

УДК/UDC 621.37

DOI: 10.25206/1813-8225-2025-194-96-106

EDN: JOAKSK

Научная статья/Original article

## ПОЛУНАТУРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОГОПОЛЮСНОГО ФИЛЬТРА

М. Н. Максимов<sup>1</sup>, С. М. Максимова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Южный федеральный университет, г. Таганрог

<sup>2</sup>Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук,  
г. Ростов-на-Дону

В статье предложен интерфейс (многополюсный фильтр), обеспечивающий устойчивость процесса полунатурного моделирования исходной системы в случае, когда фрагменты системы представлены N-полюсниками, связанными друг с другом сильной обратной связью (HIL).

Так, в частности, в статье в качестве исходной системы рассматривается обобщенная радиотехническая система, фрагменты которой являются N-полюсниками, которые обмениваются друг с другом на каждом шаге моделирования токами и напряжениями через предложенный интерфейс (2xN-полюсник/фильтр). Анализ устойчивости процесса HIL-моделирования ведется методами теории цепей и численными методами решения систем линейных алгебраических уравнений. Показан способ определения стабилизирующих параметров фильтра. Указано, что при этих параметрах фильтр является идеальной линией задержки, т.е. амплитудно-частотная характеристика фильтра не зависит от частоты, а фазо-частотная характеристика изменяется прямо пропорционально частоте, причем коэффициент пропорциональности — время задержки.

Адекватность полученных теоретических результатов иллюстрируется с помощью численного моделирования по частям трехфазного инвертора.

Более того, в статье сделано предложение, поскольку фильтр при правильном выборе параметров имеет уникальные характеристики — является не только идеальной линией задержки, но и фильтром чистой задержки (его амплитудно-частотная характеристика постоянна и равна единице), то его можно было бы назвать multipole pure delay фильтр (mpdpd-фильтр).

**Ключевые слова:** моделирование в реальном времени, полунатурное HIL-моделирование, устойчивость HIL-моделирования, дополнение Шура, метод решения систем линейных алгебраических уравнений, многополюсный фильтр чистой задержки (mpdpd-фильтр).

**Для цитирования:** Максимов М. Н., Максимова С. М. Полунатурное моделирование систем с использованием многополюсного фильтра // Омский научный вестник. 2025. № 2 (194). С. 96—106. DOI: 10.25206/1813-8225-2025-194-96-106. EDN: JOAKSK.



© Максимов М. Н., Максимова С. М., 2025.  
Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

## HIL MODELING OF SYSTEMS USING THE MULTIPOLE FILTER

M. N. Maksimov<sup>1</sup>, S. M. Maksimova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Southern Federal University, Taganrog, Russia

<sup>2</sup>Federal Research Centre Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences,  
Rostov-on-Don, Russia

The article proposes an interface (multipole filter) that provides stability of the semi-natural modelling of the initial systems when the fragments of the system are represented by N-poles connected with each other by high intensity loopback (HIL).

Thus, the article considers a generalized radio-technical system as an initial system, which fragments are N-poles that exchange currents and voltages with each other at every simulation through the proposed interface (2xN-pole/filter). The stability analysis of the HIL modeling process is carried out by circuit theory

methods and numerical methods of systems of linear algebraic equations solution. The method of the stabilizing filter parameters determination is demonstrated. At these parameters the filter is an ideal delay line, i.e. the amplitude-frequency response of the filter does not depend on frequency, and the phase-frequency response changes directly proportional to frequency with the proportionality coefficient as the delay time.

The adequacy of the obtained theoretical results is illustrated by means of numerical modeling on three-phase inverter parts.

Moreover, the article assumes that since the filter, with the correct choice of parameters has unique characteristics, it is not only an ideal delay line, but also a pure delay filter, as its amplitude-frequency response is constant and equal to one, it would be called a multipole pure delay filter (mppd-filter).

**Keywords:** real time digital modeling, HIL modeling, stability of the HIL modeling, Schur complement, method of SLAE solution, multipole pure delay filter (mppd-filter).

**For citation:** Maksimov M. N., Maksimova S. M. HIL modeling of systems using the multipole filter. *Omsk Scientific Bulletin*. 2025. No. 2 (194). P. 96–106. DOI: 10.25206/1813-8225-2025-194-96-106. EDN: JOAKSK.



© Maksimov M. N., Maksimova S. M., 2025.  
The content is available under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

### Введение

В статье предложен интерфейс, обеспечивающий устойчивость процесса полунатурного моделирования исходной системы в случае, когда фрагменты системы представлены N-полюсниками, связанными друг с другом сильной обратной связью.

Полунатурное моделирование — это когда исходная система разбивается на две (или более) части. При этом одна часть системы моделируется численно на компьютере, а другая часть — это реальный физический объект. Части системы обмениваются друг с другом данными в реальном масштабе времени. Обмен данными происходит через программно-аппаратный интерфейс, обеспечивающий цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП), аналого-цифровой преобразователь (АЦП) сигналов и при необходимости их усиление. Из-за появления в системе программно-аппаратного интерфейса реакция одной части системы на изменения в другой будет происходить с некоторой задержкой  $\tau$ .

Если при полунатурном моделировании между частями системы имеется сильная обратная связь, то такой вид полунатурного моделирования в зарубежной литературе получил название hardware-in-the-loop simulation (моделирование с оборудованием в цепи обратной связи), или HIL-моделирование. Это обусловлено тем, что наличие задержки  $\tau$  при обмене данными между сильно связанными частями системы приводит к возникновению неустойчивости процесса HIL-моделирования, что, в свою очередь, требует принятия дополнительных мер при реализации программно-аппаратного интерфейса.

История развития цифровых симуляторов реального времени (real time digital simulator — RTDS) приведена в диссертационной работе [1]. В ней также проведён детальный анализ различных интерфейсных алгоритмов (interface algorithms — IA), которые обеспечивают устойчивость процесса HIL-моделирования. Из российских публикаций в области устойчивости HIL-моделирования или смежных тем стоит выделить работы [2–5].

HIL-моделирование широко используется в промышленности, например, для проектирования, тестирования и верификации силовой электроники, микросетей, электромобилей, а также их систем управления и защиты. Поэтому решение задач, направленных на расширение области применения HIL, является актуальным.

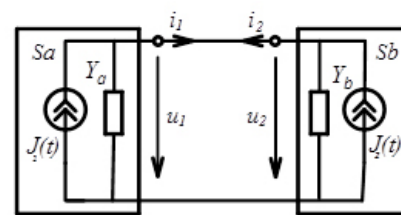


Рис. 1. Исходная система [4]

Fig. 1. Initial system [4]

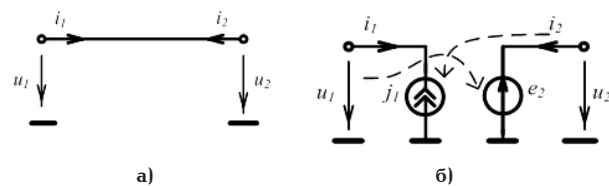


Рис. 2. Замена гальванической связи (а) двумя управляемыми источниками (б) [4]  
Fig. 2. Substitution of galvanic coupling (a) by two controlled sources (b) [4]

### 1. Постановка задачи

Пусть исходная система делится на два фрагмента  $Sa$  и  $Sb$  (рис. 1). Поведение этих фрагментов описывается с помощью систем обыкновенных дифференциально-алгебраических уравнений. Соответственно, на схеме  $Y_a$  и  $Y_b$  это входная и выходная проводимость частей  $Sa$  и  $Sb$ , а  $J_1(t)$  и  $J_2(t)$  обозначают независимые источники тока.

Гальваническая связь между фрагментами системы, представленная на рис. 2а, может быть заменена эквивалентными ей двумя управляющими связями, изображёнными на рис. 2б.

Поскольку напряжение источника  $e_2$  выбираем равным  $u_1$ , а значение тока источника  $j_1$  выбираем равным  $i_2$ , то уравнения электрического равновесия систем, изображённых на рис. 2а и 2б, будут эквивалентными. Эквивалентность цепей будет сохраняться, если источники напряжения и тока являются безынерционными.

Если же взаимодействие осуществляется с задержкой на величину  $\tau$ , то на устойчивость системы начинает влиять способ разбиения её на части и способ обмена данными между частями системы [4].

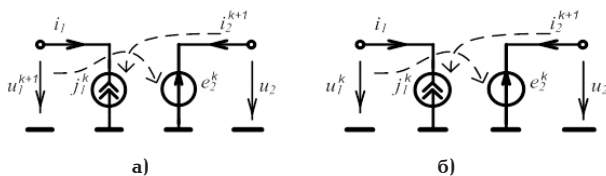


Рис. 3. Два варианта построения элементарных интерфейсных алгоритмов:

а) параллельный обмен данными;

б) последовательный обмен данными [4]

Fig. 3. Two variants of the elementary interface algorithms construction:

a) parallel data exchange;

b) serial data exchange [4]

На рис. 3 показаны четырёхполюсники с двумя существенно разными способами обмена данными между частями системы. В частности, на рис. 3а части системы функционируют параллельно друг другу и в идеале одновременно обмениваются данными на каждом  $k$ -м шаге моделирования (индексом  $k$  обозначен  $k$ -й момент времени) с частотой  $f = 1/T$ , где  $T = \tau = \tau_1 + \tau_2$ ;  $\tau_1, \tau_2$  — интервалы времени, которое требуется для расчёта первой части системы на компьютере и передачи данных между частями системы через программно-аппаратный интерфейс соответственно. Таким образом, в реальной системе при необходимости увеличить  $T$  интервал  $\tau$  нужно искусственно *увеличивать* так, чтобы именно в текущий момент времени  $k+1$ , были измерены значения на входе второй части для передачи их в первую часть и в этот же момент заданы новые значения управляемых источников. После этого части продолжают параллельно функционировать до следующего обмена данными.

На рис. 3б показан последовательный способ обмена данными, т.е. предполагается, что вторая часть ждёт отклика первой части на своё воздействие в течение  $\tau = \tau_1 + \tau_2$ . Поскольку вторая часть — это реальный физический объект, в котором нельзя приостановить протекание физических процессов на величину  $\tau$ , то в реальных системах, чтобы приблизиться к идеалу, обычно стремятся сделать  $\tau$  как можно меньше и выбрать  $T \gg \tau$ . Задержка  $\tau$  существенно влияет на устойчивость процесса НПЛ-моделирования и затрудняет поиск значений стабилизирующих параметров в интерфейсных алгоритмах, основанных на последовательном обмене данными.

Например, если в программно-аппаратном интерфейсе используются усилители, то величина  $\tau_2 \gg \tau_1$  становится значимой, следовательно, и проблем с устойчивостью и сходимостью процесса моделирования тоже становится больше [6–10]. Для акцентирования внимания на этом процессе в литературе для такого вида полунатурного моделирования введён термин РНЛ (power hard ware in the loop).

Если разбиение системы произошло так, что между частями системы нет сильной обратной связи, например при  $Y_a \gg Y_b$ , то данных четырёхполюсников (рис. 3) достаточно, чтобы обеспечить устойчивость и сходимость результатов полунатурного моделирования, но если  $Y_a \approx Y_b$ , то — нет. К сожалению, большинство задач в области полунатурного моделирования, связанных с тестированием, отработкой алгоритмов управления, моделированием работы реальных устройств, подразумевает наличие сильной обратной связи между частями системы.

Кроме того, исходная система может быть разбита на части так, что её фрагменты могут быть  $N$ -полюсниками. В этом случае при НПЛ-моделировании обмен данными между ними должен обеспечивать  $2xN$ -полюсник, который учитывает, что между фрагментами системы может быть глубокая обратная связь. В литературных источниках, посвящённых НПЛ-моделированию, в качестве интерфейса между фрагментами системы обычно рассматривается либо четырёхполюсник, либо  $2xN$ -полюсник [1, 10], представленный набором отдельно взятых четырёхполюсников, которые не учитывают в полной мере наличие глубокой обратной связи между  $N$ -полюсными фрагментами системы.

Таким образом, основная цель данной работы заключается в нахождении такого *многополюсника* ( $2xN$ -полюсника), который обеспечивал бы безусловную устойчивость и сходимость процесса НПЛ-моделирования разбитой на части системы в общем случае, т.е. даже при наличии сильной обратной связи между фрагментами системы.

В данной работе под обменом данными понимается итерация значениями токов и напряжений между фрагментами системы, выполняемая на каждом временном шаге с частотой  $f = 1/\tau$ , причём обмен данными будет происходить параллельно, как показано на рис. 3а.

Кроме того, зададим  $h = \tau$ , где  $h$  — шаг интегрирования, используемый при численном решении системы обыкновенных дифференциально-алгебраических уравнений, описывающих часть  $Sa$ ;  $Sa$  — часть системы, которая численно моделируется на компьютере;  $\tau$  — интервал времени, в течение которого часть  $Sa$  рассчитала новые значения и подготовила программно-аппаратный интерфейс к тому, чтобы по окончании интервала выдать новые значения в часть  $Sb$ ;  $Sb$  — часть системы, представленная реальным физическим объектом.

Сравнивая рассматриваемый многополюсник с интерфейсными алгоритмами (четырёхполюсниками) ITM (ideal transformer model), TLM (transmission line model), TFA (time-variant first-order approximation), PCD (partial circuit duplication) и DIM (damping impedance method), описанными в [1], из всех ИА только TLM алгоритм, как и многополюсник, обеспечивает параллельный обмен данными, но в TLM алгоритме предполагается, что части системы связаны между собой через реактивный элемент, что сразу сужает область его применения [4].

## 2. Решение поставленной задачи

Для связности изложения материала приведём наиболее значимые результаты, изложенные ранее в [12].

Прежде чем рассматривать многополюсник, рассмотрим его более упрощённый вариант — четырёхполюсник. На рис. 4 и 5 изображён четырёхполюсник в его  $Z$  и  $Y$ -форме. Свойства четырёхполюсника/фильтра подробно описаны в [4, 5, 11, 12].

$Z$  и  $Y$ -параметры четырёхполюсника в операторной форме для соответствующих представлений приведены ниже:

$$Z = \begin{bmatrix} \frac{z_1 + z_2 e^{-2p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} & \frac{(z_1 + z_2)e^{-p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} \\ \frac{(z_1 + z_2)e^{-p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} & \frac{z_2 + z_1 e^{-2p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} \end{bmatrix},$$

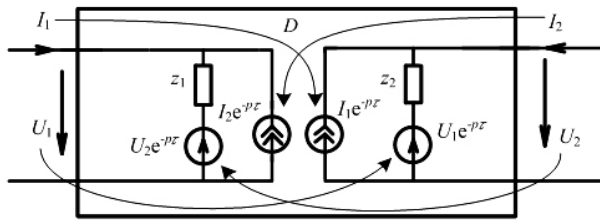


Рис. 4. Z-форма четырёхполюсника [12]  
Fig. 4. Z-shape of the quadripolar [12]

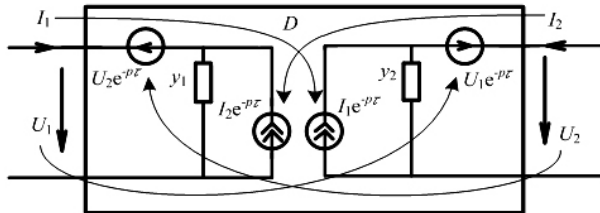


Рис. 5. Y-форма четырёхполюсника [12]  
Fig. 5. Y-shape of the quadripolar [12]

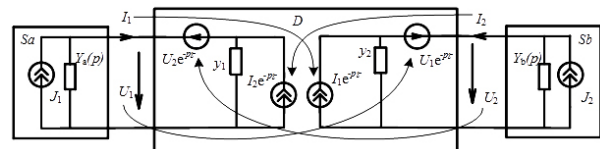


Рис. 6. Операторная форма разбитой на части системы [12]  
Fig. 6. Statement form of a partitioned system [12]

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{y_1 + y_2 e^{-2p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} & \frac{-(y_1 + y_2) e^{-p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} \\ \frac{-(y_1 + y_2) e^{-p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} & \frac{y_2 + y_1 e^{-2p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Как видно из рис. 4 и 5, фильтр  $D$  состоит из управляемых источников напряжения и тока, значения которых равны значениям соответствующих напряжений и токов на входах четырёхполюсника, задержанных на величину  $\tau$ . Сопротивления/проводимости  $z_1/y_1$  и  $z_2/y_2$  называются стабилизирующими элементами (параметрами). Значения стабилизирующих параметров существенно влияют на устойчивость и сходимость результатов полунатурного моделирования.

Разобьём исходную систему на части, используя четырёхполюсник  $D$ . Воспользуемся Y-формой четырёхполюсника поскольку на рис. 1 параметры исходной системы представлены в виде проводимостей.

Если в схеме, изображённой на рис. 6, задать значение  $y_1 = Y_b$ , то входные коэффициенты передачи четырёхполюсника по напряжению и току становятся равными  $U_2/U_1 = e^{-p\tau}$  и  $I_2/I_1 = -e^{-p\tau}$  соответственно, а входная проводимость равна  $I_1/U_1 = Y_b$ .

Если задать значение  $y_2 = Y_a$ , то выходные коэффициенты передачи четырёхполюсника, изображённого на рис. 6, по напряжению и току становятся равными  $U_1/U_2 = e^{-p\tau}$  и  $I_1/I_2 = -e^{-p\tau}$  соответственно, а выходная проводимость равна  $I_2/U_2 = Y_a$ . Другими словами, четырёхполюсник ста-

новится идеальной линией задержки. Это, в свою очередь, значит, что амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) не зависит от частоты, а фазо-частотная характеристика (ФЧХ) изменяется прямо пропорционально частоте, причём коэффициент пропорциональности — время задержки.

Исследуя полюсы передаточных функций цепи, изображённой на рис. 6, можно получить выражение вида:

$$p = \frac{-\ln \left( \frac{(Y_b + y_2)(Y_a + y_1)}{(y_2 - Y_a)(y_1 - Y_b)} \right)}{2\tau}.$$

Как известно, система устойчива, если полюс  $p$  передаточной функции лежит в левой полуплоскости [13], а это будет выполнено, если будет выполняться условие:

$$\frac{(y_2 - Y_a)(y_1 - Y_b)}{(Y_b + y_2)(Y_a + y_1)} < 1. \quad (2)$$

Если сравнить полученное выражение (2) с выражениями и результатами, полученными в [11], то увидим, что они не противоречат друг другу. Поэтому требование о том, что фильтр  $D$  должен играть роль идеальной линии задержки, эквивалентно требованию обращения в ноль всех собственных чисел матрицы перехода  $W$  [11] и требованию, чтобы все полюсы передаточной функции были расположены в левой полуплоскости на  $-\infty$ .

Необходимо отметить, что, поскольку разбитая на части система отличается от исходной появлением в ней идеальной линии задержки, то процессы в этих системах будут отличаться друг от друга. Причём основное отличие будет заключаться в задержке сигнала на величину  $\tau$ . Гипотетически можно представить, что в исходной системе появился ещё один реактивный элемент, что делает предложенный подход похожим на TLM интерфейс.

До сих пор разбитая на части система рассматривалась в операторной области. При её моделировании на компьютере с помощью численных методов интегрирования дифференциальных уравнений задаётся шаг моделирования  $h$ ; реактивные элементы системы заменяются их моделями, состоящими из активных элементов и управляемых источников тока или напряжения.

Таким образом,  $Y_a$  и  $Y_b$  становятся действительными числами, следовательно, стабилизирующие параметры  $y_1$  и  $y_2$  тоже должны быть действительными числами, и это, с точки зрения реализации их в аппаратной части интерфейса, положительный момент. Отрицательный момент заключается в том, что область устойчивости выбранного численного метода интегрирования дифференциальных уравнений начинает влиять на устойчивость разбитой на части системы. Необходимо также отметить, что когда четырёхполюсник функционировал в режиме идеальной линии задержки, то токи, протекающие через  $y_1$  и  $y_2$ , минимальны и прямо пропорциональны скорости изменения независимых источников, т.е. потери энергии в линии задержки минимальны.

Предположим, что для исходной системы с помощью метода узловых потенциалов была составлена система уравнений вида  $(G + pC)U = J$ . После перехода во временную область и применения обратной формулы Эйлера получим систему ли-



нейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида  $(C/h + G)u_{n+1} = (C/h)u_n + j_{n+1}$ , где  $h$  — выбранный шаг моделирования [14].

Пусть поведение фрагментов  $Sa$  и  $Sb$  описывается, например, матрицами 2-го порядка (порядок матриц на самом деле не важен и может быть выбран любым). Поскольку между частями системы имеется однопортовое соединение, то переставляя строки и столбцы матрицы, описывающей поведение исходной (не разбитой на части) системы, её можно привести к виду:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} + b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}^{k+1} \\ u_{22}^{k+1} \\ u_{44}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11}^k \\ j_{22}^k + j_{33}^k \\ j_{44}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_1^{k+1} \\ j_2^{k+1} + j_3^{k+1} \\ j_4^{k+1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

или, если в явном виде выразить ток  $i_1$ , протекающий между частями системы  $Sa$  и  $Sb$ , в виде:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}^{k+1} \\ u_{22}^{k+1} \\ i_1^{k+1} \\ u_{33}^{k+1} \\ u_{44}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11}^k \\ j_{22}^k \\ 0 \\ j_{33}^k \\ j_{44}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_1^{k+1} \\ j_2^{k+1} \\ 0 \\ j_3^{k+1} \\ j_4^{k+1} \end{bmatrix},$$

где  $k$  —  $k$ -й момент времени;  $u_{nn}^{k+1}$  — узловые потенциалы;  $j_{nn}^k = (C/h)u_n$ ;  $j_n^{k+1}$  — зависимые и независимые источники тока, подключённые к соответствующим узлам цепи;  $a_{nn}$  и  $b_{nn}$  — действительные коэффициенты матрицы  $(C/h + G)$ , полученной в результате замены активных и реактивных элементов системы их моделями.

Тогда система, разбитая с помощью четырёхполюсника  $D$  на части, будет описываться системой уравнений, приведенной ниже:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{y_1 + y_2 z^{-2}}{1 - z^{-2}} & -\frac{(y_1 + y_2)z^{-1}}{1 - z^{-2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(y_1 + y_2)z^{-1}}{1 - z^{-2}} & \frac{y_2 + y_1 z^{-2}}{1 - z^{-2}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{11}^{k+1} \\ u_{22}^{k+1} \\ i_1^{k+1} \\ u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ u_{33}^{k+1} \\ u_{44}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11}^k \\ j_{22}^k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ j_{33}^k \\ j_{44}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_1^{k+1} \\ j_2^{k+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ j_3^{k+1} \\ j_4^{k+1} \end{bmatrix}.$$

В системе в явном виде выражены значения токов  $i_1^{k+1}$ ,  $i_2^{k+1}$  и напряжений  $u_1^{k+1}$ ,  $u_2^{k+1}$  на входе и выходе четырёхполюсника  $D$ .

Преобразуя полученную систему, приведём её к виду:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}^{k+1} \\ u_{22}^{k+1} \\ i_1^{k+1} \\ u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ i_2^{k+1} \\ u_{33}^{k+1} \\ u_{44}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11}^k \\ j_{22}^k \\ 0 \\ i_1^{k-1} - y_2 u_1^{k-1} + (y_2 + y_1) u_2^k \\ i_2^{k-1} - y_1 u_2^{k-1} + (y_2 + y_1) u_1^k \\ 0 \\ j_{33}^k \\ j_{44}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_1^{k+1} \\ j_2^{k+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ j_3^{k+1} \\ j_4^{k+1} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Как видно из выражения, система распалась на два фрагмента, которые решаются независимо друг от друга и на каждом временном шаге обмениваются данными друг с другом через управляемые источники тока, зависящие от токов и напряжений на входе четырёхполюсника в предыдущие моменты времени. Данное преобразование можно считать переходом от операторного представления идеальной линии задержки к её модели.

Фактически (4) можно рассматривать как способ решения исходного СЛАУ (3) с помощью итерационного метода, причём когда четырёхполюсник  $D$  функционирует в режиме идеальной линии задержки, то при одной итерации на каждом временном шаге (имитация НЛ) полученное решение с учётом задержки на величину  $\tau$  совпадает с решением исходной системы. Если бы была возможность выполнить вторую итерацию, то решения совпали бы полностью. Таким образом, итерационный метод трансформируется в прямой метод решения СЛАУ, так как решение находится всегда за две итерации. Если выполняется хотя бы одно из условий  $y_1 = Y_b$  или  $y_2 = Y_a$ , то решение всегда находится за две или три итерации в зависимости от того, в каком фрагменте системы находится независимый источник и какое из двух условий выполнено. Если не выполняется ни одно из условий  $y_1 = Y_b$ ,  $y_2 = Y_a$ , но выполняется условие (2), то итерационный процесс устойчив и сходится к решению за несколько (больше трёх) итераций [12, 16]. Следовательно, при выполнении этих условий процесс моделирования НЛ системы также будет устойчив и будет сходиться к результатам моделирования исходной системы, причём скорость сходимости будет тем выше, чем строже выполняется неравенство (2).

Вычислить значения  $Y_a$  и  $Y_b$  системы как отношение входного тока к напряжению можно с помощью выражений (в литературе по численным методам решения СЛАУ их называют дополнением Шура [15]), приведённых ниже:

$$Y_a = A/a_{11} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})/a_{11} = \det(a)/a_{11} = a_{22} - a_{12}a_{11}^{-1}a_{21},$$

$$Y_b = B/b_{22} = (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})/b_{22} = \det(b)/b_{22} = b_{11} - b_{12}b_{22}^{-1}b_{21}. \quad (5)$$

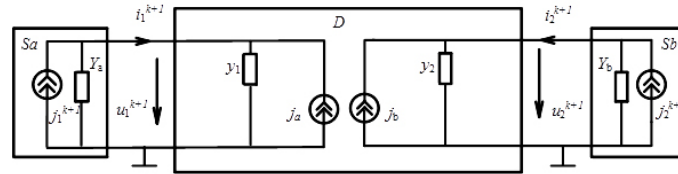


Рис. 7. Эквивалентная схема разбитой на части системы  
Fig. 7. Equivalent scheme of a partitioned system

Далее, устанавливая значения  $y_1 = Y_b$ ,  $y_2 = Y_a$ , можно обеспечить работу четырёхполюсника в режиме идеальной линии задержки. Таким образом, вычисляя значения стабилизирующих параметров до начала моделирования с помощью (5), можно добиться того, что четырёхполюсник  $D$ , изображённый на рис. 7, будет функционировать в режиме идеальной линии задержки, где  $y_1 = Y_b$ ,  $j_a = i_1^{k-1} - y_2 u_1^{k-1} + (y_2 + y_1) u_2^k$  могут быть численно учтены в модели  $Sa$  ( $j_a$  вычисляется на основе вычисленных значений  $i_1^{k-1}$ ,  $u_1^{k-1}$  и измеренного значения  $u_2^k$ );  $y_2 = Y_a$ ,  $j_b = i_2^{k-1} - y_1 u_2^{k-1} + (y_1 + y_2) u_1^k$  — это физические объекты аппаратной части ( $y_2$  — проводимость,  $j_b$  — управляемый источник тока, значение которого зависит от измеренных ранее значений  $i_2^{k-1}$ ,  $u_2^{k-1}$  и вычисленного значения  $u_1^k$ ).

Кроме того,  $y_2$  можно рассматривать как сумму  $y_j + \Delta y$ , где  $y_j$  — внутренняя проводимость реального источника тока, который моделируется с помощью идеального источника  $j_b$ , а  $\Delta y$  — дополнительная/внешняя проводимость. Отсюда следует, что  $y_j$  должно быть меньше  $y_2$  иначе выбранный реальный источник тока не может быть использован в программно-аппаратном интерфейсе, так как его мощности недостаточно.

Поскольку предполагается, что фрагмент системы  $Sa$  моделируется на компьютере, то найти значение  $Y_a$  с помощью (5) не представляет труда. Найти значение  $Y_b$  труднее, так как  $Sb$  — это реальный физический объект, т.е., чтобы найти  $Y_b$ , нужно построить его математическую модель.

Тем не менее даже если задать значения стабилизирующих параметров следующим образом:  $y_1 = y_2$  и их значение лежит в диапазоне  $[Y_a, Y_b]$ , то

разбитая на части система всё равно будет продолжать оставаться устойчивой, а результаты моделирования будут эквивалентны результатам моделирования исходной системы [12, 16].

### 3. Многополюсное представление фильтра

Рассмотрим более общий случай, когда фрагменты исходной системы представляют собой  $N$ -полюсники. В этом случае фильтр тоже должен быть  $2 \times N$ -полюсником. Матрица проводимости такого фильтра формируется из  $(N-1)^2$  матриц следующим образом:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{21} & Y_{31} & Y_{41} & Y_{51} & Y_{61} & Y_{71} & Y_{81} & Y_{91} \\ Y_{12} & Y_{22} & Y_{32} & Y_{42} & Y_{52} & Y_{62} & Y_{72} & Y_{82} & Y_{92} \\ Y_{13} & Y_{23} & Y_{33} & Y_{43} & Y_{53} & Y_{63} & Y_{73} & Y_{83} & Y_{93} \\ Y_{14} & Y_{24} & Y_{34} & Y_{44} & Y_{54} & Y_{64} & Y_{74} & Y_{84} & Y_{94} \\ Y_{15} & Y_{25} & Y_{35} & Y_{45} & Y_{55} & Y_{65} & Y_{75} & Y_{85} & Y_{95} \\ Y_{16} & Y_{26} & Y_{36} & Y_{46} & Y_{56} & Y_{66} & Y_{76} & Y_{86} & Y_{96} \\ Y_{17} & Y_{27} & Y_{37} & Y_{47} & Y_{57} & Y_{67} & Y_{77} & Y_{87} & Y_{97} \\ Y_{18} & Y_{28} & Y_{38} & Y_{48} & Y_{58} & Y_{68} & Y_{78} & Y_{88} & Y_{98} \\ Y_{19} & Y_{29} & Y_{39} & Y_{49} & Y_{59} & Y_{69} & Y_{79} & Y_{89} & Y_{99} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

если фрагменты системы являются  $N = 2, 3$  и 4-полюсниками соответственно, где  $Y_l$  — двухмерные матрицы вида (1);  $l = 1, \dots, 9$ . Рассуждая аналогичным образом, можно сформировать матрицу параметров  $2 \times N$ -полюсника при любом  $N$ .

Так, в частности, если фрагменты системы будут трёхполюсниками, то матрица проводимости фильтра будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{21} & Y_{12} & Y_{22} \\ Y_{31} & Y_{41} & Y_{32} & Y_{42} \\ Y_{13} & Y_{23} & Y_{14} & Y_{24} \\ Y_{33} & Y_{43} & Y_{34} & Y_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_1 + y_2 e^{-2p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} & \frac{y_3 + y_4 e^{-2p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} & -\frac{(y_1 + y_2) e^{-p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} & -\frac{(y_3 + y_4) e^{-p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} \\ \frac{y_5 + y_6 e^{-2p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} & \frac{y_7 + y_8 e^{-2p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} & -\frac{(y_5 + y_6) e^{-p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} & -\frac{(y_7 + y_8) e^{-p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} \\ -\frac{(y_1 + y_2) e^{-p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} & -\frac{(y_3 + y_4) e^{-p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} & \frac{y_2 + y_1 e^{-2p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} & \frac{y_4 + y_3 e^{-2p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} \\ -\frac{(y_5 + y_6) e^{-p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} & -\frac{(y_7 + y_8) e^{-p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} & \frac{y_6 + y_5 e^{-2p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} & \frac{y_8 + y_7 e^{-2p\tau}}{1 - e^{-2p\tau}} \end{bmatrix},$$

где  $y_1, y_2, \dots, y_8$  — стабилизирующие параметры.

Если поведение трёхполюсников (частей исходной системы) описывается, например, матрицами 3-го порядка (порядок матриц значения не имеет)

и между ними имеется двухпортовое соединение, то, переставляя соответствующим образом строки и столбцы матрицы, представляющей поведение исходной системы, её можно привести к виду:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} + b_{11} & a_{23} + b_{12} & b_{13} \\ a_{31} & a_{32} + b_{21} & a_{33} + b_{22} & b_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}^{k+1} \\ u_{22}^{k+1} \\ u_{33}^{k+1} \\ u_{66}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11}^k \\ j_{22}^k + j_{33}^k \\ j_{44}^k + j_{55}^k \\ j_{66}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_1^{k+1} \\ j_2^{k+1} + j_3^{k+1} \\ j_4^{k+1} + j_5^{k+1} \\ j_6^{k+1} \end{bmatrix},$$

или, если в явном виде выразить токи  $i_1, i_2$ , протекающие между частями системы, то

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}^{k+1} \\ u_{22}^{k+1} \\ u_{33}^{k+1} \\ i_1^{k+1} \\ i_2^{k+1} \\ u_{44}^{k+1} \\ u_{55}^{k+1} \\ u_{66}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11}^k \\ j_{22}^k \\ j_{33}^k \\ 0 \\ 0 \\ j_{44}^k \\ j_{55}^k \\ j_{66}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_1^{k+1} \\ j_2^{k+1} \\ j_3^{k+1} \\ 0 \\ 0 \\ j_4^{k+1} \\ j_5^{k+1} \\ j_6^{k+1} \end{bmatrix},$$

где  $k$  —  $k$ -й момент времени;  $u_{nn}^{k+1}$  — узловые потенциалы;  $j_{nn}^k = (C/h)u_n^k$ ,  $j_n^{k+1}$  — зависимые и независимые источники тока, подключённые к соответствующим узлам цепи;  $a_{nn}$  и  $b_{nn}$  — действительные коэффициенты матрицы  $(C/h + G)$ , полученной

в результате замены активных и реактивных элементов системы их моделями.

Тогда система, разбитая с помощью шестиполосника  $D$  на части, будет описываться системой уравнений, приведенной ниже:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & Y_{11} & Y_{21} & Y_{12} & Y_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & Y_{31} & Y_{41} & Y_{32} & Y_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{121} & Y_{221} & Y_{122} & Y_{222} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{321} & Y_{421} & Y_{322} & Y_{422} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}^{k+1} \\ u_{22}^{k+1} \\ u_{33}^{k+1} \\ i_1^{k+1} \\ i_2^{k+1} \\ u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ u_3^{k+1} \\ u_4^{k+1} \\ i_3^{k+1} \\ i_4^{k+1} \\ u_{44}^{k+1} \\ u_{55}^{k+1} \\ u_{66}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11}^k \\ j_{22}^k \\ j_{33}^k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ j_{44}^k \\ j_{55}^k \\ j_{66}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_1^{k+1} \\ j_2^{k+1} \\ j_3^{k+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ j_4^{k+1} \\ j_5^{k+1} \\ j_6^{k+1} \end{bmatrix}.$$

Преобразуем полученную систему, т.е. перейдём от операторного представления идеальной ли-

нии задержки к её модели, получим выражение вида:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y_1 & y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_5 & y_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 & y_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_6 & y_8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}^{k+1} \\ u_{22}^{k+1} \\ u_{33}^{k+1} \\ i_1^{k+1} \\ i_2^{k+1} \\ u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ u_3^{k+1} \\ u_4^{k+1} \\ i_3^{k+1} \\ i_4^{k+1} \\ u_{44}^{k+1} \\ u_{55}^{k+1} \\ u_{66}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11}^k \\ j_{22}^k \\ j_{33}^k \\ 0 \\ 0 \\ i_1^{k-1} - y_2 u_1^{k-1} - y_4 u_2^{k-1} + (y_1 + y_2) u_3^k + (y_3 + y_4) u_4^k \\ i_2^{k-1} - y_6 u_1^{k-1} - y_8 u_2^{k-1} + (y_5 + y_6) u_3^k + (y_7 + y_8) u_4^k \\ i_3^{k-1} - y_1 u_3^{k-1} - y_3 u_4^{k-1} + (y_1 + y_2) u_1^k + (y_3 + y_4) u_2^k \\ i_4^{k-1} - y_5 u_3^{k-1} - y_7 u_4^{k-1} + (y_5 + y_6) u_1^k + (y_7 + y_8) u_2^k \\ 0 \\ 0 \\ j_{44}^k \\ j_{55}^k \\ j_{66}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_1^{k+1} \\ j_2^{k+1} \\ j_3^{k+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ j_4^{k+1} \\ j_5^{k+1} \\ j_6^{k+1} \end{bmatrix}.$$

Если, как показано ниже, вычислить, используя дополнения Шура, матрицы  $Y_a$ ,  $Y_b$  фрагментов системы и задать значения параметров  $y_2$ ,  $y_4$ ,  $y_6$ ,  $y_8$  и  $y_1$ ,  $y_3$ ,  $y_5$ ,  $y_7$ , равными соответствующим коэффициентам этих матриц, следующим образом:

$$\begin{bmatrix} y_2 & y_4 \\ y_6 & y_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}}{a_{11}},$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_3 \\ y_5 & y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}}{b_{33}},$$

то фильтр  $D$  будет играть роль идеальной линии задержки. В этом можно убедиться, если по аналогии с четырёхполосным вариантом фильтра найти коэффициенты передачи по напряжению, току и входные, выходные проводимости нагруженного

шестиполюсника  $D$ , а также полюсы одной из передаточных функций фильтра.

Поскольку предполагается, что часть ( $Y_a$ ) фильтра  $D$  будет реализована в интерфейсе в виде реальных физических устройств (проводимостей и управляемых источников тока), то необходимо убедиться, что полученные коэффициенты матрицы  $Y_a$  позволят это сделать, т.е.  $Y_a$  физически реализуема и описывает поведение линейной цепи, уравнения которой в данном случае были сформированы методом узловых напряжений.

Часть ( $Y_a$ ) будет физически реализуема, если матрица  $Y_a$  симметрична относительно главной диагонали. На главной диагонали матрицы должны стоять положительные элементы, равные сумме проводимостей всех ветвей, подключённых к  $i$ -му узлу цепи, а остальные элементы матрицы — это взаимные проводимости между  $i$ -м и  $j$ -м узлами цепи, равные сумме проводимостей всех ветвей, включённых непосредственно между этими узлами, взятые с противоположным знаком [13].

Если матрицы  $Y_a$ ,  $Y_b$  удовлетворяют описанным выше требованиям, то эквивалентная схема разбитой на части системы будет выглядеть, как показано на рис. 8, где  $y_{35} = -y_3$ ;  $y_{46} = -y_3$ ;  $y_{11} = y_1 - y_{35}$ ;  $y_{77} = y_7 - y_{35}$ ;  $y_{22} = y_2 - y_{46}$ ;  $y_{88} = y_8 - y_{46}$ , а источники тока  $j_1$ ,  $j_2$ ,  $j_3$ ,  $j_4$  соответственно равны:

$$\begin{aligned} j_1 &= i_1^{k-1} - y_2 u_1^{k-1} - y_4 u_2^{k-1} + (y_1 + y_2) u_3^k + (y_3 + y_4) u_4^k, \\ j_2 &= i_2^{k-1} - y_6 u_1^{k-1} - y_8 u_2^{k-1} + (y_5 + y_6) u_3^k + (y_7 + y_8) u_4^k, \\ j_3 &= i_3^{k-1} - y_1 u_3^{k-1} - y_3 u_4^{k-1} + (y_1 + y_2) u_1^k + (y_3 + y_4) u_2^k, \\ j_4 &= i_4^{k-1} - y_5 u_3^{k-1} - y_7 u_4^{k-1} + (y_5 + y_6) u_1^k + (y_7 + y_8) u_2^k. \end{aligned}$$

Причём фрагмент эквивалентной схемы, присоединённый к части  $Sa$ , может быть численно учтен в её модели, а фрагмент, присоединённый к  $Sb$ , должен быть реализован в виде аппаратной части.

Таким образом, руководствуясь изложенным выше принципом (6), можно сформировать ма-

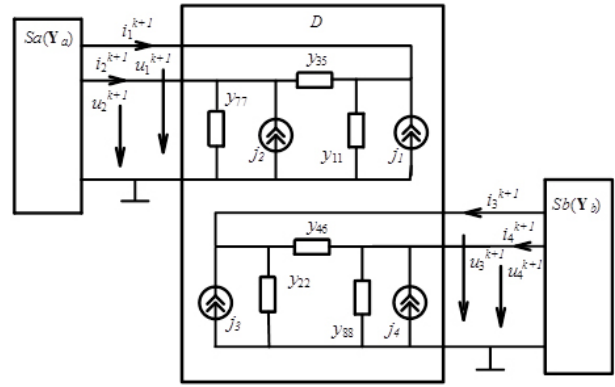


Рис. 8. Эквивалентная схема фильтра  $D$  при объединении трёхполюсников  
Fig. 8. Equivalent scheme of the  $D$  filter at the three-pole coupling

трицу параметров  $2 \times N$ -полюсного фильтра в  $Y$  или  $Z$ -форме. На основании полученной матрицы составить эквивалентную схему фильтра и с её помощью провести ННЛ-моделирование исходной системы, разбитой на два  $N$ -полюсника. При этом процесс полунатурного моделирования будет устойчив и эквивалентен процессу моделирования исходной системы.

#### 4. Имитация полунатурного моделирования нелинейной системы

Используем фильтр  $D$  и промоделируем по частям в среде MATLAB трёхфазный инвертор, изображённый на рис. 9. При моделировании по частям фрагменты системы будут обмениваться данными на каждом временном шаге только один раз, что соответствует процессам, протекающим в системе при её полунатурном моделировании.

Значение параметров следующее:  $Y_{da} = Y_{db} = Y_{dc} = 1e+3$  См;  $L_{da} = L_{db} = L_{dc} = 316e-6$  Гн;  $Y_{ga} = Y_{gb} = Y_{gc} = 100$  См;  $L_{ga} = L_{gb} = L_{gc} = 0,5e-3$  Гн;

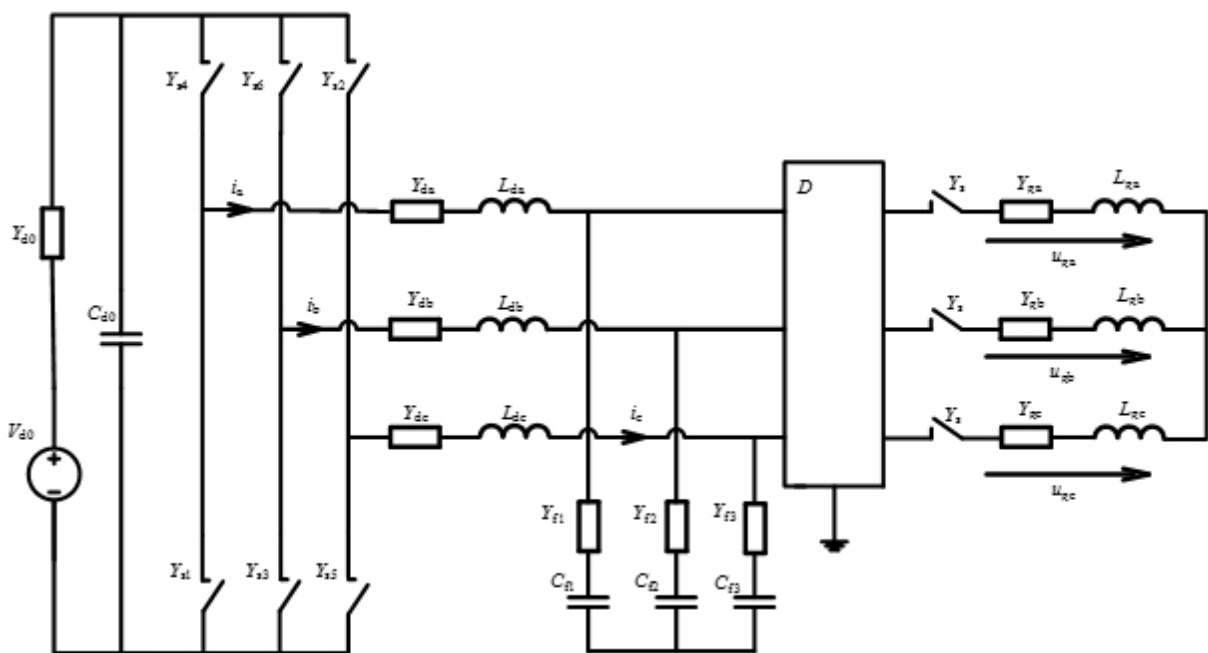
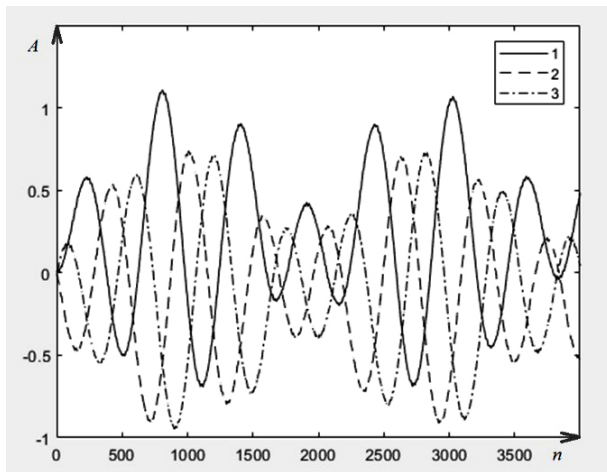
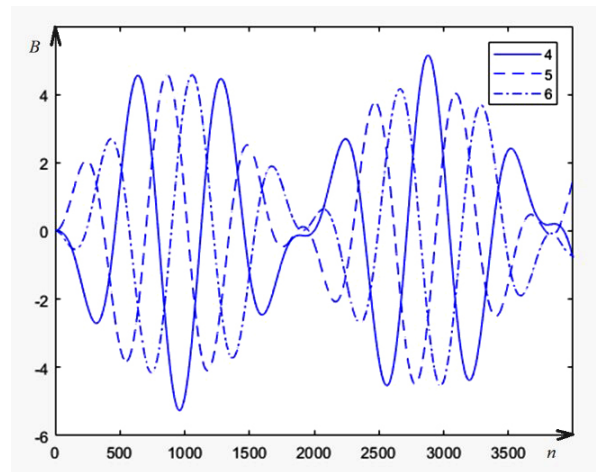


Рис. 9. Схема инвертора, разбитая на две части с помощью фильтра ( $D$ )  
Fig. 9. Inverter scheme divided into two parts by filter ( $D$ )

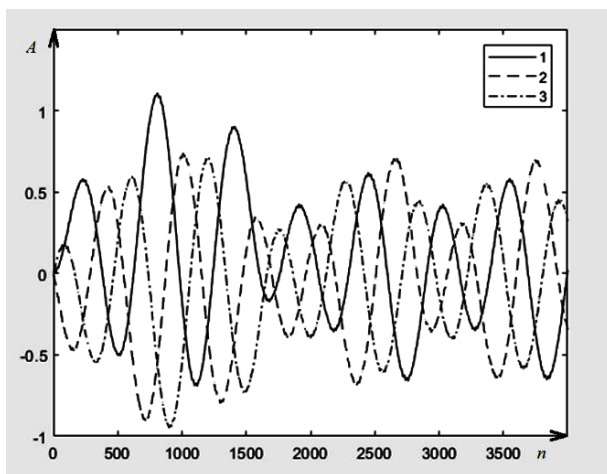




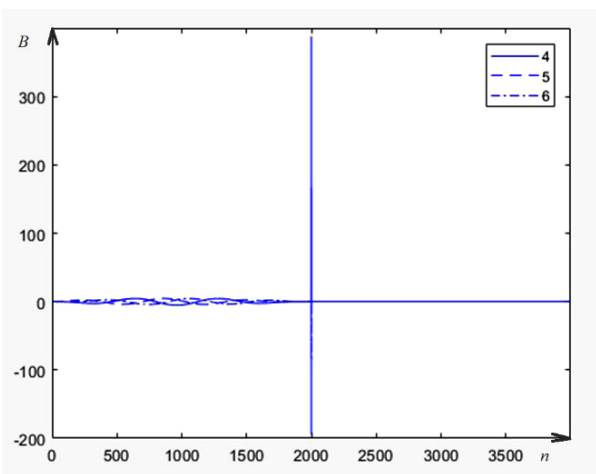
а)  
Рис. 10. Зависимости токов (а) и напряжений (б) от номера шага интегрирования при  $Y_s = \text{close}$ : 1 —  $i_a$ ; 2 —  $i_b$ ; 3 —  $i_c$ ; 4 —  $u_{ga}$ ; 5 —  $u_{gb}$ ; 6 —  $u_{gc}$



б)  
Fig. 10. Dependences of currents (a) and voltages (б) on the integration step number at  $Y_s = \text{close}$ : 1 —  $i_a$ ; 2 —  $i_b$ ; 3 —  $i_c$ ; 4 —  $u_{ga}$ ; 5 —  $u_{gb}$ ; 6 —  $u_{gc}$



а)  
Рис. 11. Зависимости токов (а) и напряжений (б) от номера шага интегрирования при  $Y_s = \text{close}$  (номер шага интегрирования от 1 до 2000), при  $Y_s = \text{open}$  (номер шага интегрирования от 2001 до 4000): 1 —  $i_a$ ; 2 —  $i_b$ ; 3 —  $i_c$ ; 4 —  $u_{ga}$ ; 5 —  $u_{gb}$ ; 6 —  $u_{gc}$



б)  
Fig. 11. Dependences of currents (a) and voltages (б) on the integration step number at  $Y_s = \text{open}$  (integration step number from 1 to 2000), at  $Y_s = \text{open}$  (integration step number from 2001 to 4000): 1 —  $i_a$ ; 2 —  $i_b$ ; 3 —  $i_c$ ; 4 —  $u_{ga}$ ; 5 —  $u_{gb}$ ; 6 —  $u_{gc}$

$Y_{f1} = Y_{f2} = Y_{f3} = 200 \text{ См}$ ;  $C_{f1} = C_{f2} = C_{f3} = 15e-6 \text{ Ф}$ ;  $C_{d0} = 470e-6 \text{ Ф}$ ;  $Y_{d0} = 1e+4 \text{ См}$ ;  $V_{d0} = 10 \text{ В}$ .

Ключи  $Y_{s1}$ ,  $Y_{s1} - Y_{s6}$  моделируются с помощью проводимостей, которые могут принимать значения  $\text{close} = 1e+9 \text{ См}$  или  $\text{open} = 1e-9 \text{ См}$ . Ключи  $Y_{s1} - Y_{s6}$  открываются и закрываются в соответствии с управляющими сигналами, которые позволяют реализовать широтно-импульсную модуляцию.

Для того чтобы обеспечить устойчивость разбитой на части системы, необходимо определить значение стабилизирующих параметров фильтра  $D$ , т.е. коэффициенты матриц  $Y_a$  и  $Y_b$  для системы, изображённой на рис. 9. Как известно, эти коэффициенты можно вычислить, используя дополнение Шура.

Поскольку трёхфазный инвертор — это нелинейная система, то она будет иметь шесть вариантов матрицы  $Y_a$  (существует шесть вариантов открытых/закрытых ключей  $Y_{s1} - Y_{s6}$ ) и два варианта матрицы  $Y_b$  (при  $Y_s = \text{open}$ ,  $Y_s = \text{close}$ ).

При данном варианте разбиения системы на части матрицы  $Y_a$  будут отличаться друг от друга

в пятом знаке после запятой, поэтому приведём значение только одной из них:

$$Y_{a1} = \begin{bmatrix} 17,3923 & -8,69565 & -8,69565 \\ -8,69565 & 17,3923 & -8,69565 \\ -8,69565 & -8,69565 & 17,3923 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $Y_b$  в зависимости от положения ключа  $Y_s$  ( $Y_s = \text{close}$ ,  $Y_s = \text{open}$ ) будет равна:

$$Y_{b\_close} = \begin{bmatrix} 9,99928e-04 & 0 & 0 \\ 0 & 9,99928e-04 & 0 \\ 0 & 0 & 9,99928e-04 \end{bmatrix},$$

$$Y_{b\_open} = \begin{bmatrix} 1,00000e-11 & 0 & 0 \\ 0 & 1,00000e-11 & 0 \\ 0 & 0 & 1,00000e-11 \end{bmatrix}.$$

Как видно из значений коэффициентов матриц  $Y_{a1}$  (также  $Y_{b\_close}$ ,  $Y_{b\_open}$ ), она позволяет реализовать

её в виде линейной цепи в аппаратном интерфейсе HIL-системы. В данном случае с учётом округления проводимости эквивалентной схемы, соединённые с  $i$ -м узлом и «землёй», будут равны 0,001 См, а значения проводимостей, включённых между  $i$ -м и  $j$ -м узлами, будут равны 8,69565 См.

На рис. 10 и рис. 11 приведены результаты моделирования системы (фрагменты переходных процессов при включении инвертора и коммутации его ключа  $Y_s$ ) [17], изображённой на рис. 9 по частям. В качестве стабилизирующих параметров были взяты матрицы  $Y_a = Y_{a1}$  и  $Y_b = Y_{b\_close}$ . Как показали численные эксперименты, система устойчива, а результаты совпадают с результатами исходной системы с учётом задержки на величину  $\tau$ .

Кроме приведённого выше варианта разбиения инвертора на части, проводились численные эксперименты, при которых фильтр  $D$  вставлялся в исходную систему сразу перед проводимостями  $Y_{da'}$ ,  $Y_{db'}$ ,  $Y_{dc}$  или сразу после индуктивностей  $L_{da'}$ ,  $L_{db'}$ ,  $L_{dc}$ . В любом из этих вариантов разбиения системы на части результаты моделирования были устойчивыми и совпадали друг с другом.

### Заключение

В статье предложен принцип формирования  $2xN$ -полюсного фильтра, который может обеспечить устойчивость, а также сходимость результатов HIL-моделирования. Показан способ определения его стабилизирующих параметров. Указано, что при этих параметрах фильтр является идеальной линией задержки, т.е. АЧХ фильтра не зависит от частоты, а ФЧХ изменяется прямо пропорционально частоте, причём коэффициент пропорциональности — время задержки.

Результаты, полученные в статье, согласуются с общеизвестными результатами в области теории цепей и численных методов решения СЛАУ.

С помощью численного примера показана адекватность, полученных в статье теоретических результатов, а также продемонстрирована возможность использования фильтра при HIL-моделировании нелинейных систем. Применение полученных результатов на практике может расширить область применения HIL-моделирования при тестировании оборудования, отработки алгоритмов управления, моделировании работы реальных устройств.

В заключение хотелось бы отметить, что рассматриваемый  $2xN$ -полюсный фильтр при правильно выбранных параметрах обладает некоторыми предельными характеристиками. В данном случае является идеальной линией задержки или даже фильтром чистой задержки, так как его АЧХ постоянна и равна единице. Следовательно, рассматриваемый  $2xN$ -полюсный фильтр можно назвать multipole pure delay фильтр (mpprd-фильтр).

### Благодарности / Acknowledgements

Публикация подготовлена в рамках реализации ГЗ ЮНЦ РАН, № гос. рег. 125011200147-2.

The publication has been prepared within the framework of the implementation of the GS of UNC RAS, state reg. no. 125011200147-2.

### Список источников / References

1. Wei Ren. Accuracy evaluation of power Hardware-in-the-Loop (PHIL) simulation. Florida State University, 2007. 68 p. URL:

<https://repository.lib.fsu.edu/islandora/object/fsu%3A176356> (accessed: 14.04.2025).

2. Дмитриев-Здоров В. Б. Многоуровневое обобщение класса релаксационных алгоритмов для анализа электрических цепей: дис. ... д-ра техн. наук. Таганрог: Изд-во Таганрогского радиотехнического ун-та, 1998. 277 с.

Dmitriyev-Zdorov V. B. Mnogourovnevoye obobshcheniye klassa relaksatsionnykh algoritmov dlya analiza elektricheskikh tsepey [Multilevel generalisation of a class of relaxation algorithms for the analysis of electric circuits]. Taganrog, 1998. 277 p. (In Russ.).

3. Денисенко В. В. Методы моделирования СБИС с использованием полунатурной модели МОП-транзистора: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2010. 349 с.

Denisenko V. V. Metody modelirovaniya SBIS s ispol'zovaniyem polunaturnoy modeli MOP-tranzistora [VLSI modelling methods using semi-natural MOSFET model]. Taganrog, 2010. 349 p. (In Russ.).

4. Максимов М. Н., Мережин Н. И., Федосов В. П. [и др.]. Эквивалентная схема сшивающего четырехполюсника // Радиотехника и электроника. 2016. Т. 61, № 2. С. 162–169. DOI: 10.7868/S0033849416020030. EDN: VCPNHL.

Maximov M. N., Merezhin N. I., Fedosov. V. P. [et al.]. Ekvivalentnaya skhema sshivayushchego chetyrekhpolyusnika [The equivalent circuit of a joining two-port]. *Radiotekhnika i Elektronika*. 2016. Vol. 61, no 2. P. 162–169. DOI: 10.7868/S0033849416020030. EDN: VCPNHL. (In Russ.).

5. Maksimov M., Lyashev V., Merezhin N. [et al.]. Poincare-Steklov filter in Hardware-in-the-Loop modeling // 2017 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON). Astana, Kazakhstan, 2017. P. 1–6. DOI: 10.1109/SIBCON.2017.7998531.

6. Santi E., Siegers J. Improved power Hardware-in-the-Loop interface algorithm using wideband system identification. 2014 IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC). 2014. P. 1198–1204. DOI: 10.1109/APEC.2014.6803459.

7. Tucker J. Power Hardware-in-the-Loop (PHIL) considerations and implementation methods for electrically coupled systems. University of South Carolina, 2011. URL: <https://scholarcommons.sc.edu/etd/2207> (accessed: 14.04.2025).

8. Mersenski R. Evaluation of a new power Hardware-in-the-Loop (PHIL) interface algorithm for current controlled amplifiers. University of South Carolina, 2011. URL: <https://scholarcommons.sc.edu/etd/2196> (accessed: 14.04.2025).

9. Paran S., Edrington C. Improved power Hardware-in-the-Loop interface methods via impedance matching. 2013 IEEE Electric Ship Technologies Symposium (ESTS). 2013. P. 342–346. DOI: 10.1109/ESTS.2013.6523758.

10. Lauss G., Strunz K. Accurate and stable Hardware-in-the-Loop (HIL) real-time simulation of integrated power electronics and power systems. *IEEE Transactions on Power Electronics*. 2021. Vol. 36, no. 9. P. 1–1. DOI: 10.1109/TPEL.2020.3040071.

11. Попов В. П., Максимов М. Н., Мережин Н. И. Об устойчивости и сходимости моделирования по частям // Вестник Южного научного центра РАН. 2005. Т. 1, № 3. С. 11–21. EDN: KYWFIP.

Popov V. P., Maksimov M. N., Merezhin N. I. Ob ustoychivosti i skhodimosti modelirovaniya po chastyam [About stability and convergence of modeling by parts]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra RAN. Science in the South of Russia*. 2005. Vol. 1, no. 3. P. 11–21. EDN: KYWFIP. (In Russ.).

12. Максимов М. Н. Применение четырёхполюсника Пуанкаре – Стеклова для построения интерфейса при полунатурном моделировании систем // Известия ЮФУ. Технические науки. 2021. № 6 (223). С. 43–52. DOI: 10.18522/2311-3103-2021-6-43-52. EDN: OBQHZR.

Maksimov M. N., Maksimova S. M. Primeneniye chetyrekhpolyusnika Puankare-Steklova dlya postroyeniya interfeysa pri polunaturnom modelirovanii sistem [Application of the four-pole Poincare–Steklov in interface construction for

Hardware-in-the-Loop simulation]. *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskiye nauki. Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*. 2021. No. 6 (223). P. 43–52. DOI: 10.18522/2311-3103-2021-6-43-52. EDN: OBQHZR. (In Russ.).

13. Попов В. П. Основы теории цепей. Москва: Высшая школа, 2003. 575 с.

Popov V. P. *Osnovy teorii tsepey* [Principles of the circuit theory]. Moscow, 2003. 575 p. (In Russ.).

14. Влах И., Сингхал К. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем: пер. с англ. А. Ф. Обьедков; под ред. А. А. Туркина. Москва: Радио и связь, 1988. 560 с.

Vlakh I., Singkhal K. *Mashinnyye metody analiza i proyektirovaniya elektronnykh skhem* [Machine methods of analysis and design of electronic circuits] // trans. from Engl. by A. F. Obedkov; ed. by A. A. Turkin. Moscow, 1988. 560 p. (In Russ.).

15. Лаевский Ю. М. О некоторых итогах развития современной вычислительной математики // Вычислительные технологии. 2002. Т. 7, № 2. С. 74–83. EDN: KZAQCB.

Laevsky Yu. M. *O nekotorykh itogakh razvitiya sovremennoy vychislitel'noy matematiki* [On some conclusions of numerical mathematics development]. *Vychislitel'nyye tekhnologii. Journal of Computational Technologies*. 2002. Vol. 7, no. 2. P. 74–83. EDN: KZAQCB. (In Russ.).

16. Максимов М. Н. Программа для полунатурного моделирования системы с использованием интерфейсов, построенных на базе четырёхполюсника Пуанкаре–Стеклова: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021667901; заявл. 29.10.2021; опубл. 08.11.2021. Москва: ФИПС, 2021. Бюл. 11.

Maksimov M. N. *Programma dlya polunaturnogo modelirovaniya sistemy s ispol'zovaniyem interfeysov, postroyennykh na baze chetyrkhpolusnika Puankare-Steklova* [Program for semi-natural modelling of the system using interfaces based on the Poincare–Stecklov quadrupole]: Certificate of State Registration of a Computer Program No. 2021667901; filed October 29th, 2021; published November 08th, 2021. Moscow: FIPS, 2021. (In Russ.).

17. Максимов М. Н., Максимова С. М. Демонстратор применения многополюсного фильтра Пуанкаре–Стеклова для полунатурного моделирования трёхфазного инвертора: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023684585; заявл. 15.11.2023; опубл. 16.11.2023. Москва: ФИПС, 2023. Бюл. 11.

Maksimov M. N., Maksimova S. M. *Demonstrator primeneniya mnogopolusnogo fil'tra Puankare–Steklova dlya polunaturnogo modelirovaniya trakhfaznogo invertora* [Demonstrator of

application of multipole Poincare-Stecklov filter for semi-natural modelling of three-phase inverter]: Certificate of State Registration of a Computer Program No. 2023684585; filed November 15th, 2023; published November 16th, 2023. Moscow: FIPS, 2023. (In Russ.).

**МАКСИМОВ Михаил Николаевич**, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры «Теоретические основы радиотехники» Южного федерального университета, г. Таганрог.

SPIN-код: 5092-3757

Адрес для переписки: maksimovm@mail.ru

**МАКСИМОВА София Михайловна**, инженер-исследователь Федерального исследовательского центра Южный научный центр Российской академии наук, г. Ростов-на-Дону.

Адрес для переписки: sofiamaksimova.2003@mail.ru

**Прозрачность финансовой деятельности:** авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.

Статья поступила в редакцию 14.01.2025; одобрена после рецензирования 10.03.2025; принята к публикации 06.05.2025.

**MAKSIMOV Mikhail Nikolayevich**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Theoretical Bases of Radio Engineering Department, Southern Federal University, Taganrog.

SPIN-code: 5092-3757

Correspondence address: maksimovm@mail.ru

**MAKSIMOVA Sofiya Mikhaylovna**, Research Engineer, Federal Research Centre Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don.

Correspondence address: sofiamaksimova.2003@mail.ru

**Financial transparency:** the authors have no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.

The article was submitted 14.01.2025; approved after reviewing 10.03.2025; accepted for publication 06.05.2025.