_0^\infty \rho(\tau)\cos\omega\tau d\tau$, который в литературе, посвящённой этой проблеме, вычисляется чаще всего по приближённым формулам для «прямоугольников» либо «трапеций». Здесь авторами был разработан алгоритм спектрального анализа, использующий метод Филона и заключающийся



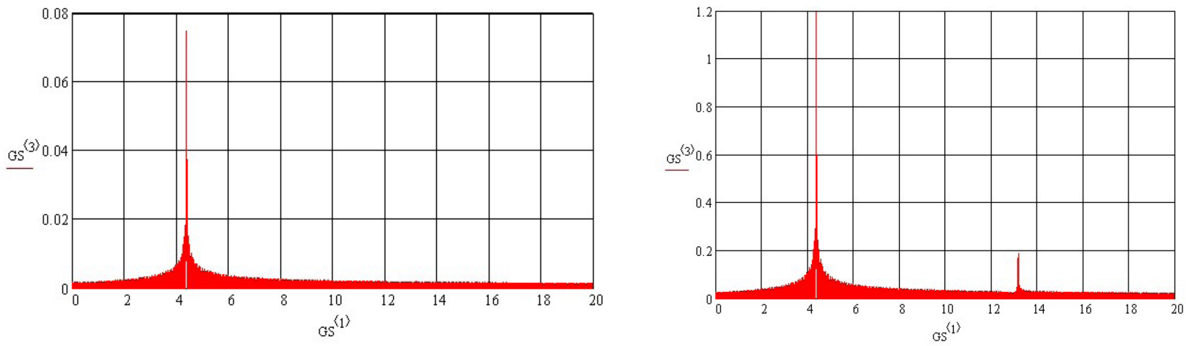
а) б)

Рис. 5. Спектральные мощности перемещения и ускорения защищаемого объекта в абсолютном движении на резонансной частоте ω = 3,2519 рад/с: а — перемещение сиденья; б — ускорение сиденья



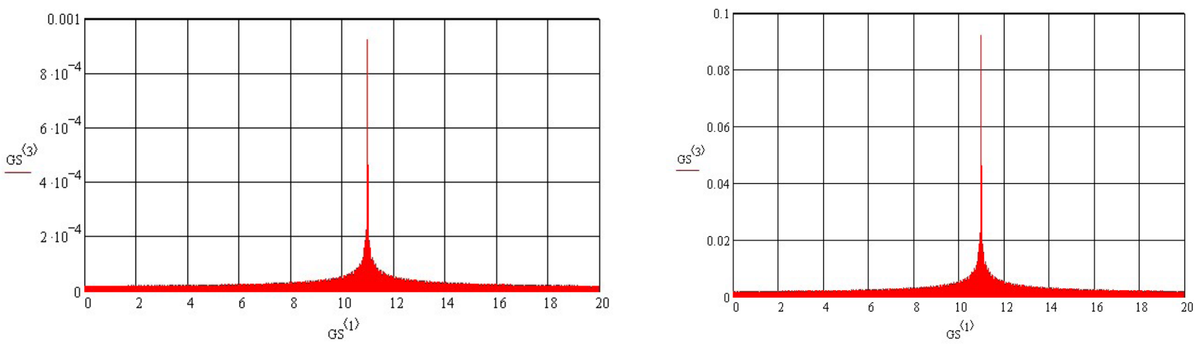
а) б)

Рис. 6. Спектральные мощности перемещения и ускорения защищаемого объекта в абсолютном движении при частоте ω = 0,4 рад/с (дорезонансная зона): а — перемещение сиденья; б — ускорение сиденья



а) б)

Рис. 7. Спектральные мощности перемещения и ускорения защищаемого объекта в абсолютном движении при частоте ω = 4 рад/с (резонансная зона): а — перемещение; б — ускорение



а) б)

Рис. 8. Спектральные мощности перемещения и ускорения защищаемого объекта в абсолютном движении далеко в зарезонансной зоне при ω = 11 рад/с (зарезонансная зона): а — перемещение; б — ускорение

в том, что корреляционная функция аппроксимировалась на малых отрезках времени полиномом второй степени, хотя степень полинома можно взять и выше.

Следовательно, точность вычисления спектральной плотности теперь определяется точностью представления корреляционной функции, ибо соответствующие интегралы теперь вычисляются точно, так как они являются табличными.

На рис. 5—8 показаны спектральные мощности перемещения и ускорения объекта в абсолютном движении.

Относительное движение исследуемой механической системы спектральному анализу не подвергалось. При этом по осям ординат откладывались перемещения (м) и ускорения (м/с^2), а по оси абсцисс — частота (рад/с).

Выводы. Выполненный анализ результатов математического моделирования поведения нелинейной механической системы с жёсткой кубической силовой характеристикой позволяет заключить следующее:

1) система виброзащиты объекта, построенная на основе принципа компенсации внешних возмущений — введении в структурную схему виброизоляции дополнительного упругого элемента, формирующего в процессе колебаний реакцию, направленную встречно динамической реакции основного упругого элемента, доставляет ей высокие динамические качества;

2) в дорезонансной и резонансной зонах общее решение состоит из субгармонического, основного колебания и третьей гармоники: на частоте возмущения $\omega = 3{,}252$ с$^{-1}$ наблюдаются ещё составляющие с частотами 3,58 и 10,73 и амплитудами 0,464 и 0,031 м/с^2; на частоте возмущения $\omega = 0{,}4$ рад/с получаем составляющие с частотами 0,44 с$^{-1}$ и 1,32 с$^{-1}$ и амплитудами 0,00782 и 0,00125 м/с^2; на частоте возмущения $\omega = 4$ с$^{-1}$ обнаруживаются частоты 4,4 с$^{-1}$ и 13,2 с$^{-1}$ с амплитудами 1,20 и 0,1894 м/с^2;

3) в зарезонансной зоне при $\omega = 10$ с$^{-1}$ еще присутствует составляющая с частотой 11 с$^{-1}$ и амплитудой 0,09238 м/с^2;

4) субгармоническую составляющую и третью гармонику на спектральных мощностях перемещений защищаемого от вибрации объекта обнаружить невозможно на фоне шума, создаваемого вследствие того, что анализируемые реализации хотя и имели 172718 точек, но всё же конечны, и эти составляющие чётко обнаруживаются при анализе ускорений защищаемого объекта. Следует также отметить, что амплитуда третьей гармоники по сравнению с основной в 6,25 раза меньше в зарезонансной зоне, в 15,084 раза меньше в резонансной зоне при $\omega = 3{,}251914$ с$^{-1}$ и в 6,334 раза меньше в резонансной зоне при $\omega = 4$ с$^{-1}$. Важно заметить, что в зарезонансной зоне третья гармоника, вообще говоря, не обнаруживается, поэтому оценивать её в этом случае необязательно;

5) наиболее чувствительным к частоте возмущения параметром динамической системы является ускорение, что является естественным, ибо оно есть произведение амплитуды составляющей перемещения системы на квадрат частоты.

Таким образом, использование как приближённых аналитических, так и численных методов в сочетании со спектральным анализом, позволяет более детально исследовать динамику нелинейных механических систем.

Библиографический список

1. Щипанов Г. В. Теория и методы построения автоматических регуляторов // Автоматика и телемеханика. 1939. № 1. С. 4—37.
2. Лузин Н. Н. К изучению матричной теории дифференциальных уравнений. // Автоматика и телемеханика. 1940. № 5. С. 4—66.
3. Петров Б. Н. О реализуемости условий инвариантности // Теория инвариантности и ее применение в автоматических системах: тр. 1-го Всесоюзн. совещания по теории инвариантности, состоявшегося в Киеве 16—20 окт. 1958 г. Москва: Изд-во АН СССР, 1959. С. 59—80.
4. Алабужев П. М., Гритчин А. А., Ким Л. И. [и др.]. Виброзащитные системы с квазинулевой жесткостью / под ред. К. М. Рагульскиса. Ленинград: Машиностроение, 1986. 100 с.
5. Nekhaev V. A., Nikolaev V. A. Synthesis of invariant vibroprotection system (theory and practice) // Nonlinear vibration problems: proceedings of Twelve International Scientific Conference. Warszawa: DWH-Polish Sientific Publishers, 1993. Vol. 25. P. 224—236.
6. Бурьян Ю. А., Сорокин В. Н., Галуза Ю. Ф., Поляков С. Н. Активная система виброизоляции с экстремальным регулятором // Вестник машиностроения. 2015. № 2. С. 37—40.
7. Нехаев В. А., Николаев В. А., Закерничная Н. В., Баглайчук С. В. Виброзащита человека-оператора на основе применения принципа регулирования по возмущению // Проблемы машиноведения: материалы II Междунар. науч.-техн. конф. / науч. ред. П. Д. Балакин. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2018. С. 93—97. ISBN 978-5-8149-2600-5.
8. Николаев В. А., Нехаев В. А. Динамика системы с компенсирующей связью и релаксационным трением // Проблемы механики современных машин: материалы VII Междунар. науч. конф. Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2018. Т. 1. Р. 274—277. ISBN 978-5-6041868-1-7.
9. Рыбак Л. А., Синев А. В., Пашков А. И. Синтез активных систем виброизоляции на космических объектах. Москва: Янус-К, 1997. 159 с.
10. Каннингхэм, В. Введение в теорию нелинейных систем (перевод с английского). Москва: Ленинград: Госэнергоиздат, 1962. 456 с.
11. Крюков Б. И. Вынужденные колебания существенно нелинейных систем. Москва: Машиностроение, 1984. 216 с.
12. Кузнецов Н. В. Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления // Известия РАН. Теория и системы управления. 2020. № 5. С. 5—27. DOI: 10.1134/S1064230720050093.
13. Бидерман В. Л. Прикладная теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. — Москва: Высшая школа, 1972. — 416 с.
14. Каудерер Г. Нелинейная механика. Москва: Изд-во иностранной литературы, 1961. 778 с.
15. Коловский М. З. Нелинейная теория виброзащитных систем. Москва: Наука, 1966. 320 с.
16. Магнус К. Колебания: Введение в исследование колебательных систем. Москва: Мир, 1982. 304 с.
17. Неймарк Ю. И. Математическое моделирование как наука и искусство. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2010. 420 с. ISBN 978-5-91326-145-8.
18. Бендатт Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов / пер. с англ. Г. В. Матушевского, В. Е. Приваловского. Москва: Мир, 1971. 408 с.

НЕХАЕВ Виктор Алексеевич, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры «Теоретическая и прикладная механика» Омского

государственного университета путей сообщения (ОмГУПС), г. Омск.
SPIN-код: 8041-9292
AuthorID (РИНЦ): 394940
Адрес для переписки: nehaevVA@omgups.ru
НИКОЛАЕВ Виктор Александрович, доктор технических наук, профессор (Россия), заведующий кафедрой «Теоретическая и прикладная механика» ОмГУПС, г. Омск.
SPIN-код: 2398-9007
AuthorID (РИНЦ): 395978
Адрес для переписки: nikolaevVA@omgups.ru
СМАЛЕВ Александр Николаевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Теоретическая и прикладная механика» ОмГУПС, г. Омск.
SPIN-код: 5336-2324
AuthorID (РИНЦ): 651442
Адрес для переписки: SmalevAN@yandex.ru
СЕРЯКОВ Кирилл Олегович, аспирант кафедры «Теоретическая и прикладная механика» ОмГУПС, г. Омск.
SPIN-код: 9535-4229
AuthorID (РИНЦ): 1119026
Адрес для переписки: kirillseryakov@gmail.com

Для цитирования

Нехаев В. А., Николаев В. А., Смалев А. Н., Серяков К. О. Исследование динамики механической системы с нелинейным упругим подвесом и спектральный анализ результатов // Омский научный вестник. 2023. № 3 (187). С. 15–22. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-187-15-22.

Статья поступила в редакцию 06.04.2023 г.

UDC 621.0
DOI: 10.25206/1813-8225-2023-187-15-22
EDN: EHSGYX

V. A. NEKHAEV
V. A. NIKOLAEV
A. N. SMALEV
K. O. SERYAKOV

Omsk State
Transport University,
Omsk, Russia

DYNAMICS OF A MECHANICAL SYSTEM WITH NONLINEAR ELASTIC SUSPENSION AND SPECTRAL ANALYSIS OF THE RESULTS

The article considers the dynamics of a nonlinear mechanical system under the action of a kinematic perturbation on it. The object's vibration isolation system is described by a rigid cubic power characteristic and is based on compensation of external perturbations — the introduction of an additional elastic element with negative stiffness into the suspension. Numerical modeling of the system is performed, the results of which are analyzed by the method of spectral analysis, based on the representation of the correlation function on a small time interval by a square polynomial.
As a result of the analysis, it is found that in the pre-resonant and resonant regions, the general solution should consist of three components: a subharmonic of the order of 1/3, the fundamental harmonic, and the third harmonic. It is noted that only the subharmonic of the order of 1/3 and the fundamental harmonic are important in the resonant zone.
It is also noted that even simple nonlinear mechanical systems in the study of dynamics should use approximate analytical and numerical methods in combination with spectral analysis, since traditional methods of nonlinear mechanics are not adapted to solving problems taking into account a relatively large number of harmonic components that appear due to nonlinearity.

Keywords: mechanical system, rigid cubic force characteristic, Duffing equation, approximate analytical methods, mathematical modeling, spectral density (power), subharmonics, frequency response.

References

1. Shchipanov G. V. Teoriya i metody postroeniya avtomaticheskih regulyatorov [Theory and methods of construction of automatic regulators] // Avtomatika i telemekhanika. *Automation and Telemechanics.* 1939. No. 1. P. 4–37. (In Russ.).

2. Luzin N. N. K izucheniyu matrichnoj teorii differencial'nyh uravnenij [To the study of the matrix theory of differential equations] // Avtomatika i telemekhanika. *Automation and Telemechanics.* 1940. No. 5. P. 4–66. (In Russ.).

3. Petrov B. N. O realizuyemosti usloviy invariantnosti [On the feasibility of invariance conditions] // Teoriya invariantnosti i yeye primeneniye v avtomaticheskikh sistemakh. *The Theory of Invariance and its Application in Automatic Systems.* Moscow, 1959. P. 59–80. (In Russ.).

4. Alabuzhev P. M., Gritchin A. A., Kim L. I. [et al.]. Vibrozashchitnyye sistemy s kvazinulevoy zhestkost'yu [Vibration protection systems with quasi-zero stiffness] / ed. by K. M. Ragul'skisa. Leningrad, 1986. 100 p. (In Russ.).

5. Nekhaev V. A., Nikolaev V. A. Synthesis of invariant vibroprotection system (theory and practice) // Nonlinear vibration problems: proceedings of Twelve International Scientific Conference. Warszawa: DWH-Polish Sientific Publishers, 1993. Vol. 25. P. 224–236. (In Engl.)

6. Buryan Y. A., Sorokin V. N., Galuza Y. F., Polyakov S. N. Aktivnaya sistema vibroizolyacii s ekstremal'nym regulyatorom [Active vibration isolation system with extreme control] // Vestnik mashinostroenie. *Bulletin of Mechanical Engineering.* 2015. No. 2. P. 37–40. (In Russ.).

7. Nekhaev V. A., Nikolaev V. A., Zakernichnaya N. V., Baglaichuk S. V. Vibrozashchita cheloveka-operatora na osnove primeneniya principa regulirovaniya po vozmushcheniyu [Vibration protection of a human operator based on the application of the principle of regulation by perturbation] // Problemy mashinovedeniya. *Mechanical Science and Technology Update.* Omsk, 2018. P. 93–97. ISBN 978-5-8149-2600-5. (In Russ.).

8. Nikolaev V. A., Nekhaev V. A. Dinamika sistemy s kompensiruyushchej svyaz'yu i relaksacionnym treniem [Dynamics system with compensating and oscillation damper with spring] // Problemy mekhaniki sovremennyh mashin. *Issues on Modern Machines Mechanics.* Ulan-Ude, 2018. Vol. 1. P. 274–277. ISBN 978-5-6041868-1-7. (In Russ.).

9. Rybak L. A., Sinev A. V., Pashkov A. I. Sintez aktivnyh sistem vibroizolyacii na kosmicheskih ob"ektah [Synthesis of active vibration isolation systems on space objects]. Moscow, 1997. 159 p. (In Russ.).

10. Cunningham V. J. Introduction to nonlinear analysis. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1958. 349 p. (In Engl.).

11. Kryukov B. I. Vynuzhdennye kolebaniya sushchestvenno nelinejnyh sistem [Forced oscillations of essentially nonlinear systems]. Moscow, 1984. 216 p. (In Russ.).

12. Kuznetsov N. V. Theory of hidden oscillations and stability of control systems // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2020. Vol. 59, no. 5. P. 647–668. (In Engl.).

13. Biderman V. L. Prikladnaya teoriya mekhanicheskih kolebanij [Applied theory of mechanical vibrations]. Moscow, 1972. 416 p. (In Russ.).

14. Kauderer G. Nelinejnaya mekhanika [Nonlinear mechanics]. Moscow, 1961. 778 p. (In Russ.).

15. Kolovsky M. Z. Nelinejnaya teoriya vibrozashchitnyh sistem [Nonlinear theory of vibration protection systems]. Moscow, 1966. 320 p. (In Russ.).

16. Magnus K. Kolebaniya: Vvedenie v issledovanie kolebatel'nyh sistem [Introduction to the study of oscillatory systems]. Moscow, 1982. 304 p. (In Russ.).

17. Neumark Yu. I. Matematicheskoe modelirovanie kak nauka i iskusstvo [Mathematical modeling as science and art]. Nizhny Novgorod, 2010. 420 p. ISBN 978-5-91326-145-8 (In Russ.).

18. Bendatt Dzh., Pirsol A. Izmereniye i analiz sluchaynykh protsessov [Measurement and analysis of random processes] / trans. from Engl. G. V. Matushevskogo, V. E. Privalovskogo. Moscow, 1971. 408 p. (In Russ.).

NEKHAEV Victor Alekseevich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of Theoretical and Applied Mechanics Department, Omsk State Transport University (OSTU), Omsk.
SPIN-code: 8041-9292
AuthorID (RSCI): 394940
Correspondence address: nehaevVA@omgups.ru
NIKOLAEV Victor Aleksandrovich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Theoretical and Applied Mechanics Department, OSTU, Omsk.
SPIN- code: 2398-9007
AuthorID (RSCI): 395978
Correspondence address: nikolaevVA@omgups.ru
SMALEV Aleksandr Nikolaevich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Theoretical and Applied Mechanics Department, OSTU, Omsk.
SPIN-code: 5336-2324
AuthorID (RSCI): 651442
Correspondence address: SmalevAN@yandex.ru
SERYAKOV Kirill Olegovich, Graduate Student of Theoretical and Applied Mechanics Department, OSTU, Omsk.
SPIN-code: 9535-4229
AuthorID (RSCI): 1119026
Correspondence address: kirillseryakov@gmail.com

For citations

Nekhaev V. A., Nikolaev V. A., Smalev A. N., Seryakov K. O. Dynamics of a mechanical system with nonlinear elastic suspension and spectral analysis of the results // Omsk Scientific Bulletin. 2023. No. 3 (187). P. 15–22. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-187-15-22.

Received April 06, 2023.