

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КРИВЫХ В ТОЧЕЧНОМ ИСЧИСЛЕНИИ

А. В. Степура¹, Е. В. Конопацкий²✉

¹Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, 26

²Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет,
Россия, 603000, г. Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65

✉ e.v.konopatskiy@mail.ru

В инженерной геометрии актуальной задачей является создание гибких кривых, инцидентных заданным точкам. В работе описан метод моделирования интерполяционных кривых в точечном исчислении на основе кривых Безье.

Основой модификации кривых Безье является замена симплекса контрольных точек в уравнении кривой на узлы интерполяции, при которой используется равномерное распределение значений параметра, обеспечивающее выполнение условия инцидентности заданным точкам. Однако применение кривых Безье не всегда позволяет эффективно моделировать объекты и процессы с экспоненциальным характером изменения. В исследовании предложено использовать этот же метод для определения интерполяционных кривых, полученных на основе экспоненциальных функций в точечном исчислении.

В результате был получен новый класс экспоненциальных интерполяционных кривых, форма которых определяется с помощью коэффициентов k_i . Преимуществом такого подхода является гибкость в управлении формы и возможность создания кривых, обладающих наперёд заданными геометрическими свойствами путём решения минимаксных задач коэффициентов k_i .

Предложенный метод расширяет инструментарий геометрического моделирования в САПР, а также может быть использован для моделирования и цифровой поддержки жизненного цикла изделий сложной формы и прогнозирования процессов с экспоненциальным ростом.

Ключевые слова: интерполяционная кривая, экспоненциальная функция, геометрическое моделирование, точечное исчисление, параметризация, системы автоматизированного проектирования, информационное моделирование

Для цитирования: Степура А. В., Конопацкий Е. В. Моделирование экспоненциальных интерполяционных кривых в точечном исчислении. Омский научный вестник. 2026. № 3 (199). С. 56–65. <https://doi.org/10.25206/1813-8225-2026-199-56-65>. EDN: ZLQGIV.



© Степура А. В., Конопацкий Е. В., 2026.
Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

MODELING EXPONENTIAL INTERPOLATION CURVES IN POINT CALCULUS

A. V. Stepura¹, E. V. Konopatskiy²✉

¹Moscow State University of Civil Engineering (National Research University),
Yaroslavskoye Rd., 26, Moscow, 129337, Russia

²Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering,
Ilinskaya St., 65, Nizhny Novgorod, 603000, Russia

✉ e.v.konopatskiy@mail.ru

In engineering geometry the problem of creating flexible curves incident to given points is relevant. The article describes a method for modeling interpolation curves in point calculus based on Bezier curves.

The basis for modifying Bezier curves is replacing the simplex of control points in the curve equation with interpolation nodes. This method utilizes a uniform distribution of parameter values, ensuring that

the incidence condition for the given points is satisfied. However, the use of Bezier curves does not always allow for the effective modeling of objects and processes with exponential change. Therefore, it is proposed to use the same method to define interpolation curves obtained from exponential functions in point calculus.

The result is a new class of exponential interpolation curves which shape is determined using coefficients k_i . The advantage of this approach is flexibility in shape control and the ability to create curves with predetermined geometric properties by solving minimax problems for the coefficients k_i .

The proposed method expands the geometric modeling toolkit in CAD systems and also it can be used for modeling and digitally supporting the lifecycle of complex products and forecasting processes with exponential growth.

Keywords: interpolation curve, exponential function, geometric modeling, point calculus, parameterization, computer-aided design systems, information modeling

For citation: Stepura A. V., Konopatskiy E. V. Modeling exponential interpolation curves in point calculus. *Omsk Scientific Bulletin*. 2026;3(199):56–65. <https://doi.org/10.25206/1813-8225-2026-199-56-65>. EDN: ZLQGIIV. (In Russ.).



© Stepura A. V., Konopatskiy E. V., 2026.
The content is available under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Введение

В современных системах автоматизированного проектирования (САПР) и информационного моделирования (ТИМ) кривые линии играют фундаментальную роль. Они используются для построения формообразующих элементов поверхностей, восстановления объектов по облакам точек, а также для визуализации результатов инженерных расчетов. С развитием компьютерной графики и методов цифровой поддержки жизненного цикла изделий требования к гибкости и точности геометрических моделей постоянно возрастают.

Наиболее распространенным инструментом моделирования кривых в современном программном обеспечении являются кривые Безье [1–3] и их обобщения (B-сплайны [4, 5], NURBS [6])¹. Данные кривые обладают рядом достоинств: они интуитивно понятны благодаря управляющим точкам и обеспечивают высокую гладкость. Однако классические кривые Безье относятся к категории аппроксимирующих кривых — они проходят только через первую и последнюю точки характеристической ломаной, что усложняет задачу точного прохождения через заданный массив опорных точек. Для решения этой задачи разработаны методы построения интерполяционных кривых на основе полиномиальных и сплайновых функций [2, 3, 7, 8].

Работы [9–11] посвящены повышению точности интерполяции и снижению осцилляций². В частности, в исследовании [10] анализируются приведенные погрешности интерполяции неаналитических кривых, что подчеркивает сложность получения адекватных геометрических форм для объектов с нерегулярной геометрией. Однако в перечисленных работах, как правило, используется полиномиальный базис. Вместе с тем многие физические, биологические и технические процессы (теплопередача, рост трещин, динамика популяций, ползучесть материалов) носят ярко выраженный экспоненци-

альный характер. Геометрическое моделирование таких процессов требует соответствующего математического аппарата, позволяющего создавать кривые, форма которых адекватно отражает экспоненциальную природу явления. В работе [12] исследуются интерполяционные последовательности вида $\{\pm\lambda_n\}$ ($\lambda_n > 0$) и проблема неполноты системы экспонент $\{e^{\pm\lambda_n z}\}$ по равномерной норме на семействе произвольных спрямляемых кривых. Однако эти исследования носят фундаментальный характер и сложно применимы для решения конструктивных задач геометрического моделирования кривых линий и поверхностей на их основе.

Математический аппарат точечного исчисления [13, 14] предоставляет широкие возможности для конструирования кривых с различными свойствами за счет варьирования базисных функций. В работе [15] был предложен метод определения точечных уравнений кривых, проходящих через наперед заданные точки, на основе кривых Безье. Этот метод может быть реализован не только для полиномиальных, но и для других функций, но на сегодняшний день отсутствуют векторно-параметрические уравнения экспоненциальных интерполяционных кривых, построенных в рамках точечного исчисления и гарантирующих прохождение через заданные узлы интерполяции.

Целью исследования является использование предложенного ранее метода построения интерполяционных кривых на основе кривых Безье [15] для определения в точечном исчислении кривых на основе экспоненциальных функций, обеспечивающих инцидентность узлам интерполяции.

Моделирование интерполяционных кривых на основе кривых Безье

Пусть задан симплекс $n + 1$ пространства с помощью независимых точек $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$. Будем использовать эти же точки в качестве вершин харак-

¹ Попов Е. В., Шоркина И. Н. Автоматическое построение NURBS поверхности корпуса корабля // Труды Междунар. конф. по компьютерной графике и зрению «Графикон». 2022. № 32. С. 162–169. <https://doi.org/10.20948/graphicon-2022-162-169>. EDN: DAPNZJ.

² Яксубаев К. Д. Построение параметрического интерполяционного многочлена Лагранжа // Потенциал интеллектуально одаренной молодежи — развитию науки и образования: материалы XI Междунар. науч. форума молодых ученых, инноваторов, студентов и школьников / под общ. ред. Т. В. Золиной. Т. 11. Астрахань: Астраханский государственный архитектурно-строительный университет, 2022. С. 98–101. EDN: JWACIG.

теристической ломаной кривой Безье n -го порядка [15], что описывается следующим точечным уравнением в форме Бернштейна:

$$M = \sum_{i=0}^n A_{i+1} \cdot C_n^i \cdot (1-t)^{n-i} \cdot t^i, \quad (1)$$

где M — текущая точка кривой Безье; $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ — биномиальные коэффициенты (коэффициенты Бернштейна); $t \in [0, 1]$ — текущий параметр.

Важным свойством этого представления является то, что сумма всех весовых функций $\sum_{i=0}^n C_n^i \cdot (1-t)^{n-i} \cdot t^i = 1$, что гарантирует принадлежность кривой Безье аффинному пространству той размерности, в котором заданы точки A_i .

Точки A_i в уравнении (1) являются вершинами характеристической ломаной Безье, и кривая в общем случае через них не проходит (за исключением начальной точки A_1 и конечной точки A_{n+1}). Чтобы получить интерполяционную кривую, проходящую через заданные точки $M_1, M_2, \dots, M_{n+1}$, необходимо выполнить замену симплекса $n+1$ пространства и переопределить вершины ломаной A_i через узлы интерполяции M_j .

Для этого используем равномерное распределение параметра t в соответствии с номерами узлов. Поставим условие, чтобы при значениях параметра $t_j = \frac{j-1}{n}$ (где $j = 1 \dots n+1$) кривая проходила через точку M_j :

$$M_j = \sum_{i=0}^n A_{i+1} \cdot C_n^i \cdot \left(1 - \frac{j-1}{n}\right)^{n-i} \cdot \left(\frac{j-1}{n}\right)^i. \quad (2)$$

Для $j = 1$ ($t = 0$) получаем $M_1 = A_1$. Для $j = n+1$ ($t = 1$) получаем $M_{n+1} = A_{n+1}$. Остальные $n-1$ уравнений образуют систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных точек $A_2, \dots, A_n$.

Умножив обе части уравнения (2) на n^n , получим систему в более удобном для решения виде:

$$\sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} (n-j+1)^{n-i} (j-1)^i A_{i+1} = n^n M_j. \quad (3)$$

Решая эту систему методом Крамера в символьной форме, выражаем контрольные точки кривой Безье A_i через узлы интерполяции M_j .

Подстановка полученных выражений в исходное уравнение кривой Безье (1) дает искомое точечное уравнение интерполяционной кривой, проходящей через наперед заданные точки $M_1, M_2, \dots, M_{n+1}$.

Предложенный метод обладает рядом важных свойств:

1. Универсальность. Полученное точечное уравнение инвариантно к размерности пространства. Оно может быть использовано для моделирования как плоских кривых, так и кривых в пространстве любой размерности путем перехода к системе параметрических уравнений посредством покомпонентного расчета.

2. Равномерность параметризации. Заложенная в основу метода равномерная параметризация ($t_j = \frac{j-1}{n}$) в ряде случаев (при равномерном распределении узлов интерполяции) позволяет установить линейную зависимость между натуральными зна-

чениями координат и параметром t , что упрощает анализ и сокращает объем вычислений.

3. Обобщение. Полученные интерполяционные кривые являются частным случаем парабол n -го порядка и наследуют их геометрические свойства.

Рассмотрим применение метода для построения интерполяционной кривой 2-го порядка, проходящей через три наперед заданные точки M_1, M_2, M_3 .

Точечное уравнение кривой Безье 2-го порядка имеет следующий вид:

$$M = A_1(1-t)^2 + 2A_2(1-t)t + A_3t^2. \quad (4)$$

Согласно описанному методу, примем равномерное распределение параметра t :

— при $t = 0$ кривая проходит через точку M_1 , следовательно, $A_1 = M_1$;

— при $t = 1$ кривая проходит через точку M_3 , следовательно, $A_3 = M_3$;

— при $t = \frac{1}{2}$ кривая должна проходить через точку M_2 .

Подставим $t = \frac{1}{2}$ в уравнение (4), учитывая, что $(1-t) = \frac{1}{2}$:

$$M_2 = \frac{1}{4}M_1 + \frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{4}M_3.$$

Решим это уравнение относительно неизвестной точки A_2 :

$$A_2 = 2M_2 - \frac{1}{2}M_1 - \frac{1}{2}M_3. \quad (5)$$

Подставим найденные значения A_1, A_2, A_3 в исходное уравнение (4):

$$M = M_1(1-t)(1-2t) + 4M_2t(1-t) + M_3t(2t-1). \quad (6)$$

Уравнение (6) является искомым. Оно описывает дугу параболы 2-го порядка, которая гарантированно проходит через заданные узлы интерполяции M_1, M_2, M_3 .

Моделирование экспоненциальных интерполяционных кривых

Описанный выше метод может быть применен для моделирования экспоненциальных интерполяционных кривых. При этом весовые функции возле координатных векторов A_i определяются в виде $e^{k_i t}$.

В качестве примера рассмотрим моделирование экспоненциальной интерполяционной кривой, проходящей через 3 точки. Точечное уравнение исходной экспоненциальной кривой имеет следующий вид:

$$M = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t} + A_3 e^{k_3 t}, \quad (7)$$

где A_1, A_2, A_3 — симплекс контрольных точек; k_1, k_2, k_3 — коэффициенты, определяющие форму экспоненциальной кривой.

Обратим внимание, что в данном случае мы не накладываем ограничение принадлежности кривой к пространству симплекса точек A_1, A_2, A_3 : $e^{k_1 t} + e^{k_2 t} + e^{k_3 t} \neq 1$.

Принимаем равномерное распределение параметра t от 0 до 1. Тогда при $t = 0$, кривая проходит через точку M_1 , при $t = \frac{1}{2}$ — через точку M_2 и при $t = 1$ — через точку M_3 . Подставляем эти значения

в исходное уравнение (7) и получаем систему экспоненциальных уравнений:

$$\begin{cases} M_1 = A_1 + A_2 + A_3 \\ M_2 = A_1 e^{\frac{k_1}{2}} + A_2 e^{\frac{k_2}{2}} + A_3 e^{\frac{k_3}{2}} \\ M_3 = A_1 e^{k_1} + A_2 e^{k_2} + A_3 e^{k_3} \end{cases} \quad (8)$$

Решив систему экспоненциальных уравнений (8), находим точки симплекса A_1, A_2, A_3 :

$$A_1 = \frac{-M_1 e^{\frac{k_2+k_3}{2}} + e^{\frac{k_2}{2}} M_2 + e^{\frac{k_3}{2}} M_2 - M_3}{-e^{k_1} + e^{\frac{k_1}{2}} + e^{\frac{k_1+k_3}{2}} - e^{\frac{k_2+k_3}{2}}};$$

$$M = \frac{-e^{\frac{k_1 t}{2} + \frac{k_2 + k_3}{2}} + e^{\frac{k_1 t}{2} + \frac{k_3}{2} + k_2} + e^{\frac{k_2 t}{2} + \frac{k_1 + k_3}{2}} - e^{\frac{k_2 t}{2} + \frac{k_3}{2} + k_1} - e^{\frac{k_3 t}{2} + \frac{k_1 + k_2}{2}} + e^{\frac{k_3 t}{2} + \frac{k_2 + k_1}{2}}}{-e^{\frac{k_3}{2} + k_1} + e^{\frac{k_3}{2} + k_2} + e^{\frac{k_2}{2} + k_1} - e^{\frac{k_1}{2} + k_2} + e^{\frac{k_1}{2} + k_3} - e^{\frac{k_2}{2} + k_3}} M_1 +$$

$$+ \frac{e^{k_2 t + k_1} - e^{k_1 t + k_2} - e^{k_3 t + k_1} + e^{k_1 t + k_3} + e^{k_3 t + k_2} - e^{k_2 t + k_3}}{-e^{\frac{k_3}{2} + k_1} + e^{\frac{k_3}{2} + k_2} + e^{\frac{k_2}{2} + k_1} - e^{\frac{k_1}{2} + k_2} + e^{\frac{k_1}{2} + k_3} - e^{\frac{k_2}{2} + k_3}} M_2 +$$

$$+ \frac{e^{k_1 t + \frac{k_2}{2}} - e^{k_1 t + \frac{k_3}{2}} - e^{k_2 t + \frac{k_1}{2}} + e^{k_2 t + \frac{k_3}{2}} + e^{k_3 t + \frac{k_1}{2}} - e^{k_3 t + \frac{k_2}{2}}}{-e^{\frac{k_3}{2} + k_1} + e^{\frac{k_3}{2} + k_2} + e^{\frac{k_2}{2} + k_1} - e^{\frac{k_1}{2} + k_2} + e^{\frac{k_1}{2} + k_3} - e^{\frac{k_2}{2} + k_3}} M_3. \quad (10)$$

Полученное в векторно-параметрической форме точечное уравнение (10) является общим уравнением, в которое можно подставлять любые координаты узлов интерполяции. Если в это уравнение подставить конкретные значения координат M_1, M_2, M_3 и коэффициентов формы кривой k_1, k_2, k_3 , то получим более компактное представление. Например, используем следующие координаты узлов интерполяции $M_1(1;2), M_2(2;3), M_3(4;1)$ и значения коэффициентов формы кривой $k_1 = 0,2, k_2 = 2, k_3 = 1,2$. В результате получим следующую систему параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = -0,110477318e^{0,2t} + \\ + 0,110108002e^{2t} + 1,000369320e^{1,2t} \\ y = -2,347685632e^{0,2t} - \\ - 2,597078618e^{2t} + 6,944764248e^{1,2t}. \end{cases} \quad (11)$$

Рассмотрим визуализацию (рис. 1) полученной геометрической модели экспоненциальной кривой (сплошная линия), которая описывается системой параметрических уравнений (11). Штриховой линией показана интерполяционная кривая, полученная на основе кривой Безье, которая описывается уравнением (6).

Исследуем характер изменения формы полученной кривой при различных значениях k_1, k_2, k_3 . Чтобы не повторять приведенный выше пример, используем другие узлы интерполяции $M_1(1;2), M_2(2;1), M_3(4;1)$. Результаты представлены в табл. 1.

Анализируя результаты исследований, некоторые примеры которых представлены в табл. 1, можно сделать следующие выводы:

1. Экспоненциальные функции позволяют обеспечить построение интерполяционных кривых, индентных заданным точкам.

2. Форма кривой зависит не только от координат исходных точек, но и от коэффициентов k_1, k_2, k_3 . При этом могут быть получены кривые, содержащие точки перегиба и без них. Если кривая является монотонной и не имеет точек перегиба, она

$$A_2 = \frac{-M_1 e^{\frac{k_1+k_3}{2}} + e^{\frac{k_1}{2}} M_2 + e^{\frac{k_3}{2}} M_2 - M_3}{e^{\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2}} - e^{\frac{k_1+k_3}{2}} - e^{k_2} + e^{\frac{k_2+k_3}{2}}};$$

$$A_3 = \frac{M_1 e^{\frac{k_1+k_2}{2}} - e^{\frac{k_1}{2}} M_2 - e^{\frac{k_2}{2}} M_2 + M_3}{e^{\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2}} - e^{\frac{k_1+k_3}{2}} - e^{\frac{k_2+k_3}{2}} + e^{k_3}}. \quad (9)$$

Подставляем полученные выражения A_1, A_2, A_3 в исходное уравнение (7) и после преобразований находим искомое уравнение экспоненциальной интерполяционной кривой, проходящей через три точки:

может применяться для моделирования плавных переходов. Случаи с точками перегиба могут быть использованы для моделирования S-образных кривых.

3. При значениях k_1, k_2, k_3 более 5 происходят значительные осцилляции. Положительные большие значения k_i приводят к резкому росту осцилляций, что может быть использовано для моделирования аварийных или критических режимов.

4. Значения коэффициентов k_1, k_2, k_3 можно выбирать таким образом, чтобы кривая проходила через заданные точки по кратчайшему расстоянию. Эти значения могут быть определены путём решения минимаксной задачи, что составляет перспективу дальнейших исследований.

Рассмотрим частный случай определения точечного уравнения интерполяционной экспоненциальной кривой, принадлежащей симплексу A_1, A_2, A_3 . Для этого необходимо выполнение условия — сумма весовых функций должна быть равна единице [15]: $e^{k_1 t} + e^{k_2 t} + e^{k_3 t} = 1$.

Исходя из этого условия, можно исключить один из коэффициентов k_i . Для примера исключим коэффициент k_3 :

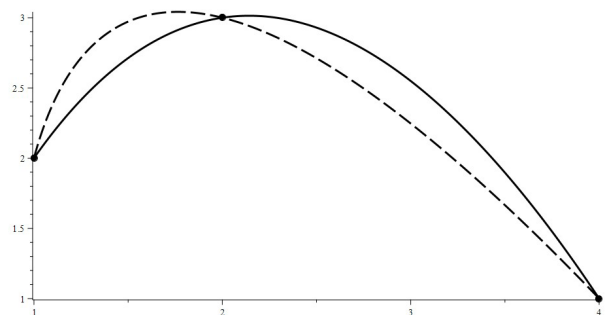
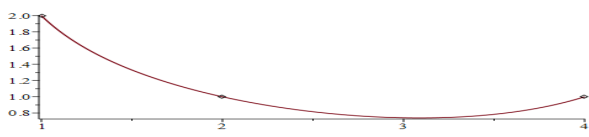
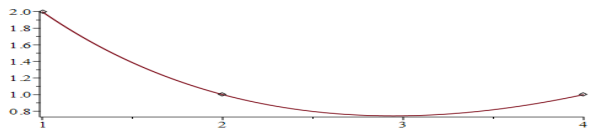
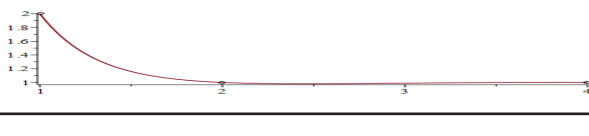
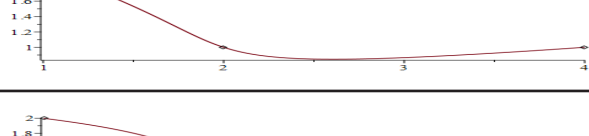
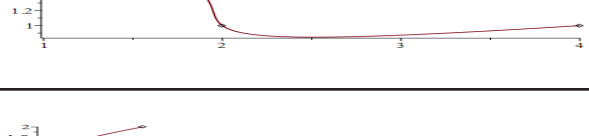
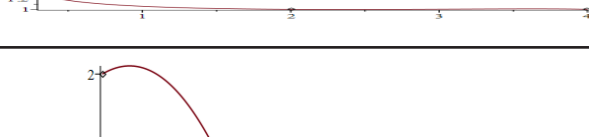
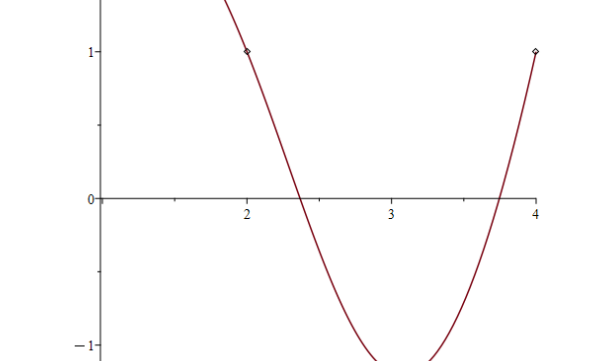


Рис. 1. Экспоненциальная интерполяционная кривая при $e^{k_1 t} + e^{k_2 t} + e^{k_3 t} = 1$

Fig. 1. Exponential interpolation curve for $e^{k_1 t} + e^{k_2 t} + e^{k_3 t} = 1$

Источник / Source: разработано авторами / compiled by the authors

Таблица 1. Исследование экспоненциальной интерполяционной кривой при различных значениях k_1, k_2, k_3
Table 1. Research of the exponential interpolation curve for different values of k_1, k_2, k_3

№ п/п	k_1	k_2	k_3	Экспоненциальная кривая	
				Визуализация кривой	Примечания
1	-1	2	4		Монотонная кривая без петель и точек перегиба
2	0	1	2		Монотонная кривая без петель и точек перегиба
3	1	2	-4		Кривая стремится к оси Oх и имеет точку перегиба
4	-1	-2	4		Кривая имеет точку перегиба
5	-2	3	-5		Кривая имеет точку перегиба
6	-3	-2	-1		Кривая имеет осцилляцию, стремящуюся к оси Oy
7	2	3	5		Кривая имеет ярко выраженную осцилляцию

Источник / Source: разработано авторами / compiled by the authors

$$k_3 = \frac{\ln(1 - e^{k_1 t} - e^{k_2 t})}{t}. \quad (12)$$

Подставим полученное выражение (12) в уравнение (7):

$$M = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t} + A_3 (1 - e^{k_1 t} - e^{k_2 t}). \quad (13)$$

Принимаем равномерное распределение параметра и получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} M_1 = A_1 + A_2 + A_3 \\ M_2 = A_1 e^{\frac{k_1}{2}} + A_2 e^{\frac{k_2}{2}} + A_3 e^{\left(1 - \frac{k_1}{2} - \frac{k_2}{2}\right)} \\ M_3 = A_1 e^{k_1} + A_2 e^{k_2} + A_3 e^{(1 - k_1 - k_2)}. \end{cases} \quad (14)$$

Решим эту систему экспоненциальных уравнений (14) относительно неизвестных точек симплекса A_1, A_2, A_3 и подставим полученные выражения в уравнение (13). После преобразований получим

точечное уравнение экспоненциальной интерполяционной кривой при условии $e^{k_1 t} + e^{k_2 t} + e^{k_3 t} = 1$:

$$M = \frac{-e^{\frac{k_1 + k_2}{2}} + e^{\frac{k_2 + k_1}{2}} - e^{k_2 t + k_1} + e^{k_1 t + k_2} + e^{\frac{k_1 + k_2}{2}} - e^{\frac{k_1 + k_2}{2}}}{e^{\frac{k_1 + k_2}{2}} - e^{\frac{k_1 + k_2}{2}} - e^{k_1} + e^{k_2} + e^{\frac{k_1}{2}} - e^{\frac{k_2}{2}}} M_1 +$$

$$+ \frac{e^{k_2 t + k_1} - e^{k_1 t + k_2} + e^{k_1 t} - e^{k_2 t} - e^{k_1} + e^{k_2}}{e^{\frac{k_1 + k_2}{2}} - e^{\frac{k_1 + k_2}{2}} - e^{k_1} + e^{k_2} + e^{\frac{k_1}{2}} - e^{\frac{k_2}{2}}} M_2 +$$

$$+ \frac{e^{\frac{k_1 + k_2}{2}} - e^{\frac{k_2 + k_1}{2}} - e^{k_1 t} + e^{k_2 t} + e^{\frac{k_1}{2}} - e^{\frac{k_2}{2}}}{e^{\frac{k_1 + k_2}{2}} - e^{\frac{k_1 + k_2}{2}} - e^{k_1} + e^{k_2} + e^{\frac{k_1}{2}} - e^{\frac{k_2}{2}}} M_3. \quad (15)$$

Рассмотрим пример использования точечного уравнения (15) для моделирования интерполяционной кривой, проходящей через узлы $M_1(1;2)$, $M_2(2;3)$, $M_3(4;1)$ и значения коэффициентов формы кривой $k_1=0,5$, $k_2=2,5$. В результате получим следующую систему параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = 0,180846868e^{2,5t} - \\ -2,48477042e^{-0,5t} + 3,303923558 \\ y = -0,411511416e^{2,5t} - \\ -9,15376006e^{-0,5t} + 11,56527147. \end{cases} \quad (16)$$

Выполним визуализацию полученной геометрической модели экспоненциальной кривой (сплошная линия) в сравнении с параболической (штриховая линия), используя вышеописанные координаты узлов интерполяции (рис. 2).

Исследуем характер изменения формы полученной кривой при различных значениях k_1 , k_2 . При этом используются следующие узлы интерполяции: $M_1(1;2)$, $M_2(2;3)$, $M_3(4;1)$. Результаты представлены в табл. 2.

Анализируя результаты исследований, некоторые примеры которых представлены в табл. 2, можно сделать следующие выводы:

1. В отличие от экспоненциальной кривой, не принадлежащей симплексу исходных точек A_1 , A_2 , A_3 , полученная кривая не обладает гибкостью для обеспечения точек перегиба.

2. При небольших положительных или смешанных (один коэффициент положительный, второй — отрицательный) значениях коэффициентов больше единицы наблюдается монотонная кривая.

3. При отрицательных значениях коэффициентов кривая имеет осцилляцию, стремящуюся к оси Оу. Чем выше значения коэффициентов, тем больше осцилляция.

4. При положительных значениях коэффициентов кривая имеет осцилляцию, стремящуюся к оси Ох. Чем выше значения коэффициентов, тем больше осцилляция.

5. При больших значениях коэффициентов с разными знаками кривая спрямляется. Чем выше значение коэффициентов, тем выше степень спрямления, длина кривой стремится к минимуму.

6. При небольших дробных значениях коэффициентов с разными знаками кривая с высокой точностью аппроксимирует параболическую интерполяционную кривую, которая определяется уравнением (6).

Следует отметить, что метод замены симплекса в уравнении кривой не ограничивается примером с тремя узлами интерполяции. Подобным образом можно получить точечные и параметрические уравнения с любым количеством узлов интерполяции для построения единой непрерывной кривой.

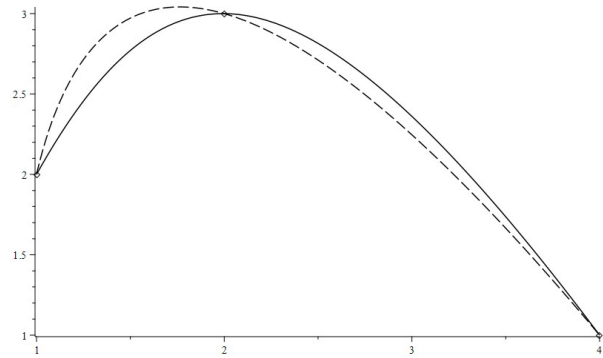


Рис. 2. Экспоненциальная интерполяционная кривая при $e^{k_1 t} + e^{k_2 t} + e^{k_3 t} = 1$

Fig. 2. Exponential interpolation curve for $e^{k_1 t} + e^{k_2 t} + e^{k_3 t} = 1$

Источник / Source: разработано авторами / compiled by the authors

В качестве примера рассмотрим моделирование кривой, проходящей через 6 узлов интерполяции: $M_1(0;0)$, $M_2(20;0)$, $M_3(40;-47)$, $M_4(55;335)$, $M_5(80;26)$, $M_6(100;387)$ при двух условиях $\sum_{i=1}^6 e^{k_i t} = 1$ и $\sum_{i=1}^6 e^{k_i t} \neq 1$.

В первом случае при $\sum_{i=1}^6 e^{k_i t} = 1$ и коэффициентах формы $k_1 = -0,02$, $k_2 = -0,04$, $k_3 = -0,06$, $k_4 = -0,08$, $k_5 = -0,1$, $k_6 = -0,12$ получим систему параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = -1 - 3,8 \cdot 10^{11} e^{0,12t} + 3,99 \cdot 10^{11} e^{0,02t} - 1,98 \cdot 10^{12} e^{0,04t} + \\ + 3,92 \cdot 10^{12} e^{0,06t} - 3,88 \cdot 10^{12} e^{0,08t} + 1,92 \cdot 10^{12} e^{0,1t} \\ y = -1 + 3,1 \cdot 10^{13} e^{0,12t} - 3,26 \cdot 10^{13} e^{0,02t} + 1,61 \cdot 10^{14} e^{0,04t} - \\ - 3,19 \cdot 10^{14} e^{0,06t} + 3,16 \cdot 10^{14} e^{0,08t} - 1,57 \cdot 10^{14} e^{0,1t}. \end{cases} \quad (17)$$

Во втором случае при $\sum_{i=1}^6 e^{k_i t} \neq 1$ и коэффициентах формы $k_1 = -0,3$, $k_2 = -0,15$, $k_3 = -0,075$, $k_4 = -0,0375$, $k_5 = -0,01875$ получим:

$$\begin{cases} x = -2,1 \cdot 10^{11} e^{0,01875t} + 1,95 \cdot 10^{11} e^{0,0375t} - 5,58 \cdot 10^{10} e^{0,075t} + \\ + 5,77 \cdot 10^9 e^{0,15t} - 1,79 \cdot 10^8 e^{0,3t} + 6,51 \cdot 10^{10} \\ y = 1,71 \cdot 10^{13} e^{0,01875t} - 1,59 \cdot 10^{13} e^{0,0375t} + 4,55 \cdot 10^{12} e^{0,075t} - \\ - 4,7 \cdot 10^{11} e^{0,15t} + 1,46 \cdot 10^{10} e^{0,3t} - 5,3 \cdot 10^{12}. \end{cases} \quad (18)$$

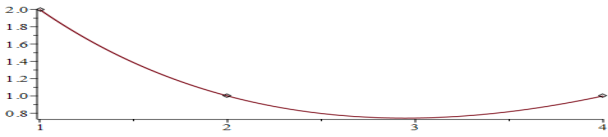
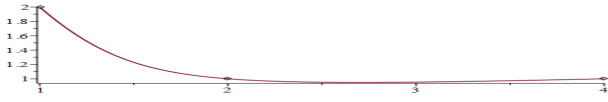
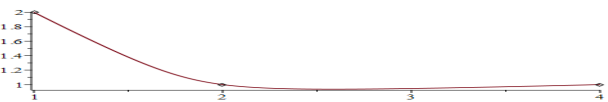
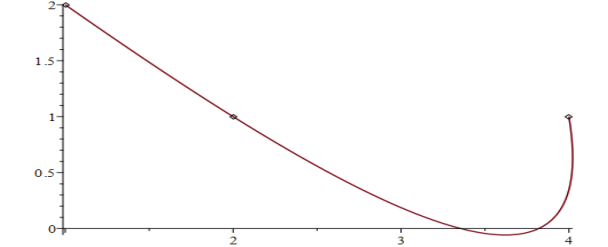
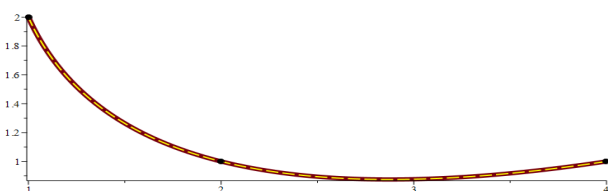
Визуализация экспоненциальных кривых (показаны сплошной линией) в сравнении с классической интерполяционной кривой (показана штриховой линией), которая описывается следующим уравнением с двумя разными условиями, представлена на рис. 3:

$$y = 0,000012x^5 - 0,003008x^4 + 0,2467x^3 - 7,947677x^2 + 82,3237x. \quad (19)$$

Близкий к первому случаю результат (при $\sum_{i=1}^n e^{k_i t} \neq 1$) даёт симметричное задание коэффициентов формы $k_1 = 2,4$, $k_2 = 2$, $k_3 = 1,6$, $k_4 = -1,6$, $k_5 = -2$, $k_6 = -2,4$ для тех же узлов интерполяции (рис. 4):

$$\begin{cases} x = -113314,51e^{-2t-1} + 16404,75e^{2t-1} + 18418,74e^{-2,4t} + \\ + 24169,97e^{-1,6t} - 5117,26e^{1,6t} - 1819,34e^{2,4t} - 1 \\ y = 9,16 \cdot 10^6 e^{-2t-1} - 1,35 \cdot 10^6 e^{2t-1} - 1,49 \cdot 10^6 e^{-2,4t} - \\ - 1,96 \cdot 10^6 e^{-1,6t} + 423723,46e^{1,6t} + 149619,91e^{2,4t} - 1. \end{cases} \quad (20)$$

Таблица 2. Исследование экспоненциальной интерполяционной кривой при различных значениях k_1, k_2
Table 2. Research of the exponential interpolation curve for different values of k_1, k_2

№ п/п	k_1	k_2	Экспоненциальная кривая	
			График функции	Примечания
1	1	2		Монотонная кривая без петель и точек перегиба
2	-4	2		Монотонная кривая без петель и точек перегиба
3	4	-4		Монотонная кривая без петель и точек перегиба
4	-2	-3		Кривая имеет осцилляцию, стремящуюся к оси Oу
5	7	3		Кривая имеет осцилляцию, стремящуюся к оси Oх
6	7	-7		Спряmlенная кривая
7	0,1	-0,1		Экспоненциальная кривая (сплошная линия) совпадает с параболической (штриховая)

Источник / Source: разработано авторами / compiled by the authors

В результате на данном этапе исследований можно сформулировать следующие рекомендации по выбору коэффициентов формы предложенных экспоненциальных интерполяционных кривых k_i :

1. Для минимизации осцилляций между узлами интерполяции все коэффициенты k_i должны быть близкими к нулю.

2. Для минимизации осцилляций между узлами интерполяции можно использовать симметричные относительно нуля коэффициенты k_i . Поскольку положительные значения k_i дают экспоненциальный рост, а отрицательные — экспоненциальное затухание, при симметричном расположении узлов обеспечивается баланс между ростом и затуханием. В результате получается классический симметричный относительно нуля набор коэффициентов, который аппроксимирует гиперболические функции

$$\cos h(kt) = \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2}, \quad \sin h(kt) = \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}.$$

3. При высоких значениях коэффициентов k_i происходит спрямление кривой.

4. При наличии резких скачков между узлами интерполяции полностью устранить осцилляции с помощью экспоненциальной модели невозможно. Это фундаментальное ограничение, связанное с глобальным характером экспоненциального базиса.

Заключение

В исследовании предложен новый класс интерполяционных кривых, на основе экспоненциальных функций обеспечивающих инцидентность заданным точкам. Получены точечные уравнения экспоненциальных интерполяционных кривых с различными условиями принадлежности кривой симплексу исходных точек. Визуально исследовано влияние коэффициентов k_i на форму кривой (подтверждено наличие осцилляций, точек перегиба, спрямления и т. д.).

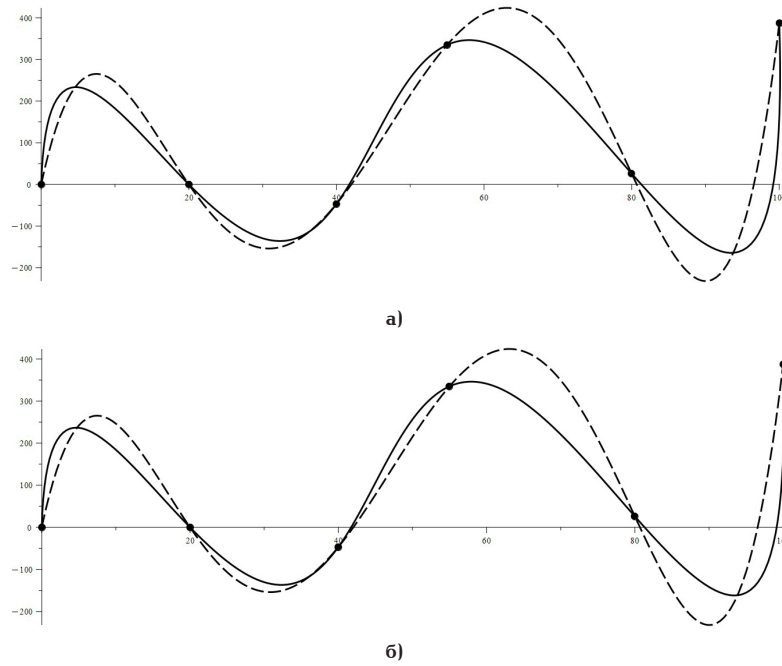


Рис. 3. Экспоненциальная кривая, проходящая через 6 узлов интерполяции:

а) при условии $\sum_{i=1}^n e^{k_i t} \neq 1$; б) при условии $\sum_{i=1}^n e^{k_i t} = 1$

Fig. 3. Exponential curve passing through 6 interpolation nodes:

а) subject to $\sum_{i=1}^n e^{k_i t} \neq 1$; б) subject to $\sum_{i=1}^n e^{k_i t} = 1$

Источник / Source: разработано авторами / compiled by the authors

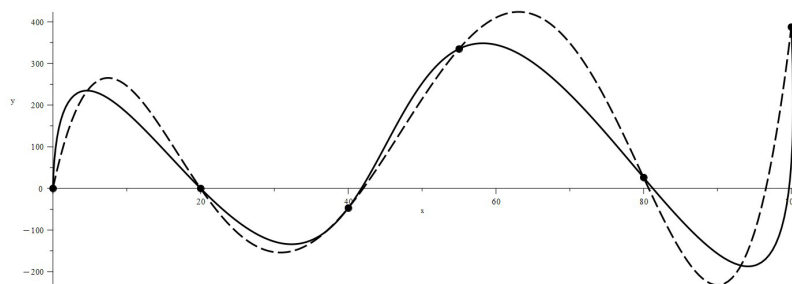


Рис. 4. Экспоненциальная кривая, проходящая через 6 узлов интерполяции при симметричном задании коэффициентов формы k_i

Fig. 4. Exponential curve passing through 6 interpolation nodes with symmetrical assignment of k_i shape coefficients

Источник / Source: разработано авторами / compiled by the authors

Несомненно, на форму кривой значительное влияние оказывают не только коэффициенты k_i , но и координаты узлов интерполяции. Однако наличие дополнительных коэффициентов формы позволяет обеспечить дополнительную гибкость кривой. Таким образом, перспективой дальнейших исследований является разработка геометрически обоснованных рекомендаций по выбору коэффициентов формы k_i . Здесь возможны два принципиально разных направления. Первое — использование единых экспоненциальных кривых, обладающих особыми геометрическими свойствами (минимальной длиной, минимальной кривизной и т. д.) посредством решения минимаксных задач над коэффициентами k_i . Второе — разработка алгоритма моделирования составных кривых, которые на каждом участке имеют своё экспоненциальное уравнение. При этом предложенные интерполяционные экспоненциальные кривые позволяют уменьшить кусочность составной кривой, поскольку охватывают сразу не-

сколько узлов интерполяции, а выбор коэффициентов формы k_i позволит обеспечить необходимый порядок гладкости в точках стыковки.

Исходя из вышеизложенного можно сделать вывод, что полученные кривые расширяют библиотеку геометрических примитивов в системах автоматизированного проектирования и информационного моделирования, позволяя более точно описывать объекты и процессы с экспоненциальными характеристиками на всех этапах жизненного цикла изделия — от концептуального проектирования до моделирования физических процессов (например, деформаций, температурных полей). Также они могут найти своё применение при моделировании процессов в биологии, социологии, экономике. В строительстве кривые могут использоваться для оценки и прогнозирования прироста критических значений (нагрузки, теплового воздействия и других процессов, которые имеют экспоненциальную природу).

1. Бойков А. А., Сиднев П. С. Экспериментальная проверка конструктивных алгоритмов построения кубических парабол при помощи кривых Безье в САПР «Компас-3D» // Журнал естественнонаучных исследований. 2022. Т. 7, № 3. С. 57–64. EDN: GKHYFT.
- Boykov A. A., Sidnev P. S. Experimental verifying of constructive algorithms to create cubic parabolas via Bezier curves in "Kompas-3D" CAD. *Journal of Natural Sciences Research*. 2022;7(3):57–64. EDN: GKHYFT. (In Russ.).
2. Короткий В. А. Конструктивные алгоритмы формирования составных кубических кривых Безье в пространстве и на плоскости // Омский научный вестник. 2022. № 2 (182). С. 10–16. <https://doi.org/10.25206/1813-8225-2022-182-10-16>. EDN: ZAYBGU.
- Korotkii V. A. Constructive algorithms for forming compound cubic Bezier curves in space and on plane. *Omsk Scientific Bulletin*. 2022;2(182):10–16. <https://doi.org/10.25206/1813-8225-2022-182-10-16>. EDN: ZAYBGU. (In Russ.).
3. Панчук К. Л., Мясоедова Т. М. Описание дискретно заданного плоского контура составной линией из дробно-рациональных кривых Безье второго порядка // Программные системы и вычислительные методы. 2019. № 3. С. 49–60. <https://doi.org/10.7256/2454-0714.2019.3.30637>. EDN: SYKZXG.
- Panchuk K. L., Myasoedova T. M. Description of a discretely defined flat contour with a composite line of rational second-order Bezier curves. *Software Systems and Computational Methods*. 2019;3:49–60. <https://doi.org/10.7256/2454-0714.2019.3.30637>. EDN: SYKZXG. (In Russ.).
4. Короткий В. А. Кубические B-сплайны: практическое применение // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2024. Т. 21, № 1 (235). С. 12–21. <https://doi.org/10.14489/vkit.2024.01.pp.012-021>. EDN: VICPTC.
- Korotkii V. A. Cubic B-splines: Practical application. *Herald of Computer and Information Technologies*. 2024;1(235):12–21. <https://doi.org/10.14489/vkit.2024.01.pp.012-021>. EDN: VICPTC. (In Russ.).
5. Николаев П. М. Повышение эффективности расчета B-сплайнов в задачах параллельного программирования // Программная инженерия. 2021. Т. 12, № 5. С. 267–273. <https://doi.org/10.17587/prin.12.267-273>. EDN: AMXXPF.
- Nikolaev P. M. Improving the efficiency of calculating B-splines in parallel programming tasks. *Software Engineering*. 2021;12(5):267–273. <https://doi.org/10.17587/prin.12.267-273>. EDN: AMXXPF. (In Russ.).
6. Guo Y., Niu W., Liu H. [et al.]. NURBS curve interpolation strategy for smooth motion of industrial robots. *Mechanism and Machine Theory*. 2025;205:105885. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2024.105885>. EDN: KFLFKU.
7. Fadhel M., Omar Z. Geometric piecewise cubic Bézier interpolating polynomial with C2 continuity. *Informatics and Automation*. 2021;20(1):133–159. <https://doi.org/10.15622/ia.2021.20.1.5>. EDN: UMURSQ.
8. Горавнева Т. С. Способы моделирования кривых применительно к САПР // Современные научные исследования и инновации. 2022. № 3 (131). С. 7. EDN: VIOTBT.
- Goravneva T. S. Sposoby modelirovaniya krivykh primenitel'no k SAPR. *Modern Scientific Researches and Innovations*. 2022;3(131):7. EDN: VIOTBT. (In Russ.).
9. Подколзин В. В., Уварова А. В. Линейно-квадратичная интерполяция // Вестник СибГУТИ. 2020. № 1 (49). С. 11–19. EDN: RXMAQQ.
- Podkolzin V. V., Uvarova A. V. Linear-quadratic interpolation. *The Herald of the Siberian State University of Telecommunications and Information Science*. 2020;1(49):11–19. EDN: RXMAQQ. (In Russ.).
10. Яксубаев К. Д., Аксютин И. В. Комплексный интерполяционный многочлен Лагранжа // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. 2024. № 4 (50). С. 122–126. <https://doi.org/10.52684/2312-3702-2024-50-4-122-126>. EDN: HRBYSQ.
- Yaksubaev K. D., Aksyutina I. V. Complex interpolation Lagrange polynomial. *Engineering and Construction Bulletin of the Caspian Region*. 2024;4(50):122–126. <https://doi.org/10.52684/2312-3702-2024-50-4-122-126>. EDN: HRBYSQ. (In Russ.).
11. Косников Ю. Н., Абубекеров Д. Р. О приведенных погрешностях интерполяции неаналитических кривых // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2025. № 93. С. 156–167. <https://doi.org/10.21667/1995-4565-2025-93-156-167>. EDN: QOXXTZ.
- Kosnikov Yu. N., Abubekеров D. R. About the reduced interpolation errors of non-analytical curves. *Vestnik of RSREU*. 2025;93:156–167. <https://doi.org/10.21667/1995-4565-2025-93-156-167>. EDN: QOXXTZ. (In Russ.).
12. Гайсин Р. А. Интерполяционные последовательности и неполные системы экспонент на кривых // Математический сборник. 2021. № 5 (212). С. 58–79. <https://doi.org/10.4213/sm9370>. EDN: ZWHAAC.
- Gaisin R. A. Interpolation sequences and nonspanning systems of exponentials on curves. *Sbornik: Mathematics*. 2021;5(212):58–79. <https://doi.org/10.4213/sm9370>. EDN: ZWHAAC. (In Russ.).
13. Балюба И. Г., Найдыш А. В., Конопацкий Е. В. [и др.]. Теоретические основы точечного исчисления как математического аппарата геометрического и компьютерного моделирования // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2023. Т. 20, № 2 (224). С. 3–15. <https://doi.org/10.14489/vkit.2023.02.pp.003-015>. EDN: ZULQCQ.
- Balyuba I. G., Naidysh A. V., Konopatskiy E. V. [et al.]. Theoretical foundations of the point calculus as a mathematical apparatus for geometric and computer modeling. *Herald of Computer and Information Technologies*. 2023;20(2):3–15. <https://doi.org/10.14489/vkit.2023.02.pp.003-015>. EDN: ZULQCQ. (In Russ.).
14. Конопацкий Е. В. Моделирование геометрических объектов в точечном исчислении: монография. Нижний Новгород: Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, 2025. 197 с. ISBN 978-5-528-00636-9. EDN: GMVGUV.
- Konopatskiy E. V. Modelirovaniye geometricheskikh obyektov v tochechnom ischislenii. Nizhniy Novgorod, 2025. 197 p. ISBN 978-5-528-00636-9. EDN: GMVGUV. (In Russ.).
15. Конопацкий Е. В. Геометрическое моделирование многофакторных процессов на основе точечного исчисления: дисс. ... докт. техн. наук. Нижний Новгород, 2020. 307 с. EDN: AQEYNO.
- Konopatskiy E. V. Geometricheskoye modelirovaniye mnogofaktornykh protsessov na osnove tochechnogo ischisleniya. Nizhniy Novgorod, 2020. 307 p. EDN: AQEYNO. (In Russ.).

Вклад авторов:

А. В. Степура. Обзор отечественных и зарубежных источников, выявление недостатков существующих методов, сравнение с альтернативными подходами параметризации интерполяционных кривых, использование метода для построения интерполяционных кривых на основе экспоненциальных функций, проведение вычислительных экспериментов с визуализацией результатов исследований, исследование экспоненциальной интерполяционной кривой при различных значениях коэффициентов формы.

Е. В. Конопацкий. Постановка цели, задач исследований и научной проблемы, разработка метода моделирования интерполяционных кривых на основе кривых Безье, обобщение метода моделирования интерполяционных кривых на экспоненциальные функции, разработка математического аппарата, общее редактирование текста, формулировка выводов.

Authors' contribution:

Anna V. Stepura. Reviewing of domestic and foreign sources, identification of shortcomings of existing methods, comparison with alternative approaches to parameterization of interpolation curves, use of the method for constructing interpolation curves based on exponential functions, conducting computational experiments with visualization of research results, study of the exponential interpolation curve for different values of shape coefficients.

Evgeniy V. Konopatskiy. Setting the goal, research objectives and scientific problem, developing a method for modeling interpolation curves based on Bezier curves, generalizing the method for modeling interpolation curves to exponential functions, developing the mathematical apparatus, general editing of the text, formulating conclusions.

Информация об авторах:

СТЕПУРА Анна Вячеславовна, старший преподаватель кафедры «Инженерная графика и компьютерное моделирование» Национального исследовательского Московского государственного строительного университета, г. Москва.

SPIN-код: 4586-7096

AuthorID (РИНЦ): 1251696

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4099-329X>

AuthorID (SCOPUS): 60074430200

e-mail: stepuraAV@mgsu.ru

КОНОПАЦКИЙ Евгений Викторович, доктор технических наук, профессор, проректор по научной работе и цифровому развитию Нижегородского государственного архитектурно-строительного университета, г. Нижний Новгород.

SPIN-код: 4566-6208

AuthorID (РИНЦ): 681553

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4798-7458>

AuthorID (SCOPUS): 57188826034

ResearcherID: D-3235-2019

e-mail: e.v.konopatskiy@mail.ru

Прозрачность финансовой деятельности: авторы не имеют финансовой заинтересованности в пред-

ставленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

При подготовке данной рукописи авторы не использовали генеративный искусственный интеллект или аналогичные автоматизированные инструменты.

Статья поступила в редакцию 23.03.2026; одобрена после рецензирования 15.06.2026; принята к публикации 14.08.2026.

Information about the authors:

STEPURA Anna Vyacheslavovna, Senior Lecturer of the Engineering Graphics and Computer Modeling Department, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow.

SPIN-code: 4586-7096

AuthorID (RSCI): 1251696

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4099-329X>

AuthorID (SCOPUS): 60074430200

e-mail: e.v.konopatskiy@mail.ru

KONOPATSKIY Evgeniy Viktorovich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Vice Rector for Research and Digital Development, Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod.

SPIN-code: 4566-6208

AuthorID (RSCI): 681553

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4798-7458>

AuthorID (SCOPUS): 57188826034

ResearcherID: D-3235-2019

e-mail: e.v.konopatskiy@mail.ru

Financial transparency: the authors have no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.

The authors have read and approved the final manuscript.

The authors did not use the Artificial Intelligence or similar automated tools in the article.

The article was submitted 23.03.2026; approved after reviewing 15.06.2026; accepted for publication 14.08.2026.