

ЛОКАЛЬНАЯ МОДИФИКАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ПЛОСКИХ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

В. Ю. Юрков✉, М. А. Чижик, С. Н. Литунов, С. С. Дубова

Омский государственный технический университет,
Россия, 644050, г. Омск, пр. Мира, 11

✉ viktor_yurkov@mail.ru

Описывается метод и алгоритм локальной модификации конфигурации точечных нерегулярных множеств в евклидовой плоскости. Точечные нерегулярные множества можно рассматривать как множества вершин некоторой фигуры, в частности ломаной, являющейся характеристической или опорной фигурой для гладкой кусочно-нелинейной кривой. Числовые параметры (координаты узлов) характеристической ломаной могут меняться в заданных промежутках, изменяя тем самым форму ломаной. Локальная модификация оставляет постоянными такие указанные метрические параметры характеристической ломаной, как длины звеньев и суммарную длину ломаной.

Введено понятие параметрической локальной модификации ломаной. Параметризация локальной модификации зависит от числа переменных узлов. Для осуществления локальной модификации предложена иерархическая структуризация точечного множества, которая заключается в последовательном выделении точечных подмножеств, допускающих локальные модификации различного числа параметров.

Подробно описаны 0-, 1- и 2-параметрические модификации. Приводятся несколько примеров, иллюстрирующих описанный подход. Представлена локальная модификация кусочно-линейного сечения криволинейного отражателя лучистой энергии с целью перенаправления потока отраженных лучей. Локальная модификация реализована в светонаправляющей конструкции, в которой плоское сечение отражающей поверхности состоит из ломаной с фиксированными длинами звеньев. Дискретные модификации отражающей поверхности генерируют на приемнике ступенчатое распределение энергетической освещенности. Описывается один из возможных вариантов построения и модификации характеристической фигуры для составной кривой, моделирующей поперечное сечение поверхности свободно висящей ткани.

Ключевые слова: точечное множество, структуризация, геометрическая форма, характеристическая ломаная, параметризация, локальная модификация

Для цитирования: Юрков В. Ю., Чижик М. А., Литунов С. Н., Дубова С. С. Локальная модификация геометрической формы плоских точечных множеств. *Омский научный вестник*. 2026. № 3 (199). С. 23–30. <https://doi.org/10.25206/1813-8225-2026-199-23-30>. EDN: SBAWKV.



© Юрков В. Ю., Чижик М. А., Литунов С. Н., Дубова С. С., 2026.
Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

LOCAL MODIFICATION OF THE GEOMETRIC SHAPE OF PLANAR POINT SETS

V. Yu. Yurkov✉, M. A. Chizhik, S. N. Litunov, S. S. Dubova

Omsk State Technical University, Mira Ave., 11, Omsk, 644050, Russia

✉ viktor_yurkov@mail.ru

The article presents a local modification method and an algorithm of the irregular point sets configuration in the Euclidean plane. Irregular point set is a set of vertices of some planar figure, specifically it becomes a broken line. The figure can be a base-set for some smooth planar piece-nonlinear curve. Numerical parameters or coordinates of the base-set are variable by given intervals, as well as the shape of the base-set. The local modification does not modify such metrical parameters of the base-set as length of sections and total length of the broken line.

The authors introduce the concept of the admissible parametric local modification of the broken line. The admissible parametric local modification depends upon the number of variable points. In order to demonstrate the local modification the authors propose the hierarchic structuring of the base-set that means successive selection such sub-sets of adjacent points, which allow realizing the local modification of various number of parameters.

The 0-, 1- and 2-parametric modifications are described in detail. The article shows two examples in order to illustrate the method. The first example describes the local modification of piece-linear segments of non-linear energy rays reflector. The aim of the segments modification is to change the direction of reflected rays. Local modification is implemented in light-guiding structure, in which flat section of reflecting surface consists of broken with fixed lengths of links. Discrete modifications of reflecting surface generate stepped distribution of energy illumination at receiver. The other example presents one of possible realizations and modification of the base-set for some accidental shape of some surface transverse section. The transverse section is a composite curve that simulates the section of a freely hanging fabric.

Keywords: point set, structuring, geometric shape, base-set of the broken, parameterization, admissible local modification

For citation: Yurkov V. Yu., Chizhik M. A., Litunov S. N., Dubova S. S. Local modification of the geometric shape of planar point sets. *Omsk Scientific Bulletin*. 2026;3(199):23–30. <https://doi.org/10.25206/1813-8225-2026-199-23-30>. EDN: SBAWKV. (In Russ.).



© Yurkov V. Yu., Chizhik M. A., Litunov S. N., Dubova S. S., 2026.
The content is available under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Введение

Процесс конструирования составных кривых и поверхностей, удовлетворяющих тем или иным условиям формообразования, как правило, состоит из двух этапов. На первом этапе задается характеристический или опорный геометрический объект — плоская или пространственная ломаная, многогранная поверхность и т. п. Узлы, ребра и грани характеристического объекта служат для задания формы конструируемого объекта и для управления его формой. На втором этапе характеристический объект аппроксимируется (сглаживается) кусочно-нелинейной кривой или поверхностью с обеспечением заданных порядков гладкости в местах сшивки кусков [1, 2].

Управление формой конструируемого объекта заключается в изменении параметров узлов характеристической фигуры с целью максимально-го приближения получающихся законов изменения производных различных порядков к заданным [3–5].

Однако в процессе конструирования кривых и поверхностей существует еще одна проблема, связанная с поиском оптимальной формы самой характеристической фигуры. Например, физический объект, геометрическая форма которого теоретически соответствует конструируемому гладкому кусочно-нелинейному образу, практически может иметь отклонения от заданной формы, обнаруживаемые после контрольных измерений. В этом случае может возникнуть необходимость внесения корректирующих изменений в математическую модель объекта. Такие изменения можно назвать локальной модификацией. Применительно к характеристической фигуре локальная модификация означает изменение метрических параметров его узлов и других элементов [6].

Проблема локальной модификации возникает в случае, когда процесс конструирования ограничивается первым этапом и конструируемый объект сам представляет собой конечно-элементную форму, в частности состоящую из линейных конечных элементов — треугольников или многоугольников.

Теоретически такой объект будет соответствовать математической модели, но практически, в результате эксплуатации и различных внешних воздействий, его форма может иметь отклонения от расчетной. Следовательно, возникает необходимость локальной модификации формы [7].

В данной работе рассматривается локальная модификация характеристической фигуры, сохраняющая постоянными значения метрических характеристик этой фигуры, а также некоторые возможные применения локальной модификации.

Общая постановка задачи

Пусть на плоскости задано множество точек A_i , $i = 0, \dots, n$. Будем называть такое множество **ортогонально упорядоченным**, если на плоскости найдется хотя бы одна прямая, на которую это множество проецируется ортогонально так, что проекции точек образуют упорядоченную последовательность. Эту прямую можно принять за ось абсцисс правой системы координат Ox , точку A_0 — за начало координат, а проекции остальных точек — за узлы расположенной на оси абсцисс сетки $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Каждая точка множества будет определена в полученной системе координат, а ломаная $A_0(x_0, y_0) \dots A_1(x_1, y_1) \dots A_n(x_n, y_n)$ взаимно однозначно отобразится на отрезок $[x_0, x_n]$ оси Ox . В частном случае множество точек может быть равномерно упорядоченным, если сетка будет равномерной.

Множество точек будем называть **полярно упорядоченным**, если на плоскости найдется хотя бы одна окружность, на которую каждая точка проецируется ортогонально так, что проекции точек образуют на окружности упорядоченную последовательность. Принимая центр окружности за полюс, получим определение каждой точки в полярной системе координат и взаимно однозначное соответствие между точками ломаной и точками дуги окружности.

Предположим, что каждая точка множества имеет возможность изменять свое положение вдоль некоторой заданной кривой или в некоторой зам-

кнутой области. Допустимыми положениями точек назовем такие их положения, при которых остаются постоянными какие-либо метрические характеристики конфигурации множества. К метрическим характеристикам можно отнести следующие:

- суммарная длина звеньев ломаной при изменении длин отдельных звеньев;
- длина каждого звена ломаной;
- площадь, ограниченная осью абсцисс, ломаной и последней проецирующей прямой;
- площадь, ограниченную ломаной и прямыми, соединяющими полюс с крайними точками ломаной;
- интервал изменения углов между соседними звеньями ломаной;
- комбинацию этих характеристик и др.

В данной работе мы будем учитывать первую и вторую из перечисленных метрических характеристик. Кроме этого, можно задать еще одно условие, упрощающее задачу. Пусть никакие допустимые изменения положений точек не меняют первоначально полученную сетку на оси абсцисс. В этом случае допустимые изменения положений точек будут определены прямыми $x = x_i$ в декартовой системе координат и $\varphi = \varphi_i$ в полярной системе координат. Меняться будут только ординаты и полярные радиусы.

Зафиксируем положение двух точек A_i и A_j , $i < j$, $0 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq n$. Изменение положений точек $A_{i+1}, \dots, A_{j-1}$ при фиксированных положениях A_i и A_j назовем **допустимой локальной $(j-i-2)$ -параметрической модификацией** конфигурации последовательных $j-i+1$ точек. Задача заключается в том, чтобы, применяя допустимую локальную модификацию, изменить конфигурацию множества точек, сохраняя заданную метрическую характеристику, а именно — суммарную длину звеньев ломаной или длину каждого звена.

Условие постоянства длины ломаной

Предположим, что длина ломаной $A_i \dots A_j$ и сетка на оси абсцисс остаются постоянными. Обозначим длину $L_{ij} > |A_i A_j|$. Длины звеньев могут меняться. Тогда для любого значения $i < k < j$ промежутков изменения ординаты y_k точки A_k будет ограничен: $y_k^{\min} \leq y_k \leq y_k^{\max}$. Здесь минимальная и максимальная ординаты есть ординаты точек пересечения прямой $x = x_k$ с эллипсом $(A_i A_j L_{ij})$, где A_i и A_j — фокусы, а L_{ij} — фокусное расстояние. В случае полярно упорядоченного множества промежуток изменения радиуса r_k будет ограничен минимальным и максимальным радиусом. Эти радиусы определяются точками пересечения прямой $\varphi = \varphi_k$ с эллипсом.

Задав значение $y_{k'}$, получим два эллипса $(A_i A_k L_{ik})$ и $(A_k A_j L_{kj})$. Здесь $L_{ik} = L_{ij} - |A_i A_k|$, $L_{kj} = L_{ij} - |A_k A_j|$. Для любого значения $i < p < k$ получим изменение ординаты y_p точки A_p : $y_p^{\min} \leq y_p \leq y_p^{\max}$. Аналогично для любого значения $k < q < j$: $y_q^{\min} \leq y_q \leq y_q^{\max}$. И так далее до тех пор, пока не останется конечное число точек с неопределенным положением. Эти оставшиеся точки будут иметь только по два фиксированных положения с минимальной и максимальной ординатой.

Пусть длины звеньев остаются постоянными. Тогда систему координат можно выбрать так, чтобы начало координат находилось в точке $A_0(0, 0)$, а точка A_n имела координаты $(x_n, 0)$. В этом случае сетка на оси абсцисс не будет постоянной. Для любого значения $0 < i < n$ координаты точки A_i могут меняться в области

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq (l_1 + \dots + l_i)^2 \\ (x - x_n)^2 + y^2 \leq (L_{on} - (l_1 + \dots + l_i))^2 \end{cases}$$

Задав точку $A_i(x_i, y_i)$, получим возможность выбора точек $A_j(x_j, y_j)$ и $A_k(x_k, y_k)$, $j < i$, $k > i$, координаты которых могут изменяться в пределах

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq (l_1 + \dots + l_i)^2 \\ (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \leq (L_{oi} - (l_1 + \dots + l_j))^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \leq (l_{i+1} + \dots + l_k)^2 \\ (x - x_n)^2 + y^2 \leq (L_{in} - (l_{i+1} + \dots + l_k))^2 \end{cases}$$

и так далее.

Иерархическое структурирование множества точек

Разобьем исходное множество точек на подмножества

$$\begin{aligned} \{A_0, \dots, A_n\} = \\ = \{A_0, \dots, A_i\} \cup \{A_i, \dots, A_j\} \cup \dots \cup \{A_k, \dots, A_n\}, \end{aligned}$$

$$(i+1) + (j-i) + \dots + (n-k) = n+1.$$

Мощность каждого подмножества должна быть не меньше трех. Для подмножества их общих точек (узлов первого разбиения) $\{A_0, A_i, A_j, \dots, A_k, A_n\}$ можно определить допустимую локальную модификацию. При этом все остальные точки будут фиксированными относительно своего локального базиса. Например, точки $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}$ будут фиксированными относительно точек A_0 и A_i .

Исключив из рассмотрения подмножества мощности 3, для которых возможна только локальная 0-параметрическая модификация, каждое оставшееся подмножество снова разобьем на подмножества мощности не меньше трех. При этом все остальные точки опять будут фиксированными относительно своего локального базиса. Точки, общие для смежных подмножеств, во втором разбиении снова образуют подмножество, для которого можно определить допустимую локальную модификацию соответствующей параметризации. Этот процесс продолжается до тех пор, пока исходное множество точек не будет разбито на смежные подмножества, мощности которых равны 3, 4 и 5. К этим подмножествам можно применять допустимые локальные 0-, 1- и 2-параметрические модификации соответственно.

Каждая допустимая локальная модификация реализуется в своей локальной системе координат. Так, первое разбиение исходного множества и первая локальная модификация реализуются в системе координат $Ox y$, где ось Ox направлена по прямой $A_0 A_n$. Вторая локальная модификация реализуется в системах координат $O_i x_i y_i$, $O_j x_j y_j$, ..., $O_k x_k y_k$, где $O_i = A_0$, $O_i x_i = A_0 A_i$, $O_j = A_i$, $O_j x_j = A_i A_j$, ..., $O_k = A_k$, $O_k x_k = A_k A_n$ (рис. 1).

Локальная 0-параметрическая модификация

Выберем на оси Ox три последовательных узла сетки и, соответственно, три точки A_i, A_{i+1}, A_{i+2} ломаной. Два выделенных этим выбором звена ломаной имеют длины $l_{i+1} = |A_i A_{i+1}|$, $l_{i+2} = |A_{i+1} A_{i+2}|$. Примем точки A_i и A_{i+2} за фокусы эллипса с фокусным расстоянием $L_{i+1, i+2} = l_{i+1} + l_{i+2}$. Зададим систему прямоугольных координат $O'x'y'$, где O' — середина

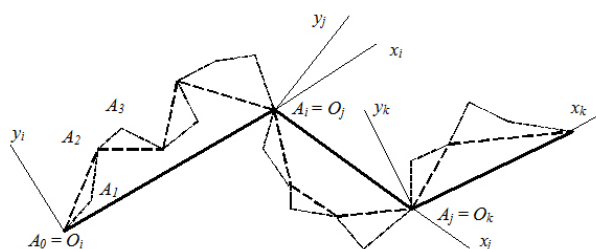


Рис. 1. Схема локальной модификации формы
Fig. 1. Scheme of the local shape modification

Источник / Source: разработано авторами / compiled by the authors

отрезка AA_{i+2} , ось $O'x'$ совпадает с прямой AA_{i+2} . В системе $O'x'y'$ уравнение эллипса:

$$\begin{aligned} & (L_{i+1,i+2}^2 + |A_i A_{i+2}|^2) x'^2 + L_{i+1,i+2}^2 y'^2 = \\ & = \frac{1}{4} \cdot L_{i+1,i+2}^2 (L_{i+1,i+2}^2 - |A_i A_{i+2}|^2). \end{aligned}$$

Применив преобразование координат $O'x'y' \rightarrow Oxy$, получим уравнение эллипса в общем виде. Подставляя в него значение x_{i+1} и решая квадратное уравнение, получим второе значение ординаты точки A_{i+1} . Следовательно, три последовательные точки ломаной могут иметь только две возможные конфигурации, и 0-параметрическая модификация состоит из выбора одного из двух возможных положений.

Локальная однопараметрическая модификация

Пусть сумма длин звеньев ломаной будет $L = k|A_0 A_n|$, $k > 1$. Выберем четыре последовательных узла сетки $x_i, \dots, x_{i+3}$ и, соответственно, три звена ломаной. Пусть их суммарная длина $L_{i+1,i+3} > |A_i A_{i+3}|$. Изменение положений точек A_{i+1} и A_{i+2} при фиксированных положениях A_i и A_{i+3} назовем **допустимой локальной однопараметрической модификацией** конфигурации четырех последовательных точек. Очевидно, что при заданной длине $L_{i+1,i+3}$ значение ординат точек A_{i+1} и A_{i+2} будут ограничены значениями $y_{i+1}^{\min}, y_{i+1}^{\max}, y_{i+2}^{\min}, y_{i+2}^{\max}$. Точка A_{i+1} и точка A_{i+2} играют одинаковую роль в допустимой локальной модификации конфигурации: каждому допустимому положению точки A_{i+1} соответствует два положения точки A_{i+2} и наоборот. То есть между множествами точек A_{i+1} и точек A_{i+2} существует (2, 2)-соответствие.

Величины $y_{i+1}^{\min}, y_{i+1}^{\max}, y_{i+2}^{\min}, y_{i+2}^{\max}$ легко найти, если принять точки A_i и A_{i+3} за фокусы эллипса с фокусным расстоянием $L_{i+1,i+3}$ (рис. 2). Тогда в системе координат $O'x'y'$, опуская элементарные выкладки, получим уравнение эллипса:

$$\begin{aligned} & (L_{i+1,i+3}^2 + |A_i A_{i+3}|^2) x'^2 + L_{i+1,i+3}^2 y'^2 = \\ & = \frac{1}{4} \cdot L_{i+1,i+3}^2 (L_{i+1,i+3}^2 - |A_i A_{i+3}|^2). \end{aligned}$$

Применив преобразование координат $O'x'y' \rightarrow Oxy$, получим уравнение эллипса в общем виде. Подставляя в него значение x_{i+1} и x_{i+2} и решая квадратные уравнения, получим искомые величины.

Переход к пространству параметров выполним следующим образом. Найдем точки пересечения прямой AA_{i+3} с прямыми $x = x_{i+1}$ и $x = x_{i+2}$. Присвоим им значения параметров $u = v = 0$. Точкам

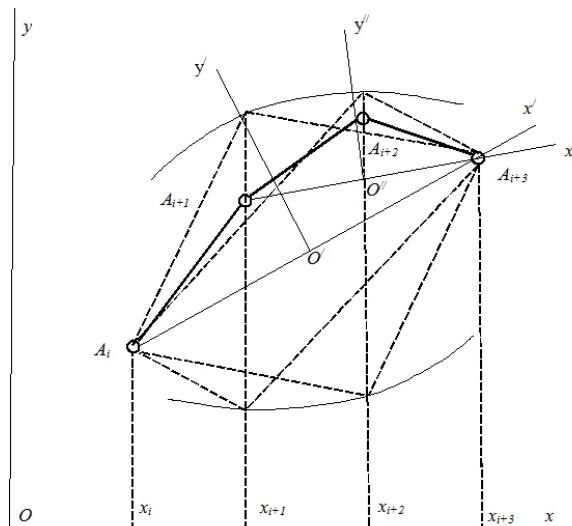


Рис. 2. Схема однопараметрической локальной модификации

Fig. 2. Scheme of the one-parametric local modification

Источник / Source: разработано авторами / compiled by the authors

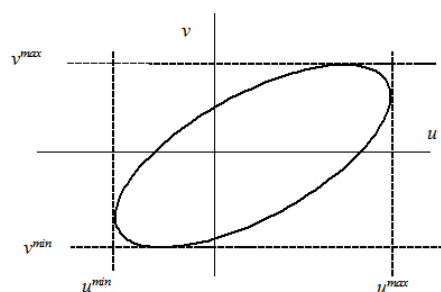


Рис. 3. Взаимная зависимость параметров для однопараметрической модификации
Fig. 3. Mutual dependence of parameters for the one-parametric modification

Источник / Source: разработано авторами / compiled by the authors

$y_{i+1}^{\min}, y_{i+1}^{\max}, y_{i+2}^{\min}, y_{i+2}^{\max}$ присвоим значения $u = -1, u = 1, v = -1, v = 1$ соответственно. Переходя к пространству параметров, получим прямоугольную область допустимых значений (рис. 3). В случае равномерной сетки область будет квадратной. Это следует из центральной симметрии с центром O' .

Чтобы найти зависимость $f(u, v) = 0$, сглаживающую возможные погрешности вычислений, можно поступить аналогично. Можно зафиксировать параметр u , принять точки A_{i+1} и A_{i+3} за фокусы, а длину $L_{i+2,i+3}$ — за фокусное расстояние и найти уравнение эллипса в системе $O'x''y''$. Применяя к полученному уравнению преобразование $O'x''y'' \rightarrow Oxy$, получим уравнение эллипса в общем виде. Подставляя значение x_{i+2} и решая квадратное уравнение, получим два значения параметра v . Проведем эту процедуру достаточное количество раз, получим множество точек (u, v) зависимости $f(u, v) = 0$. Чтобы получить её в аналитической форме, можно применить метод наименьших квадратов (МНК) к уравнению кривой 2-го порядка.

Локальная двухпараметрическая модификация

Выберем пять последовательных узлов сетки и, соответственно, четыре последовательных звена ломаной. Точки A_i и A_{i+4} считаем фиксированными,

а промежуточные точки могут менять положение на прямых $x = x_{i+1}$, $x = x_{i+2}$, $x = x_{i+3}$ так, что суммарная длина звеньев ломаной остается постоянной. Любое изменение положений точек A_{i+1} , A_{i+2} , A_{i+3} при фиксированных A_i и A_{i+4} назовем **допустимой локальной двухпараметрической модификацией** конфигурации пяти последовательных точек.

Принимая длину ломаной $L_{i+1, i+4}$ за фокусное расстояние, а точки A_i и A_{i+4} — за фокусы эллипса, построим эллипс в системе координат $O'x'y'$, где начало координат располагается в середине отрезка $A_i A_{i+4}$, а ось абсцисс совпадает с прямой $A_i A_{i+4}$. Точки пересечения эллипса с прямыми $x = x_{i+1}$, $x = x_{i+2}$, $x = x_{i+3}$ дадут значения максимальных и минимальных ординат точек A_{i+1} , A_{i+2} , A_{i+3} . Примем точки пересечения прямой $A_i A_{i+4}$ с прямыми $x = x_{i+1}$, $x = x_{i+2}$, $x = x_{i+3}$ за точки в пространстве параметров $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$. Минимальные и максимальные значения ординат промежуточных точек примем за $u = -1$, $u = 1$, $v = -1$, $v = 1$, $w = -1$, $w = 1$ соответственно. В пространстве параметров будет выделен параллелепипед, ограничивающий область допустимых параметров. Двухпараметрическое множество допустимых параметров представляет собой эллипсоид, вписанный в этот параллелепипед. Уравнение эллипсоида можно найти, вычислив достаточное количество точек (u , v , w) и применив МНК к общему уравнению квадратики в пространстве параметров.

Случай постоянства длин звеньев

Пусть при любых изменениях положений точек расстояния между соседними точками являются постоянными, равными первоначально заданным. Выберем четыре точки A_i , A_{i+1} , A_{i+2} , A_{i+3} . Возможна локальная однопараметрическая модификация конфигурации. Допустимые положения точек A_{i+1} , A_{i+2} при фиксированных A_i , A_{i+3} определяются системами неравенств:

$$\begin{cases} (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \leq (l_{i+1} + l_{i+2})^2 \\ (x - x_{i+3})^2 + (y - y_{i+3})^2 = l_{i+3}^2 \\ (x_{i+2} - x_{i+1})^2 + (y_{i+2} - y_{i+1})^2 = l_{i+2}^2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (x - x_{i+3})^2 + (y - y_{i+3})^2 \leq (l_{i+2} + l_{i+3})^2 \\ (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = l_{i+1}^2 \\ (x_{i+2} - x_{i+1})^2 + (y_{i+2} - y_{i+1})^2 = l_{i+2}^2 \end{cases}$$

При этом всегда $|A_i A_{i+3}| < l_{i+1} + l_{i+2} + l_{i+3}$.

Выберем пять точек A_i , A_{i+1} , A_{i+2} , A_{i+3} , A_{i+4} . Возможна локальная двухпараметрическая модификация конфигурации. Допустимые положения точки A_{i+1} :

$$\begin{cases} (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = l_{i+1}^2 \\ (x - x_{i+4})^2 + (y - y_{i+4})^2 \leq (l_{i+2} + l_{i+3} + l_{i+4})^2; \end{cases}$$

точки A_{i+3} :

$$\begin{cases} (x - x_{i+4})^2 + (y - y_{i+4})^2 = l_{i+4}^2 \\ (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \leq (l_{i+1} + l_{i+2} + l_{i+3})^2; \end{cases}$$

точки A_{i+2} :

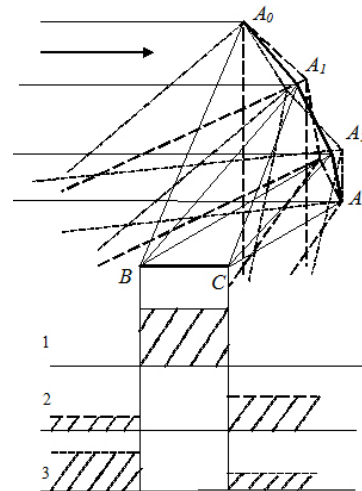


Рис. 4. Схема дискретной однопараметрической локальной модификации фрагмента кусочно-линейного зеркального отражателя и схематичный график энергетической освещенности

Fig. 4. Scheme of the discrete one-parametric local modification for the fragment of the piece-linear mirror reflector and the diagram of energy illumination

Источник / Source: разработано авторами / compiled by the authors

Некоторые приложения локальной модификации

Опишем кратко два возможных приложения локальной модификации множества точек.

В первом приложении ломаная, построенная на заданном множестве точек, является непосредственной геометрической моделью физического объекта. Во втором — множество точек определяет ломаную, которая является характеристической (опорной) ломаной для кусочно-нелинейной гладкой кривой, моделирующей форму сечения свободной висающей неупругой ткани.

В этом случае можно поставить две задачи. Первую, неоднозначность решения которой очевидна, можно сформулировать как поиск оптимальной конфигурации узлов характеристической ломаной с целью получения наиболее простой гладкой аппроксимации формы. Вторую задачу можно обозначить, если рассматривать данную геометрическую форму как случайную реализацию из некоторого множества структурно однородных форм, отличающихся друг от друга значениями числовых параметров.

На рис. 4 изображен трехэлементный фрагмент светонаправляющей конструкции, состоящей из ломаной $A_0 A_1 A_2 A_3$ с фиксированными длинами звеньев и отрезка BC . Ломаная моделирует часть нормального сечения кусочно-линейного призматического отражателя лучистой энергии [8, 9]. Отрезок BC представляет элемент плоского приемника энергии. Исходная форма отражателя изображена толстой линией. При падении на отражатель лучи-

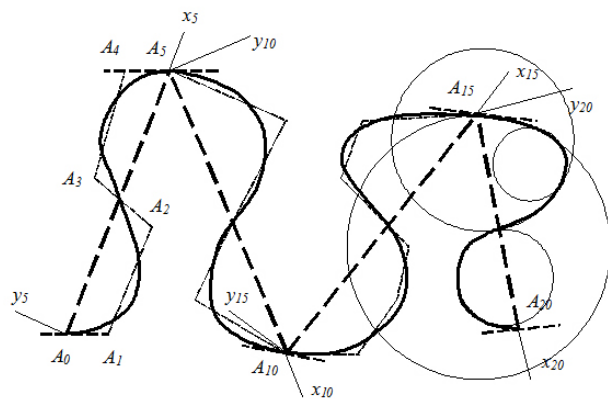


Рис. 5. Некоторые варианты структуризации и модификации характеристических ломаных для аппроксимации нестабильной формы

Fig. 5. Some variants of structuring and modification of characteristic broken lines for the unstable shape approximation

Источник / Source: разработано авторами / compiled by the authors

стой энергии (направление показано стрелкой) отраженные лучи от всех трех элементов направляют-ся на приемник BC .

Однопараметрическая модификация формы фрагмента может быть непрерывной и дискретной. Дискретные модификации показаны толстой и тонкой штриховыми линиями. На приемнике генерируется ступенчатое распределение энергетической освещенности. В исходном положении 1 лучи, отраженные от всех элементов, падают на приемник. В положении 2 модифицированной формы лучи, отраженные от элементов A_0A_1 и A_2A_3 , проходят правее элемента BC приемника, а отраженные от элемента A_1A_2 — левее. Элемент BC не получает энергии. В положении 3 модифицированной формы лучи, отраженные от A_0A_1 и A_2A_3 , проходят левее, а отраженные от A_1A_2 — правее элемента BC .

На рис. 5 показан фрагмент поперечного сечения поверхности, пространственная форма которой имеет мягкие подвижные складки. Такая поверхность образуется свободно висящей тканью [10]. Форма сечения является нестабильной, поэтому показана одна её реализация. Ломаная $A_0A_5A_{10}A_{15}A_{20}$ есть результат первого этапа одного из возможных вариантов аппроксимации формы складок. На звене A_0A_5 реализован второй этап аппроксимации с помощью характеристической ломаной $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$. Суммарная длина звеньев этой ломаной равна длине дуги A_0A_5 и остается постоянной при локальной модификации, которая является 3-параметрической при фиксированных узлах A_0 и A_5 . Локальная модификация является случайной, так как форма висящей ткани не является стабильной. Промежуточные узлы могут менять свое положение в пределах заданных областей. Соответственно, будет меняться форма дуги A_0A_5 . Положение промежуточных точек случайно, модификация ломаной определяется в локальной системе координат Ox_5y_5 . Для звена A_5A_{10} ломаной первого этапа аппроксимации показана 0-параметрическая локальная модификация формы. Для звена $A_{10}A_{15}$ ломаной первого этапа аппроксимации показана 2-параметрическая локальная модификация формы. А для последнего звена выполнена аппроксимация дугами окружностей и в характеристической ломаной нет необходимости. Модификация формы осуществляется за счет изменения центров и радиусов окружностей.

В качестве ещё одного применения описанной теории можно упомянуть использование сеточных моделей с различными алгоритмами деформирования, учитывающих особенности и геометрическую форму как отдельного элемента модели, так и форму нескольких элементов [11–15]. Но в настоящее время не существует общепринятого метода моделирования с использованием неструктурированных сеток с заданными метрическими условиями.

Заключение

Проблема локальной модификации геометрической формы существует, и её решение может играть существенную роль в прикладных исследованиях, связанных с конструированием геометрических объектов. Однако опубликованных научных работ, в которых локальная модификация геометрической формы объекта была бы предметом исследования, крайне мало.

В статье сделана попытка рассмотреть некоторые подходы к локальной модификации характеристической фигуры конструируемого объекта, сохраняющей постоянными такие метрические характеристики, как длины звеньев характеристической ломаной или суммарная длина ломаной.

Локальная модификация рассматривается для плоских образов и реализуется с помощью метода иерархического разбиения множества узлов характеристической ломаной и изменений координат узловых точек.

Локальная модификация реализована в светонаправляющей конструкции, в которой плоское сечение отражающей поверхности состоит из ломаной с фиксированными длинами звеньев. Дискретные модификации отражающей поверхности генерируют на приемнике ступенчатое распределение энергетической освещенности. Кроме этого, предложена модель поперечного сечения поверхности, пространственная форма которой имеет мягкие подвижные складки. Такая поверхность образуется свободно висящей тканью. В качестве ещё одного перспективного применения описанной теории можно упомянуть использование пространственных сеточных моделей с различными алгоритмами деформирования, учитывающих особенности и геометрическую форму как отдельного элемента модели, так и форму нескольких элементов.

Список источников / References

1. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия: применение в проектировании и на производстве / пер. с англ. Г. П. Бабенко, Г. П. Воскресенский. Москва: Мир, 1982. 304 с.
Foks A., Pratt M. Vychislitel'nayageometriya: primeneniye v proyektirovanii i na proizvodstve / trans. from Engl. by G. P. Babenko, G. P. Voskresenskiy. Moscow, 1982. 304 p. (In Russ.).
2. Жермен-Лакур П., Жорж П. Л., Пистр Ф., Безье П. Математика и САПР: в 2-х кн. Кн. 2. Вычислительные методы. Геометрические методы / пер. с фр. В. В. Коваленко, С. Д. Чигиря. Москва: Мир, 1989. 260 с. ISBN 5-03-000465-3.
Zhhermen-Lakur P., Zhorzh P. L., Pistr F., Bez'ye P. Matematikai SAPR: v 2-kh kn. Kn. 2. Vychislitel'nyye metody. Geometricheskiye metody / trans. from Fr. V. V. Kovalenko, S. D. Chigirya. Moscow, 1989. 260 p. ISBN 5-03-000465-3. (In Russ.).
3. Агеев В. Н. Аппроксимация линий и контуров круговыми дугами // Известия высших учебных заведений. Проблемы полиграфии и издательского дела. 2012. № 1. С. 003–010. EDN: PQLBQP.

- Ageyev V. N. Approksimatsiya liniyi konturov krugovymi dugami. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Problemy Poligrafii Izdatel'skogo Dela*. 2012;1:003–010. EDN: PQLBQP. (In Russ.).
4. Ageev B. N., Ovsyannikova N. I. Metody аппроксимации с помощью сопряженных круговых дуг и кубических сплайнов // Академическая публикация. 2019. № 2. С. 9–16. EDN: YEEAX. (In Russ.).
- Ageyev V. N., Ovsyannikova N. I. Metody approksimatsii s pomoshch'yu sopryazhennykh krugovykh dug i kubicheskikh splaynov. *Akademicheskaya Publitsistika*. 2019;2:9–16. EDN: YEEAX. (In Russ.).
5. Словеснов А. В. О приближении плоских кривых линиями второго порядка // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 1576–1594. <https://doi.org/10.33048/semi.2018.15.131>. EDN: YXSPID.
- Slovesnov A. V. On approximation of plane curves by conics. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2018;15:1576–1594. <https://doi.org/10.33048/semi.2018.15.131>. EDN: YXSPID. (In Russ.).
6. Архангельская М. А., Николаев П. М. Метод интерактивной модификации поверхностей NURBS для задач корректировки технологической оснастки // Информационные технологии в проектировании и производстве. 2019. № 3 (175). С. 40–43. EDN: OFHIZN.
- Arhangelskaya M. A., Nikolaev P. M. The method of interactive nurbs surface modification for the task of adjusting tooling. *Informatsionnyye Tekhnologii v Proyektirovanii i Proizvodstve*. 2019;3(175):40–43. EDN: OFHIZN. (In Russ.).
7. Якимов А. Н. Обеспечение чувствительности конечных-элементных моделей микроволновых антенн к внешним деформирующим воздействиям // Надежность и качество сложных систем. 2023. № 1 (41). С. 46–54. <https://doi.org/10.21685/2307-4205-2023-1-6>. EDN: CPLVRY.
- Yakimov A. N. Ensuring the sensitivity of finite element models of microwave antennas to external deforming actions. *Reliability & Quality of Complex Systems*. 2023;1(41):46–54. <https://doi.org/10.21685/2307-4205-2023-1-6>. EDN: CPLVRY. (In Russ.).
8. Юрков В. Ю., Литунев С. Н. Развитие методики расчета устройств закрепления УФ-лака // Омский научный вестник. 2010. № 2 (90). С. 224–227. EDN: QBYRNX.
- Yurkov V. Yu., Litunov S. N. Razvitiye metodiki rascheta ustroystv zakrepleniya UF-laka. *Omsk Scientific Bulletin*. 2010;2(90):224–227. EDN: QBYRNX. (In Russ.).
9. Юрков В. Ю., Литунев С. Н. Основы теории и расчета светонаправляющих конструкций: монография. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2015. 112 с. ISBN 978-5-8149-2112-3. EDN: UZOTTH.
- Yurkov V. Yu., Litunov S. N. Osnovy teorii i rascheta svetonapravlyayushchikh konstruksiy: monografiya. Omsk, 2015. 112 p. ISBN 978-5-8149-2112-3. EDN: UZOTTH. (In Russ.).
10. Бырдина М. В., Мицки М. Ф., Бельшева В. С. Расчет и оптимизация геометрических параметров изделий легкой промышленности конической формы // Известия высших учебных заведений. Технология легкой промышленности. 2022. Т. 56, № 2. С. 52–56. <https://doi.org/10.46418/0021-3489-2022-56-02-10>. EDN: CDWGTK.
- Byrdina M. V., Mitsik M. F., Belysheva V. S. Calculation and optimization of geometric parameters of light industry products of conical shape. *The News of Higher Educational Institutions. Technology of Light Industry*. 2022;56(2):52–56. <https://doi.org/10.46418/0021-3489-2022-56-02-10>. EDN: CDWGTK. (In Russ.).
11. Чижов М. И., Усупов А. А., Троценко А. С. Метод точной оценки близости геометрических форм полигональных моделей // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2018. № 2. С. 118–122. EDN: XWPOAH.
- Chijov M. I., Usupkhov A. A., Trotsenko A. S. The precise method of the geometric forms similarity estimation for the polygonal models. *Vestnik Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technology*. 2018;2:118–122. EDN: XWPOAH. (In Russ.).
12. Саразов А. В., Козелков А. С. Повышение точности САЕ-моделирования задач аэродинамики с использованием технологии расчета на трехмерных неструктурированных сетках с перекрытиями // Труды НГТУ им. П. Е. Алексеева. 2024. № 2 (145). С. 43–58. EDN: SIGMDF.
- Sarazov A. V., Kozelkov A. S. Increasing accuracy of CAE modeling in aerodynamics using calculation technology on three-dimensional unstructured meshes with overlaps. *Transactions of NNSTU n. a. R. E. Alekseev*. 2024;2(145):43–58. EDN: SIGMDF. (In Russ.).
13. Козубская Т. К., Кудрявцева Л. Н., Цветкова В. О. Анизотропная адаптация подвижной неструктурированной сетки к телам сложной формы, заданным интерполяционным восьмеричным шаблоном // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62, № 10. С. 1620–1631. <https://doi.org/10.31857/S0044466922100076>. EDN: LHOAYQ.
- Kozubskaya T. K., Kudryavtseva L. N., Tsvetkova V. O. Anisotropic adaptation of moving unstructured mesh to bodies of complex shapes described by an interpolation octree. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2022;62(10):1620–1631. <https://doi.org/10.31857/S0044466922100076>. EDN: LHOAYQ. (In Russ.).
14. Прихач И. В., Мамчиц В. В., Гундина М. А. Приближение окружностью данных, полученных при обработке промышленных изображений // X Машеровские чтения. 2016. С. 25–27. EDN: XXAOOZ.
- Prikhach I. V., Mamchits M. V., Gundina M. A. Priblizheniye okruzhnost'yu dannykh, poluchennykh pri obrabotke promyshlennykh izobrazheniy. *X Masherovskiy chteniye*. 2016:25–27. EDN: XXAOOZ. (In Russ.).
15. Козловский А. Н. Алгоритм обнаружения вершины угла на изображении на основе аппроксимации контура бинарного изображения // Международный научный журнал. 2016. № 9. С. 63–73. EDN: WWRMHT.
- Kozlovskiy A. N. Vertex detection algorithm in image processing based on binary image contour approximation. *Mezhdunarodnyy Nauchnyy Zhurnal*. 2016;9:63–73. EDN: WWRMHT. (In Russ.).
-
- Вклад авторов:**
В. Ю. Юрков. Постановка цели, задач исследования и научной проблемы, формулировка выводов, формулировка гипотезы о недостаточности существующих методик, выбор направления исследования, общее редактирование текста.
М. А. Чижик. Выбор направления исследования, выявление недостатков существующих методик, сравнение с альтернативными подходами решения проблемы моделирования формы висящих тканей, общее редактирование текста.
С. Н. Литунев. Выбор направления исследования, выявление недостатков существующих методик, сравнение с альтернативными подходами решения проблемы моделирования светонаправляющих конструкций, общее редактирование текста.
С. С. Дубова. Обзор отечественных и зарубежных источников, вывод и адаптация расчетных формул, реализация исследования.
- Authors' contribution:**
Viktor Yu. Yurkov. Setting an aim, research objectives and scientific problem, formulating conclusions, formulating a hypothesis about the insufficiency of existing methods, choosing a research direction, general text editing.

Margarita A. Chizhik. Choosing a research direction, identifying the shortcomings of existing methods, comparing with alternative approaches to solving the problem of modeling the shape of hanging tissues, general text editing.

Sergei N. Litunov. Choosing a research direction, identifying shortcomings of existing methods, comparing with alternative approaches to solving the problem of modeling light-guiding structures, general text editing.

Svetlana S. Dubova. Reviewing of domestic and foreign sources, conclusion and adaptation of formulae calculation, implementation of the results.

Информация об авторах:

ЮРКОВ Виктор Юрьевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Конструирование и технология изделий легкой промышленности» Омского государственного технического университета (ОмГТУ), г. Омск.

SPIN-код: 2414-1438

AuthorID (РИНЦ): 173644

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2667-8103>

ResearcherID: B-1414-2019

e-mail: viktor_yurkov@mail.ru

ЧИЖИК Маргарита Анатольевна, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Конструирование и технология изделий легкой промышленности» ОмГТУ, г. Омск.

SPIN-код: 7582-7019

AuthorID (РИНЦ): 474040

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0797-875X>

AuthorID (SCOPUS): 13406046300

e-mail: margarita-chizhik@rambler.ru

ЛИТУНОВ Сергей Николаевич, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Промышленная экология и безопасность» ОмГТУ, г. Омск.

SPIN-код: 4424-2696

AuthorID (РИНЦ): 368928

e-mail: litunov-sergey@mail.ru

ДУБОВА Светлана Сергеевна, аспирант, ассистент кафедры «Конструирование и технология изделий легкой промышленности» ОмГТУ, г. Омск.

SPIN-код: 4638-2933

AuthorID (РИНЦ): 1313036

e-mail: dubovasveta1@mail.ru

Прозрачность финансовой деятельности: авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

При подготовке данной рукописи авторы не использовали генеративный искусственный интеллект или аналогичные автоматизированные инструменты.

Статья поступила в редакцию 14.01.2026; одобрена после рецензирования 12.02.2026; принята к публикации 28.07.2026.

Information about the authors:

YURKOV Viktor Yurievich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Design and Technology of Light Industry Products, Omsk State Technical University, Omsk.

SPIN-code: 2414-1438

AuthorID(RSCI): 173644

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2667-8103>

ResearcherID: B-1414-2019

e-mail: viktor_yurkov@mail.ru

CHIZHIK Margarita Anatolievna, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Design and Technology of Light Industry Products, Omsk State Technical University, Omsk.

SPIN-code: 7582-7019

AuthorID (RSCI): 474040

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0797-875X>

AuthorID (SCOPUS): 13406046300

e-mail: margarita-chizhik@rambler.ru

LITUNOV Sergei Nikolaevich, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Industrial Ecology and Safety Department, Omsk State Technical University, Omsk.

SPIN-code: 4424-2696

AuthorID (RSCI): 368928

e-mail: litunov-sergey@mail.ru

DUBOVA Svetlana Sergeevna, Postgraduate, Assistant of the Department of Design and Technology of Light Industry Products, Omsk State Technical University, Omsk.

SPIN-code: 4638-2933

AuthorID (RSCI): 1313036

e-mail: dubovasveta1@mail.ru

Financial transparency: the authors have no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.

The authors have read and approved the final manuscript.

The authors did not use the Artificial Intelligence or similar automated tools in the article.

The article was submitted 14.01.2026; approved after reviewing 12.02.2026; accepted for publication 28.07.2026.