

ISSN 1813-8225 (Print)
ISSN 2541-7541 (Online)

ОМСКИЙ НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

2026

№ 1 (197)

МАШИНОСТРОЕНИЕ

ЭНЕРГЕТИКА
И ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

ЭЛЕКТРОНИКА,
ФОТОНИКА,
ПРИБОРОСТРОЕНИЕ
И СВЯЗЬ



ОМСКИЙ НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

Издается с октября 1997 г.
Выходит 4 раза в год

№ 1 (197) 2026

УЧРЕДИТЕЛИ:

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего
образования «Омский государственный
технический университет»

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
образования «Омский государственный
университет путей сообщения»

Свидетельство о регистрации
ПИ № ТУ55-00559 от 06.10.2017 г.
выдано Управлением Роскомнадзора
по Омской области

Сайт журнала:
<https://onv.omgtu.ru>

Страница журнала на сайте учредителя:
[http://www.omgtu.ru/
general_information/media_omgtu/
journal_of_omsk_research_journal/](http://www.omgtu.ru/general_information/media_omgtu/journal_of_omsk_research_journal/)

Подписной индекс
в каталоге Роспечать 83597

Ответственный секретарь
М. Ф. Федорчук

Редактор
Т. П. Семина

Компьютерная верстка
О. Н. Чирун

Макет обложки
В. С. Гуринов

© Редакция журнала
«Омский научный вестник», ОмГТУ

Подписано в печать 16.02.2026 г.
Дата выхода в свет 24.02.2026 г.

Формат 60x84 1/8.
15,81 усл. печ. л.
Бумага офсетная

Отпечатано на дупликаторе
отдела научной информации ОмГТУ

Тираж 500 экз.
(1-й завод 1–100). Заказ 2
Цена свободная

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

КРОПОТИН Олег Витальевич, главный редактор, д. т. н., доцент,
Омский государственный технический университет, г. Омск

ОВЧАРЕНКО Сергей Михайлович, д. т. н., профессор,
Омский государственный университет путей сообщения, г. Омск

ГАЛИЕВ Ильхам Исламович, д. т. н., профессор,
Омский государственный университет путей сообщения, г. Омск

АВДЕЕВА Диана Константиновна, д. т. н., профессор,
Томский политехнический университет, г. Томск

АЮШЕЕВ Тумэн Владимирович, д. т. н., доцент,
Восточно-Сибирский университет технологий и управления, г. Улан-Удэ

БИРЮКОВ Сергей Владимирович, д. т. н., профессор,
Омский государственный технический университет, г. Омск

БУБНОВ Алексей Владимирович, д. т. н., профессор,
Омский государственный технический университет, г. Омск

БАВИЛОВ Владимир Платонович, д. т. н., профессор,
Томский политехнический университет, г. Томск

ГОРЮНОВ Владимир Николаевич, д. т. н., профессор,
Омский государственный технический университет, г. Омск

ГРАДОВОЕВ Александр Васильевич, д. т. н., профессор,
Томский политехнический университет, г. Томск

КАРПОВ Валерий Васильевич, д. э. н., профессор,
Омский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук, г. Омск

КОЗЛОВ Александр Геннадьевич, д. т. н., доцент,
Омский государственный технический университет, г. Омск

КУЗНЕЦОВ Андрей Альбертович, д. т. н., профессор,
Омский государственный университет путей сообщения, г. Омск

ЛИ Вэймин, доктор, профессор,
Ляонинский научно-технологический институт (ЛНТИ), Бэньси, Китай

МАЙСТРЕНКО Василий Андреевич, д. т. н., профессор,
Омский государственный технический университет, г. Омск

МЭН Чжаоцзюнь, доктор, профессор,
Ляонинский научно-технологический институт (ЛНТИ), Бэньси, Китай

НАУМЕНКО Александр Петрович, д. т. н., профессор,
Омский государственный технический университет, г. Омск

НОВИКОВ Алексей Алексеевич, д. т. н.,
Омский государственный технический университет, г. Омск

НОВОЖИЛОВ Александр Николаевич, д. т. н., профессор,
Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова,
г. Павлодар, Республика Казахстан

ОСИПОВ Дмитрий Сергеевич, д. т. н.,
Югорский государственный университет, г. Ханты-Мансийск

ПАНЧУК Константин Леонидович, д. т. н., профессор,
Омский государственный технический университет, г. Омск

ПОЛЕЩЕНКО Константин Николаевич, д. т. н., профессор,
Сибирский государственный автомобильно-дорожный университет, г. Омск

ПОЛИЩУК Владимир Иосифович, д. т. н., профессор,
Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова, г. Барнаул

ПОПОВ Андрей Юрьевич, д. т. н., профессор,
Омский государственный технический университет, г. Омск

РАУБА Александр Александрович, д. т. н., профессор,
Омский государственный университет путей сообщения, г. Омск

РОТКОВ Сергей Игоревич, д. т. н., профессор,
Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет,
г. Нижний Новгород

СУШКОВ Валерий Валентинович, д. т. н., профессор,
Нижегородский государственный университет, г. Нижегородск

СЫЗРАНЦЕВ Владимир Николаевич, д. т. н., профессор,
Тюменский индустриальный университет, г. Тюмень

ТАТЕВОСЯН Андрей Александрович, д. т. н., доцент,
Омский государственный технический университет, г. Омск

ТОЛОК Алексей Вячеславович, д. т. н., профессор,
Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва

ФЕДОРОВ Алексей Аркадьевич, к. т. н.,
Омский государственный технический университет, г. Омск

ХАРЛАМОВ Виктор Васильевич, д. т. н., профессор,
Омский государственный университет путей сообщения, г. Омск

ХАЦЕВСКИЙ Константин Владимирович, д. т. н., доцент,
Омский государственный технический университет, г. Омск

ХУАН Чжидун, доктор, профессор,
Ляонинский научно-технологический институт (ЛНТИ), Бэньси, Китай

ЧЕРНЯВСКИЙ Дмитрий Иванович, д. т. н., доцент,
Омский государственный технический университет, г. Омск

ШАЛАЙ Виктор Владимирович, д. т. н., профессор,
Омский государственный технический университет, г. Омск

ЩЕРБА Виктор Евгеньевич, д. т. н., профессор,
Омский государственный технический университет, г. Омск

ЮРКОВ Виктор Юрьевич, д. т. н., профессор,
Омский государственный педагогический университет, г. Омск

ЯКОВЛЕВА Елена Владимировна, д. э. н., доцент,
Омский государственный технический университет, г. Омск



OMSK SCIENTIFIC BULLETIN

Published Since October 1997.
Published 4 times a year

№ 1 (197) 2026

FOUNDERS

Federal State
Autonomous Educational Institution
of Higher Education
«Omsk State Technical University»

Federal State Budgetary
Educational Institution
of Higher Education «Omsk State
Transport University»

Identification number
of registered Mass Media
ПМ № TY55-00559 from 06.10.2017
issued by the Federal Service for
Supervision of Communications,
Information Technology,
and Mass Media, Omsk region

Journal Website:
<https://onv.omgtu.ru>

Journal Page on Founder's Website:
[http://www.omgtu.ru/
general_information/media_omgtu/
journal_of_omsk_research_journal/](http://www.omgtu.ru/general_information/media_omgtu/journal_of_omsk_research_journal/)

Subscription Index
in Federal Agency on Press and Mass
Communications Catalog 83597

Executive Secretary
M. F. Fedorchuk

Editor
T. P. Semina

Computer Page-Proofs
O. N. Chirun

Cover Layout
V. S. Gurinov

© Editorial Board of
«Omsk Scientific Bulletin»,
OmSTU

Signed in Print 16.02.2026
Date of Publication 24.02.2026

Format 60x84 1/8.
Conventional
Printed Sheets 15,81
Offset Paper

Printed on a Duplicator
at Scientific Publishing Office,
Omsk State Technical University

Circulation 500 Copies.
(The 1st Printing Factory 1–100).
Order 2
Open Price

EDITORIAL BOARD

- KROPOTIN Oleg Vitalyevich** (Chief Editor), D. Sc. (Technical), Associate Professor,
Omsk State Technical University, Omsk, Russia
- OVCHARENKO Sergey Mikhaylovich**, D. Sc. (Technical), Professor,
Omsk State Transport University, Omsk, Russia
- GALIEV Ilkham Islamovich**, D. Sc. (Technical), Professor,
Omsk State Transport University, Omsk, Russia
- AVDEEVA Diana Konstantinovna**, D. Sc. (Technical), Professor,
Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia
- AUSHEEV Tumen Vladimirovich**, D. Sc. (Technical), Associate Professor,
East Siberia State University of Technology and Management, Ulan-Ude, Russia
- BIRYUKOV Sergey Vladimirovich**, D. Sc. (Technical), Professor,
Omsk State Technical University, Omsk, Russia
- BUBNOV Aleksey Vladimirovich**, D. Sc. (Technical), Professor,
Omsk State Technical University, Omsk, Russia
- VAVILOV Vladimir Platonovich**, D. Sc. (Technical), Professor,
Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia
- GORYUNOV Vladimir Nikolaevich**, D. Sc. (Technical), Professor,
Omsk State Technical University, Omsk, Russia
- GRADOBOEV Alexander Vasilievich**, D. Sc. (Technical), Professor,
Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia
- KARPOV Valeriy Vasilyevich**, D. Sc. (Economic), Professor,
Omsk Scientific Center of the Siberian Branch of the RAS, Omsk, Russia
- KOZLOV Aleksandr Gennadyevich**, D. Sc. (Technical), Associate Professor,
Omsk State Technical University, Omsk, Russia
- KUZNETSOV Andrey Albertovich**, D. Sc. (Technical), Professor,
Omsk State Transport University, Omsk, Russia
- LI Weimin**, Doctor, Professor,
Liaoning Institute of Science and Technology (LIST), Benxi, China
- MAYSTRENKO Vasily Andreevich**, D. Sc. (Technical), Professor,
Omsk State Technical University, Omsk, Russia
- MENG Zhaojun**, Doctor, Professor,
Liaoning Institute of Science and Technology (LIST), Benxi, China
- NAUMENKO Alexander Petrovich**, D. Sc. (Technical), Professor,
Omsk State Technical University, Omsk, Russia
- NOVIKOV Alexey Alexeevich**, D. Sc. (Technical),
Omsk State Technical University, Omsk, Russia
- NOVOZHILOV Aleksandr Nikolayevich**, D. Sc. (Technical), Professor,
S.Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar, Republic of Kazakhstan
- OSIPOV Dmitry Sergeevich**, D. Sc. (Technical),
Yugra State University, Khanty-Mansiysk, Russia
- PANCHUK Konstantin Leonidovich**, D. Sc. (Technical), Professor,
Omsk State Technical University, Omsk, Russia
- POLESHCHENKO Konstantin Nikolayevich**, D. Sc. (Technical), Professor,
Siberian State Automobile and Highway University, Omsk, Russia
- POLISHCHUK Vladimir Isifovich**, D. Sc. (Technical), Professor,
Polzunov Altai State Technical University, Barnaul, Russia
- POPOV Andrey Yuryevich**, D. Sc. (Technical), Professor,
Omsk State Technical University, Omsk, Russia
- RAUBA Alexander Aleksandrovich**, D. Sc. (Technical), Professor,
Omsk State Transport University, Omsk, Russia
- ROTKOV Sergey Igorevich**, D. Sc. (Technical), Professor,
Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering,
Nizhny Novgorod, Russia
- SUSHKOV Valery Valentinovich**, D. Sc. (Technical), Professor,
Nizhnevartovsk State University, Nizhnevartovsk, Russia
- SYZRANTSEV Vladimir Nikolaevich**, D. Sc. (Technical), Professor,
Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia
- TATEVOSYAN Andrey Alexandrovich**, D. Sc. (Technical), Associate Professor,
Omsk State Technical University, Omsk, Russia
- TOLOK Aleksey Vyacheslavovich**, D. Sc. (Technical), Professor,
Moscow State University of Technology «STANKIN», Moscow, Russia
- FEDOROV Alexey Arkadievich**, Cand. Sc. (Technical),
Omsk State Technical University, Omsk, Russia
- KHARLAMOV Victor Vasilievich**, D. Sc. (Technical), Professor,
Omsk State Transport University, Omsk, Russia
- KHATSEVSKIY Konstantin Vladimirovich**, D. Sc. (Technical), Associate Professor,
Omsk State Technical University, Omsk, Russia
- HUANG Zhidong**, Doctor, Professor,
Liaoning Institute of Science and Technology (LIST), Benxi, China
- CHERNYAVSKY Dmitry Ivanovich**, D. Sc. (Technical), Associate Professor,
Omsk State Technical University, Omsk, Russia
- SHALAY Viktor Vladimirovich**, D. Sc. (Technical), Professor,
Omsk State Technical University, Omsk, Russia
- SCHERBA Victor Evgenievich**, D. Sc. (Technical), Professor,
Omsk State Technical University, Omsk, Russia
- YURKOV Viktor Yuryevich**, D. Sc. (Technical), Professor,
Omsk State Pedagogical University, Omsk, Russia
- YAKOVLEVA Elena Vladimirovna**, D. Sc. (Economic), Associate Professor,
Omsk State Technical University, Omsk, Russia

СОДЕРЖАНИЕ

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Т. В. Аюшеев, Ц. Ц. Цыдыпов, К. А. Филиппова. Моделирование параметрических тел на основе произвольного каркаса и неравномерной линейной интерполяции	5
Д. И. Чернявский. Исследование упругопластических деформаций при динамическом взаимодействии двух твердых деформируемых тел	15
О. И. Ведяйкина, П. А. Хазов. Влияние уровня геометрической детализации цифрового двойника экспериментальной установки на результаты вычислительных экспериментов	23
А. А. Захаров. Алгоритмы расчёта векторов нормалей и их производных в регулярных и сингулярных точках параметрических поверхностей	31
А. С. Краско, М. С. Кружкова, С. А. Пупукин. Разработка методики выбора технологического оборудования в организационно-технологическом обеспечении производства	38
В. Г. Муфтеев, Ф. Т. Зиганшина, В. И. Гумеров. Плавное сопряжение сплайновых кривых с обеспечением высокого порядка гладкости	46
М. В. Гвинтовкин. Интеллектуальная система генерации отчетов по качеству на основе синергии машинного обучения и больших языковых моделей: преодоление разрыва между диагностикой и системой менеджмента качества	60

ЭНЕРГЕТИКА И ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Б. А. Косарев. Разработка методики выявления и подавления феррорезонансных процессов в изолированных электротехнических комплексах и системах	69
О. В. Косарева-Володько, Аббас Майтхам Худайр Аббас. Оптимальное проектирование гибридной системы возобновляемой энергии в режиме подключения к сети на примере исследования промышленного предприятия	79
О. А. Лысенко. Нейросетевой идентификатор давления насосной установки с асинхронным электроприводом центробежного насоса	88
Ю. В. Москалев. Оптимизация формы полюсных наконечников явнополюсной синхронной машины	96
А. В. Бублик, С. Ю. Степанов, Д. И. Попов, А. Ю. Ткачев. Методика проектирования универсальной испытательной системы на основе группировки электрических машин	103
А. И. Голоднова, М. В. Ерпалов, А. И. Голоднов. Влияние геометрии газовых каналов на токовый баланс в работе твердооксидных электролизеров	113

ЭЛЕКТРОНИКА, ФОТОНИКА, ПРИБОРОСТРОЕНИЕ И СВЯЗЬ

С. В. Бирюков. Основы взаимодействия однокомпонентного сферического датчика напряженности электрического поля, имеющего разомкнутую систему электродов с неоднородным полем точечного заряда	119
И. А. Шныптев. Исследование влияния комплексной стабилизации и контроля полета беспилотных летательных аппаратов на точность дистанционных измерений угла наклона опор с помощью блока лазерных сканирующих дальнометров	126

CONTENTS

MECHANICAL ENGINEERING

T. V. Ayusheyev, Ts. Ts. Tsydypov, K. A. Filippova. Modeling parametric solids based on arbitrary framework and non-uniform linear interpolation	5
D. I. Chernyavsky. Study of elastoplastic deformations in the dynamic interaction of two rigid deformable bodies	15
O. I. Vediaikina, P. A. Khazov. Influence of the geometric detail level of the digital twin of the experimental setup on the results of computational experiments	23
A. A. Zakharov. Computing normal vectors and derivatives at regular and singular points of parametric surfaces	31
A. S. Krasko, M. S. Kruzhkova, S. A. Pupukin. Development of a methodology for selecting technological equipment in organizational and technological support of production	38
V. G. Mufteev, F. T. Ziganshina, V. I. Gumerov. Smooth joining of spline curves ensuring a high order of smoothness	46
M. V. Gvintovkin. Intelligent system for generating quality reports based on the synergy of machine learning and large language models: Overlapping the gap between diagnostics and the quality management system	60

ENERGY AND ELECTRICAL ENGINEERING

B. A. Kosarev. Development of methodology for identifying and suppressing ferroresonance processes in isolated electrical complexes and systems	69
O. V. Kosareva-Volodko, Abbas Maitham Khudair Abbas. Optimal design of a grid-connected hybrid renewable energy system: a case study of an industrial enterprise	79
O. A. Lysenko. Neural network pressure identifier of a pumping unit with asynchronous electric drive of a centrifugal pump	88
Yu. V. Moskalev. Optimizing the shape of the pole tips of a single-pole synchronous machine	96
A. V. Bublik, S. Yu. Stepanov, D. I. Popov, A. Yu. Tkachev. Design methodology of the universal test system based on grouping of electric machines	103
A. I. Golodnova, M. V. Erpalov, A. I. Golodnov. Influence of the geometry of gas channels on the current balance in the operation of solid oxide electrolyzers	113

ELECTRONICS, PHOTONICS, INSTRUMENT ENGINEERING AND CONNECTION

S. V. Biryukov. Fundamentals of interaction of a single-component spherical electric field strength sensor with an open system of electrodes with a non-uniform field of a point charge	119
I. A. Shnyptev. Investigation of the effect of integrated unmanned aerial vehicles flight stabilization and control on the accuracy of remote measurements of the angle of inclination of the supports using the laser scanning rangefinders unit	126

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ НА ОСНОВЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО КАРКАСА И НЕРАВНОМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Т. В. Аюшеев, Ц. Ц. Цыдыпов, К. А. Филиппова

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,
Россия, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, д. 40В, стр. 1

В статье описывается способ построения параметрического тела по каркасу, состоящему из совокупности криволинейных шестигранников-порций, у которых противоположные границы непрямоугольных четырехугольных граней имеют различные параметрические длины. Параметрические тела могут моделировать как форму, так и анизотропную внутреннюю часть по заданному каркасу, не преобразуя его и не размножая информации о нем. В работе приводятся уравнения порции тела типов r_0 , r_1 и r_2 , построенные на основе неравномерной линейной интерполяции, для определения начальных или граничных условий в численном моделировании. Создание трехмерной расчетной сетки с переменным размером ячеек осуществляется путем деления порции тела на элементы, размер которых определяется локальными требованиями. Такой подход, востребованный в вычислительной аэродинамике, тепломассообмене и других инженерных расчетах, позволяет достичь большей точности там, где параметры быстро меняются и одновременно оптимизировать использование вычислительных ресурсов, применяя более крупные ячейки в зонах с плавными изменениями. Известное уравнение порции Кунса для единичного куба является частным случаем полученных уравнений.

Ключевые слова: геометрическое моделирование, параметрические тела, кубический сплайн, неравномерная линейная интерполяция, твердотельное моделирование, трехмерная интерполяция, метод Кунса.

Для цитирования: Аюшеев Т. В., Цыдыпов Ц. Ц., Филиппова К. А. Моделирование параметрических тел на основе произвольного каркаса и неравномерной линейной интерполяции // Омский научный вестник. 2026. № 1 (197). С. 5–14. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-5-14. EDN: BCIAYN.



© Аюшеев Т. В., Цыдыпов Ц. Ц., Филиппова К. А., 2026.
Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

MODELING PARAMETRIC SOLIDS BASED ON ARBITRARY FRAMEWORK AND NON-UNIFORM LINEAR INTERPOLATION

T. V. Ayusheyev, Ts. Ts. Tsydygov, K. A. Filippova

East Siberian State University of Technology and Management,
Russia, Ulan-Ude, Klyuchevskaya St., 40B, bld. 1, 670013

This article describes a method for constructing a parametric solid based on a framework consisting of a set of curved hexagonal portions whose opposite boundaries of non-rectangular quadrilateral faces have different parametric lengths. Parametric solids can model both the shape and anisotropic interior based on a given framework without transforming it or duplicating its information. Equations for body portions of types r_0 , r_1 , and r_2 are presented, constructed using non-uniform linear interpolation, to determine initial or boundary conditions in numerical simulations. A three-dimensional computational mesh with variable cell size is created by dividing the body portion into elements whose size is determined by local requirements. This approach, in demand in computational aerodynamics, heat and mass transfer, and other engineering calculations, enables greater accuracy in areas where parameters change rapidly, while simultaneously

optimizing the use of computational resources by using larger cells in areas with smooth changes. The well-known Coons portion equation for a unit cube is a special case of the obtained equations.

Keywords: geometric modeling, parametric bodies, cubic spline, non-uniform linear interpolation, solid modeling, three-dimensional interpolation, Coons method.

For citation: Ayusheyev T. V., Tsydypov Ts. Ts., Filippova K. A. Modeling parametric solids based on arbitrary framework and non-uniform linear interpolation. *Omsk Scientific Bulletin*. 2026. No. 1 (197). P. 5–14. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-5-14. EDN: BCIAYN.



© Ayusheyev T. V., Tsydypov Ts. Ts., Filippova K. A., 2026.
The content is available under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Введение

Построение трехмерных твердотельных моделей является одной из ключевых и сложных задач геометрического моделирования в системах автоматизированного проектирования (САПР). Эти модели необходимы для детального представления объектов в пространстве, что позволяет проводить инженерные расчеты, анализировать их поведение, моделировать физические процессы и обеспечивать точное изготовление на станках с ЧПУ. От точности и завершенности модели напрямую зависят последующие этапы проектирования и производства. Это особенно актуально для авиастроения, где требования к точности и сложности конструкций чрезвычайно высоки.

Целью работы является создание геометрической модели для описания параметрических тел с резким неравномерным распределением узловых точек каркаса и с возможностью построения трехмерной расчетной сетки внутри тела с уменьшением размера ячеек в приграничных областях без перезадавания исходного каркаса. Геометрическая структура тела моделируемого объекта — совокупность его основных элементов (границ, ребра, вершины) и их взаимного расположения, которая определяет форму и свойства тела, такие как объем и площадь поверхности; это замкнутая трехмерная часть пространства, ограниченная поверхностью. При этом рассматривается внутренняя структура тела, состоящая из расчетных ячеек переменной формы, которая описывается с помощью криволинейных координатных поверхностей.

В САПР используются различные методы представления твердотельных геометрических моделей, включая каркасное, граничное, конструктивное, воксельное и точечное моделирование [1]. Выбор метода определяется требованиями к точности, вычислительной сложности и спецификой решаемой задачи. Несмотря на то, что методы в основном описывают геометрию поверхности, а не внутренние физические процессы, они остаются эффективным инструментом для большинства задач проектирования и моделирования.

Развитие сложных физических моделей, использующих скалярные, векторные и тензорные поля, остро ставит вопрос о необходимости в точном моделировании формы и распределения полей для задания начальных и граничных условий. Примеры практического использования охватывают широкий спектр областей, включая моделирование в механике, аэродинамике, термодинамике и анализ неоднородных материалов.

Внутреннее моделирование основано на параметрической функции, отображающей пространство параметров в пространство объектов. В трехмерном

моделировании для реализации этого отображения часто используются объемные элементы, такие как тетраэдры, пентаэдры и гексаэдры. Эти примитивы, являющиеся трехмерными аналогами двумерных треугольников и прямоугольников, находят широкое применение в методе конечных элементов (FEM) [2].

Метод деформации свободной формы (FFD) был предложен в работе [3]. Указанный метод основан на деформации пространства внутри параллелепипеда с помощью управляющей решетки. Деформируемое пространство моделируется как трехмерный объем Безье, параметры которого определяются узлами решетки. В работе [4] усовершенствовали этот метод, заменив представление объема Безье на B -сплайн. Методы представления сплошных тел в форме Безье и с помощью NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) были рассмотрены в работе [5]. Метод построения трехмерных тел на непрямоугольном каркасе был предложен в работе [6]. В работе [7] рассматривался метод построения многослойных конструкций, изготавливаемых намоткой и выкладкой из композиционных материалов, с помощью порождающей B -сплайн поверхности. Подход к твердотельному моделированию геометрических объектов в точечном исчислении был предложен в работе [1]. Алгоритмы построения оптимальных трехмерных структурированных сеток в телах вращения рассматривались в работе [8].

Твердотельные элементы авиационных конструкций чаще всего не могут быть представлены одним уравнением. Для их математического описания используют систему продольных, поперечных и вертикальных кривых, проходящих через узловые точки, образуя каркас. Каркас определяет геометрию и форму конструкции, разбивая ее на совокупность криволинейных шестиграников-порций.

Используя метод Кунса, можно построить уравнение тела порции, обладающее свойством непрерывности производных, что обеспечивает плавность переходов [9]. Однако у метода Кунса есть существенный недостаток: если узловые точки расположены неравномерно, поверхность может получиться негладкой, с плоскими участками или неровностями [10].

Чтобы избежать этих проблем, необходимо предварительно разбить каркас на более мелкие равномерные порции. Но это не всегда удобно, так как может противоречить требованиям к конструкции и технологии изготовления. Кроме того, такой подход увеличивает объем данных, необходимых для обработки.

В статье предлагается метод создания параметрических тел на основе каркаса из шестигонных порций. Указанные порции, не являющиеся прямо-

угольными, имеют противоположные грани с разной параметрической длиной. Такой подход позволяет моделировать как форму, так и анизотропные внутренние свойства тела по заданному каркасу, избегая его преобразования и дублирования информации. В статье также представлены уравнения для порций типов $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, основанные на неравномерной линейной интерполяции, которые часто применяются в качестве начальных или граничных условий в численных расчетах.

Три этапа моделирования тела

В работе авторы расширяют существующую модель Кунса для единичного куба [9], вводя понятие параметрических тел нерегулярной формы, построенных с помощью неравномерной линейной интерполяции. Указанные тела, которые мы будем называть телами $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, обладают разными возможностями в управлении их формой и внутренней структурой. Тело $\mathbf{r}_0$ является самым простым, ограничивает изменения только формой четырёхугольника. Тело $\mathbf{r}_1$ предоставляет больше возможностей, позволяя управлять внутренней частью, путем перемещения управляющих точек вдоль граничных кривых параметрического тела. Тело $\mathbf{r}_2$ является наиболее общим случаем, обеспечивающим возможность изменения формы и внутренней структуры, используя управляющие точки граничных поверхностей параметрического тела.

Порция трехпараметрического тела Кунса тензорного произведения определяется как [6]

$$\mathbf{r}(u, v, w) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \begin{bmatrix} \mathbf{P}(i, j, k) \mathbf{I}_{i0}(u) \mathbf{I}_{j0}(v) \mathbf{I}_{k0}(w) + \\ + \mathbf{P}_u(i, j, k) \mathbf{I}_{i1}(u) \mathbf{I}_{j0}(v) \mathbf{I}_{k0}(w) + \\ + \mathbf{P}_v(i, j, k) \mathbf{I}_{i0}(u) \mathbf{I}_{j1}(v) \mathbf{I}_{k0}(w) + \\ + \mathbf{P}_w(i, j, k) \mathbf{I}_{i0}(u) \mathbf{I}_{j0}(v) \mathbf{I}_{k1}(w) + \\ + \mathbf{P}_{uv}(i, j, k) \mathbf{I}_{i1}(u) \mathbf{I}_{j1}(v) \mathbf{I}_{k0}(w) + \\ + \mathbf{P}_{uw}(i, j, k) \mathbf{I}_{i1}(u) \mathbf{I}_{j0}(v) \mathbf{I}_{k1}(w) + \\ + \mathbf{P}_{vw}(i, j, k) \mathbf{I}_{i0}(u) \mathbf{I}_{j1}(v) \mathbf{I}_{k1}(w) + \\ + \mathbf{P}_{uvw}(i, j, k) \mathbf{I}_{i1}(u) \mathbf{I}_{j1}(v) \mathbf{I}_{k1}(w) \end{bmatrix},$$

где $u, v, w = [0, 1]$; $\mathbf{P}(i, j, k)$, $\mathbf{P}_u(i, j, k)$, $\mathbf{P}_v(i, j, k)$, $\mathbf{P}_w(i, j, k)$, $\mathbf{P}_{uv}(i, j, k)$, $\mathbf{P}_{uw}(i, j, k)$, $\mathbf{P}_{vw}(i, j, k)$, $\mathbf{P}_{uvw}(i, j, k)$, $i, j, k = \{0, 1\}$ — векторы положения, касательные векторы, векторы перекрестных производных по двум и по трем параметрам в узловых точках каркаса; $\mathbf{I}_{i0}(u)$, $\mathbf{I}_{i1}(u)$ — функции сопряжения. Заметим, что для данной порции тела существует 64 алгебраических и 64 геометрических вектора, что в сумме дает 192 коэффициента. Порция состоит из 8 узловых (угловых) точек $\mathbf{P}(i, j, k)$, $i, j, k = \{0, 1\}$ (рис. 1). Через эти точки проведены 12 граничных кривых: 4 продольные $\mathbf{r}(u, i, k)$, $j, k = \{0, 1\}$; 4 поперечные $\mathbf{r}(i, v, k)$, $i, k = \{0, 1\}$ и 4 вертикальные $\mathbf{r}(i, j, w)$, $i, j = \{0, 1\}$. Эти кривые образуют криволинейный каркас порции. Порция тела имеет 6 криволинейных граней (граничных поверхностей): $\mathbf{r}(i, v, w)$, $i = \{0, 1\}$; $\mathbf{r}(u, j, w)$, $j = \{0, 1\}$; $\mathbf{r}(u, v, k)$, $k = \{0, 1\}$.

Уравнение порции тела $\mathbf{r}_0$

Порция тела $\mathbf{r}_0$ представляет собой трилинейную интерполяцию восьми точек $\mathbf{P}(i, j, k)$, $i, j, k = \{0, 1\}$ и описывается векторной функцией

$$\mathbf{r}_0(u, v, w) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 [\mathbf{P}(i, j, k) \mathbf{F}_i(u) \mathbf{F}_j(v) \mathbf{F}_k(w)], \quad (1)$$

где $u, v, w = [0, 1]$, $\mathbf{F}_0(u) = 1 - u$, $\mathbf{F}_1(u) = u$ — функции сопряжения.

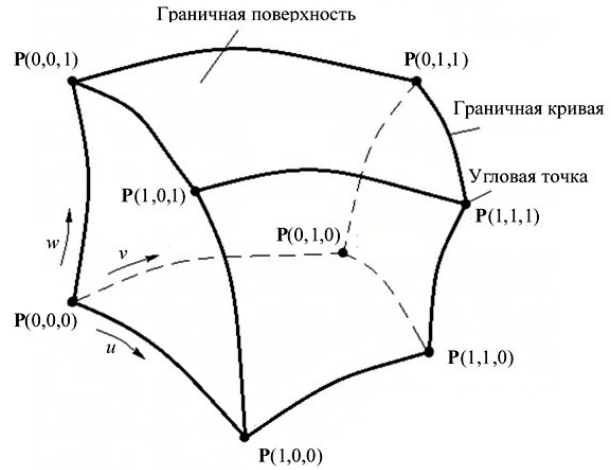


Рис. 1. Криволинейная шестигранная порция тела
Fig. 1. Curved hexagonal portion of the body

Формула (1) допускает важное обобщение. Линейные функции сопряжения $(1-u)$, u являются следствием применения равномерной линейной интерполяции. Однако вместо них можно использовать нелинейные функции, а именно многочлены Эрмита [10, 11]:

$$\alpha_0(u) = 1 - 3u^2 + 2u^3, \alpha_1(u) = 3u^2 - 2u^3,$$

для которых выполняются соотношения $1 - \alpha_1(u) = \alpha_0(u)$ и

$$\alpha_0(0) = 1, \alpha_0(1) = 0,$$

$$\alpha_1(0) = 0, \alpha_1(1) = 1.$$

При выполнении указанной замены интерполяции в u -направлении, используемая в уравнении (1), сохранит линейную зависимость, но скорость движения конца вектора $\mathbf{r}_0$ по линии интерполяции при равномерном увеличении u от 0 до 1 станет непостоянной. Соответствующая замена $(1-v)$, v на $\alpha_0(v)$, $\alpha_1(v)$ и $(1-w)$, w на $\alpha_0(w)$, $\alpha_1(w)$ приводит к следующей формуле в матричном виде

$$\mathbf{r}_0(u, v, w) = [\alpha_0(u) \quad \alpha_1(u)] \times \begin{bmatrix} \alpha_0(v) & \alpha_1(v) \\ \alpha_0(v) & \alpha_1(v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}(0,0,0) & \mathbf{P}(0,0,1) \\ \mathbf{P}(0,1,0) & \mathbf{P}(0,1,1) \\ \mathbf{P}(1,0,0) & \mathbf{P}(1,0,1) \\ \mathbf{P}(1,1,0) & \mathbf{P}(1,1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(w) \\ \alpha_1(w) \\ \alpha_0(w) \\ \alpha_1(w) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Граничными поверхностями порции тела $\mathbf{r}_0$ могут быть шесть плоских граней, или шесть гиперболических параболоидов: $\mathbf{r}_0(i, v, w)$, $\mathbf{r}_0(u, j, w)$, $\mathbf{r}_0(u, v, k)$, $i, j, k = 0, 1$. Все её границы являются линейными сегментами. Установив два параметра u , v и w равными 0 или 1, получим 12 линейных сегментов: $\mathbf{r}_0(u, j, k)$, $\mathbf{r}_0(i, v, k)$, $\mathbf{r}_0(i, j, w)$.

На рис. 2 представлен пример порции параметрического тела $\mathbf{r}_0$. Его структура иллюстрируется усеченной четырехугольной пирамидой, которая деформируется путем перемещения его угловых точек. Хотя форма объекта может меняться, его внутренняя «плотность» остается неизменной. Получаемая при этом нерегулярная сетка имеет более высокую плотность ячейки вблизи границ тела. Предлагаемый подход часто применяется в методах конечных элементов при работе с трехмерными элементами, где используются линейные функции сопряжения.

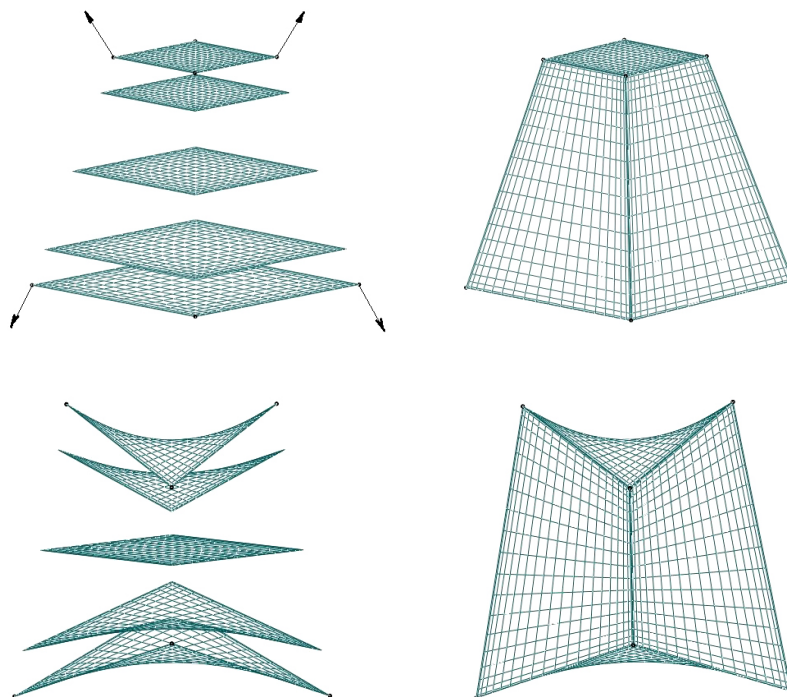


Рис. 2. Деформация формы исходной усеченной четырехугольной пирамиды при перемещении угловых точек
Fig. 2. Deformation of the shape of the original truncated quadrangular pyramid by moving the corner points

Уравнение порции тела r_1

Допустим, что существуют совместимые граничные кривые $r(u, j, k)$, $r(i, v, k)$ и $r(i, j, w)$; $i, j, k = \{0, 1\}$; $u, v, w = [0, 1]$, обладающие следующим свойством:

$$r(u, j, k)_{u=i} = r(i, v, k)_{v=j} = r(i, j, w)_{w=k} = r(i, j, k)$$

для каждого $i, j, k = \{0, 1\}$.

Порция тела r_1 представляет собой билинейную интерполяцию между парами совместимых граничных кривых и описывается векторной функцией

$$\begin{aligned} r_1(u, v, w) = & \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 [F_i(u)F_j(v)r(i, j, w)] + \\ & + \sum_{i=0}^1 \sum_{k=0}^1 [F_i(u)F_k(w)r(i, v, k)] + \\ & + \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 [F_j(v)F_k(w)r(i, j, k)] - 2r_0(u, v, w), \end{aligned} \quad (3)$$

где $i, j, k = [0, 1]$, $F_0(u) = 1 - u$, $F_1(u) = u$ — линейные функции сопряжения.

Граничные кривые в формуле (3) были построены на основе обобщенной интерполяции Эрмита на отрезке $[0, 1]$. С её помощью сегмент параметрической заданной кривой можно представить через положение конечных точек, а также через значения касательных в них:

$$r(\omega) = \sum_{i=0}^1 [r(i)I_{i0}(\omega) + r_\omega(i)I_{i1}(\omega)], \quad (4)$$

где $I_{i0}(\omega)$, $I_{i1}(\omega)$ — функции сопряжения.

Для нашей задачи потребуется интерполяция Эрмита с параметром ξ , варьирующимся в диапазоне от 0 до h . Применяв преобразование $\xi = \omega h$ можно описать сегмент кривой следующим образом:

$$r(\omega) = \sum_{i=0}^1 [r(i)I_{i0}(\omega) + r_\xi(i)I_{i1}(\omega)h], \quad (5)$$

В данном выражении, подобно предыдущему (4), индексы 0 и 1 обозначают концевые точки сегмента кривой. Отличие заключается в наличии множителя h (параметрическая длина кривой; в (4) она равна 1) и в том, что производные в конечных точках вычислены относительно прежнего параметра ξ .

Рассмотрим произвольный криволинейный каркас порции тела, который формируется в результате пересечения s -кривых, l -кривых и g -кривых. Пусть S_{ijk} , L_{ijk} , G_{ijk} ($i, j, k = 0, 1$) представляют значения параметров в узлах данной порции (рис. 3). Обозначим параметрические длины соответствующих граничных кривых как s_{jk} , l_{jk} и g_{ij} . Эти длины можно вычислить с помощью следующих формул:

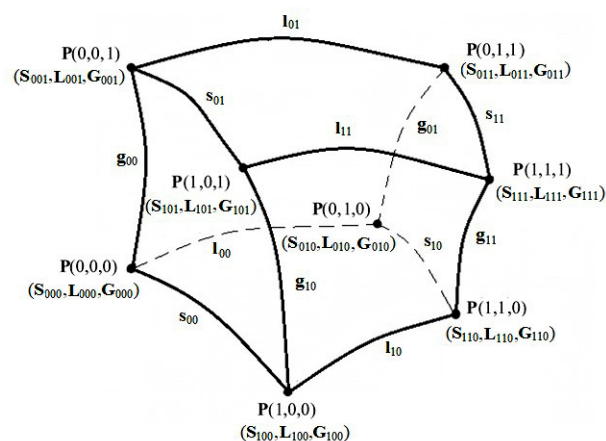


Рис. 3. Параметрические длины граничных кривых порции тела
Fig. 3. Parametric lengths of boundary curves of a body portion

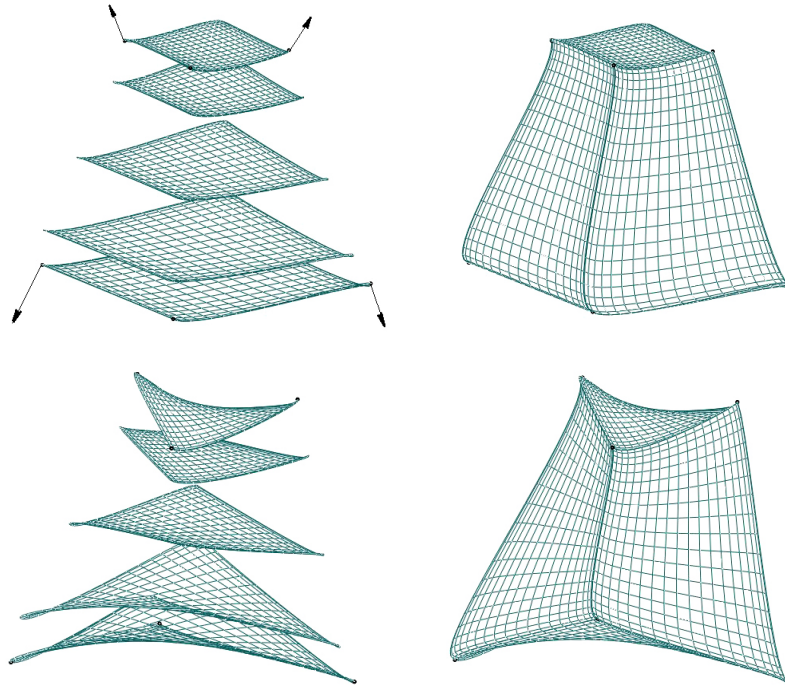


Рис. 4. Деформация формы исходного тела r_1 с граничными кривыми кубического сплайна при перемещении угловых точек
Fig. 4. Deformation of the shape of the r_1 original body with boundary curves of a cubic spline by moving the corner points

$$s_{jk} = S_{1jk} - S_{0jk}, \quad l_{ik} = l_{i1k} - l_{i0k}, \quad g_{ij} = G_{j1} - G_{j0}. \quad (6)$$

Так как теперь порция произвольная, то при построении граничных кривых необходимо воспользоваться интерполяцией (5). В этом случае граничные кривые порции тела описываются следующими формулами:

$$\begin{aligned} r(u, j, k) &= \sum_{i=0}^1 [P(i, j, k) l_{i0}(u) + P_s(i, j, k) l_{i1}(u) s_{jk}], \\ r(i, v, k) &= \sum_{j=0}^1 [P(i, j, k) l_{j0}(v) + P_i(i, j, k) l_{j1}(v) l_{ik}], \\ r(i, j, w) &= \sum_{k=0}^1 [P(i, j, k) l_{k0}(w) + P_g(i, j, k) l_{k1}(w) g_{ij}]. \end{aligned} \quad (7)$$

При выполнении замены линейных функций сопряжения на нелинейные функции граничных кривых (4) на (5) в выражении (3) получим следующую формулу в матричном виде:

$$\begin{aligned} r_1(u, v, w) &= \begin{bmatrix} \alpha_0(u) & \alpha_1(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(0,0,w) & r(0,1,w) \\ r(1,0,w) & r(1,1,w) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(v) \\ \alpha_1(v) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \alpha_0(u) & \alpha_1(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(0,v,0) & r(0,v,1) \\ r(1,v,0) & r(1,v,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(w) \\ \alpha_1(w) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \alpha_0(v) & \alpha_1(v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(u,0,0) & r(u,0,1) \\ r(u,1,0) & r(u,1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(w) \\ \alpha_1(w) \end{bmatrix} - 2r_0(u, v, w). \end{aligned} \quad (8)$$

Граничными поверхностями тела r_1 являются шесть линейчатых поверхностей Кунса: $r_1(i, v, w)$, $r_1(u, j, w)$, $r_1(u, v, k)$, $i, j, k = 0, 1$. Граничные кривые тела r_1 — это совместимые кривые: $r(u, j, k)$, $r(i, v, k)$, $r(i, j, w)$ описываются кубическими параметрическими сплайнами. В частном случае, когда граничные кривые линейны, тело r_1 в действительности является телом r_0 с вершинами $P(i, j, k)$.

На рис. 4 представлен пример порции параметрического тела r_1 . Его структура иллюстрируется криволинейным телом, границы которого определены кубическим сплайном. Структура тела деформируется путем перемещения её угловых вершин. Изменение формы тела приводит к неравномерной внутренней «плотности». Получаемая при этом нерегулярная сетка имеет более высокую плотность ячейки вблизи границ тела. Моделирование внутренней части ограничивается в порции r_1 , из-за того что мы используем только информацию о границах тела и нелинейные функции переменных u, v и w .

Имея пространственную сетку кривых можно сконструировать составное тело из порций описанного типа.

Уравнение порции тела r_2

Допустим, что имеются три пары противоположных граничных поверхностей тела: $r(i, v, w)$, $r(u, j, w)$ и $r(u, v, k)$; $i, j, k = \{0, 1\}$; $u, v, w = [0, 1]$, с общими граничными кривыми: $r(u, j, k)$; $j, k = \{0, 1\}$; $r(i, v, k)$; $i, k = \{0, 1\}$; $r(i, j, w)$; $i, j = \{0, 1\}$.

Порция тела r_2 описывается векторной функцией

$$\begin{aligned} r_2(u, v, w) &= \sum_{i=0}^1 [F_i(u) r(i, v, w)] + \\ &+ \sum_{j=0}^1 [F_j(v) r(u, j, w)] + \sum_{k=0}^1 [F_k(w) r(u, v, k)] - \\ &- r_1(u, v, w) - r_0(u, v, w), \end{aligned} \quad (9)$$

где $i, j, k = [0, 1]$, $F_0(u) = 1 - u$, $F_1(u) = u$ — функции сопряжения.

При описании граничных поверхностей тела был использован метод Кунса. По данному методу можно построить поверхность для квадратной сетки. Сегменты граничных кривых описывались с помощью формулы (7).

Если порция тела представляет собой непрямоугольный объем (рис. 1), то для построения граничных кривых используем интерполяцию (5). Параметрические длины граничных кривых вычисляем по формуле (6). Чтобы описать поверхность для прямоугольной области, необходимо осуществить преобразования:

$$\begin{aligned}s_k &= s_k(u, v), \quad l_i = l_i(v, w), \\ l_k &= l_k(u, v), \quad g_j = g_j(u, w), \\ g_i &= g_i(v, w), \quad s_j = s_j(u, w),\end{aligned}$$

которые переводят четырехугольники со сторонами s_{jk}, l_{ik}, g_{ij} в единичные квадраты. Используя уравнение Кунса, эти преобразования можно определить в классе бикубических функций в виде

$$\begin{aligned}s_{uk}(v) &= s_{0k}\alpha_0(v) + s_{1k}\alpha_1(v), \quad l_{vk}(v) = l_{0k}\alpha_0(v) + l_{1k}\alpha_1(v), \\ g_{jw}(u) &= g_{0j}\alpha_0(u) + g_{1j}\alpha_1(u), \quad l_{iv}(w) = l_{0i}\alpha_0(w) + l_{1i}\alpha_1(w), \\ g_{iw}(v) &= g_{0i}\alpha_0(v) + g_{1i}\alpha_1(v), \quad s_{uj}(w) = s_{0j}\alpha_0(w) + s_{1j}\alpha_1(w).\end{aligned}\quad (10)$$

Уравнения граничных поверхностей с учетом (10) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u, v, k) &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 [\mathbf{P}(i, j, k) \mathbf{I}_{i0}(u) \mathbf{I}_{j0}(v) + \mathbf{P}_s(i, j, k) \mathbf{J}_{i1k}(u, v) \mathbf{I}_{j0}(v) + \\ &+ \mathbf{P}_l(i, j, k) \mathbf{I}_{i0}(u) \mathbf{K}_{j1k}(u, v) + \mathbf{P}_{sl}(i, j, k) \mathbf{J}_{i1k}(u, v) \mathbf{K}_{j1k}(u, v)], \\ \mathbf{r}(i, v, w) &= \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 [\mathbf{P}(i, j, k) \mathbf{I}_{j0}(v) \mathbf{I}_{k0}(w) + \mathbf{P}_l(i, j, k) \mathbf{Q}_{j1i}(v, w) \mathbf{I}_{k0}(w) + \\ &+ \mathbf{P}_g(i, j, k) \mathbf{I}_{j0}(v) \mathbf{D}_{k1i}(v, w) + \mathbf{P}_{lg}(i, j, k) \mathbf{Q}_{j1i}(v, w) \mathbf{D}_{k1i}(v, w)], \\ \mathbf{r}(u, j, w) &= \sum_{i=0}^1 \sum_{k=0}^1 [\mathbf{P}(i, j, k) \mathbf{I}_{i0}(u) \mathbf{I}_{k0}(w) + \mathbf{P}_s(i, j, k) \mathbf{N}_{i1j}(u, w) \mathbf{I}_{k0}(w) + \\ &+ \mathbf{P}_g(i, j, k) \mathbf{I}_{i0}(u) \mathbf{M}_{k1j}(u, w) + \mathbf{P}_{sg}(i, j, k) \mathbf{N}_{i1j}(u, w) \mathbf{M}_{k1j}(u, w)],\end{aligned}\quad (11)$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{i1k}(u, v) &= \mathbf{I}_{i1}(u) s_{uk}(v), \quad \mathbf{K}_{j1k}(u, v) = \mathbf{I}_{j1}(v) l_{vk}(u), \\ \mathbf{Q}_{j1i}(v, w) &= \mathbf{I}_{j1}(v) l_{vi}(w), \quad \mathbf{D}_{k1i}(v, w) = \mathbf{I}_{k1}(w) l_{vi}(v), \\ \mathbf{M}_{k1j}(u, w) &= \mathbf{I}_{k1}(u) l_{vj}(w), \quad \mathbf{N}_{i1j}(u, w) = \mathbf{I}_{i1}(u) l_{vj}(w).\end{aligned}$$

Если в качестве функций сопряжений выбрать многочлены Эрмита

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{00}(\omega) &= \alpha_0(\omega) = 1 - 3\omega^2 + 2\omega^3 \\ \mathbf{I}_{10}(\omega) &= \alpha_1(\omega) = 3\omega^2 - 2\omega^3 \\ \mathbf{I}_{01}(\omega) &= \beta_0(\omega) = \omega - 2\omega^2 + \omega^3\end{aligned}$$

$$\mathbf{I}_{11}(\omega) = \beta_1(\omega) = -\omega^2 + \omega^3, \quad (12)$$

то получим в матричном виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u, v, k) &= \mathbf{F}(u) \mathbf{P}(u, v, 0) \mathbf{F}^T(v) \\ \mathbf{r}(i, v, w) &= \mathbf{F}(v) \mathbf{P}(i, v, w) \mathbf{F}^T(w) \\ \mathbf{r}(u, j, w) &= \mathbf{F}(u) \mathbf{P}(u, j, w) \mathbf{F}^T(w),\end{aligned}\quad (13)$$

где $\mathbf{F}(\omega) = [\alpha_0(\omega), \alpha_1(\omega), \beta_0(\omega), \beta_1(\omega)]$; T — знак транспонирования; $\mathbf{F}^T(\omega)$ — вектор-столбец.

Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(u, v, k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}(0,0,k) & \mathbf{P}(0,1,k) & \mathbf{P}_l(0,0,k)l_{vk}(u) & \mathbf{P}_l(0,1,k)l_{vk}(u) \\ \mathbf{P}(1,0,k) & \mathbf{P}(1,1,k) & \mathbf{P}_l(1,0,k)l_{vk}(u) & \mathbf{P}_l(1,1,k)l_{vk}(u) \\ \mathbf{P}_s(0,0,k)s_{uk}(v) & \mathbf{P}_s(0,1,k)s_{uk}(v) & \mathbf{P}_s(0,0,k)s_{uk}(v)l_{vk}(u) & \mathbf{P}_s(0,1,k)s_{uk}(v)l_{vk}(u) \\ \mathbf{P}_s(1,0,k)s_{uk}(v) & \mathbf{P}_s(1,1,k)s_{uk}(v) & \mathbf{P}_s(1,0,k)s_{uk}(v)l_{vk}(u) & \mathbf{P}_s(1,1,k)s_{uk}(v)l_{vk}(u) \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}(i, v, w) &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}(i,0,0) & \mathbf{P}(i,0,1) & \mathbf{P}_g(i,0,0)g_{wi}(v) & \mathbf{P}_g(i,0,1)g_{wi}(v) \\ \mathbf{P}(i,1,0) & \mathbf{P}(i,1,1) & \mathbf{P}_g(i,1,0)g_{wi}(v) & \mathbf{P}_g(i,1,1)g_{wi}(v) \\ \mathbf{P}_l(i,0,0)l_{vi}(w) & \mathbf{P}_l(i,0,1)l_{vi}(w) & \mathbf{P}_{lg}(i,0,0)l_{vi}(w)g_{wi}(v) & \mathbf{P}_{lg}(i,0,1)l_{vi}(w)g_{wi}(v) \\ \mathbf{P}_l(i,1,0)l_{vi}(w) & \mathbf{P}_l(i,1,1)l_{vi}(w) & \mathbf{P}_{lg}(i,1,0)l_{vi}(w)g_{wi}(v) & \mathbf{P}_{lg}(i,1,1)l_{vi}(w)g_{wi}(v) \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}(u, j, w) &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}(0,j,0) & \mathbf{P}(0,j,1) & \mathbf{P}_l(0,j,0)l_{vj}(u) & \mathbf{P}_l(0,j,1)l_{vj}(u) \\ \mathbf{P}(1,j,0) & \mathbf{P}(1,j,1) & \mathbf{P}_l(1,j,0)l_{vj}(u) & \mathbf{P}_l(1,j,1)l_{vj}(u) \\ \mathbf{P}_s(0,j,0)s_{uj}(w) & \mathbf{P}_s(0,j,1)s_{uj}(w) & \mathbf{P}_{sg}(0,j,0)s_{uj}(w)l_{vj}(u) & \mathbf{P}_{sg}(0,j,1)s_{uj}(w)l_{vj}(u) \\ \mathbf{P}_s(1,j,0)s_{uj}(w) & \mathbf{P}_s(1,j,1)s_{uj}(w) & \mathbf{P}_{sg}(1,j,0)s_{uj}(w)l_{vj}(u) & \mathbf{P}_{sg}(1,j,1)s_{uj}(w)l_{vj}(u) \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (14)$$

Замена линейных функций сопряжения на нелинейные функции в выражении (9) и с учетом граничных поверхностей (11) приводит к следующей формуле

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_2(u, v, w) &= [\alpha_0(u) \quad \alpha_1(u)] \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0, v, w) \\ \mathbf{r}(1, v, w) \end{bmatrix} + \\ &+ [\alpha_0(v) \quad \alpha_1(v)] \begin{bmatrix} \mathbf{r}(u, 0, w) \\ \mathbf{r}(u, 1, w) \end{bmatrix} + \\ &+ [\alpha_0(w) \quad \alpha_1(w)] \begin{bmatrix} \mathbf{r}(u, v, 0) \\ \mathbf{r}(u, v, 1) \end{bmatrix} -\end{aligned}$$

Граничными поверхностями тела $\mathbf{r}_2$ являются шесть поверхностей с коэффициентами, учитывающих непрямоугольную область изменения параметров: $\mathbf{r}(i, v, w)$, $\mathbf{r}(u, j, w)$ и $\mathbf{r}(u, v, k)$; $i, j, k = \{0, 1\}$. Следует заметить, что если все эти коэффициенты приравнять к единице, то тело $\mathbf{r}_2$ на самом деле является телом Кунса для единичного куба. Очевидно, если порция тела определена только граничными кривыми, то мы получим тело $\mathbf{r}_1$. В простейшем случае, когда порция тела имеет линейные граничные кривые, получается тело $\mathbf{r}_0$.

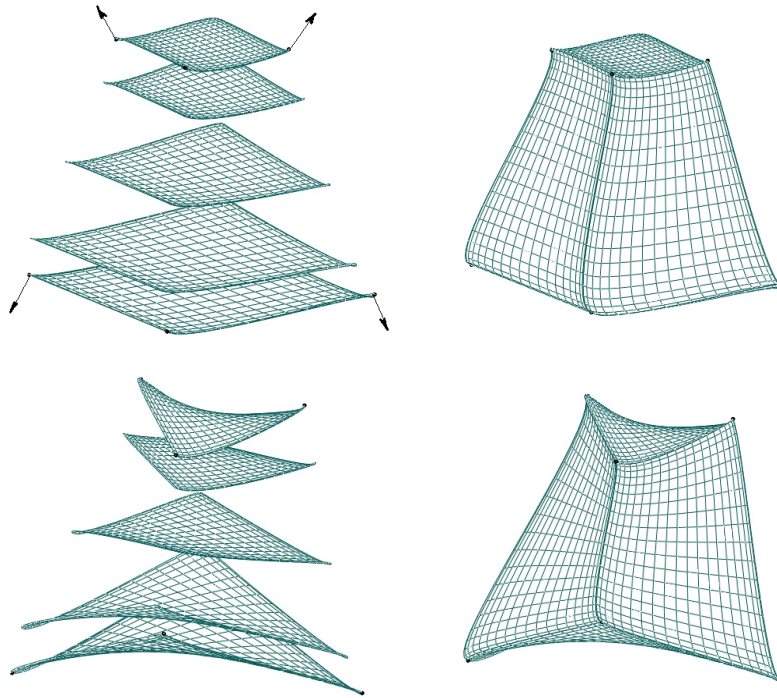


Рис. 5. Деформация формы исходного тела r_2 с граничными поверхностями кубического сплайна при перемещении угловых точек
Fig. 5. Deformation of the shape of the r_2 original body with boundary surfaces of a cubic spline by moving the corner points

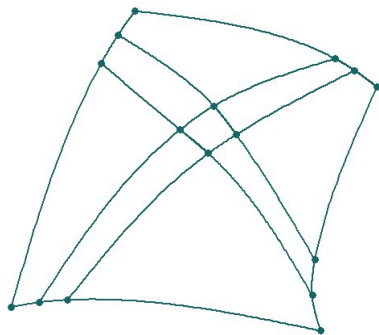


Рис. 6. Пример задания поверхности тела с резким распределением узловых точек
Fig. 6. Example of defining a body surface with a sharp distribution of nodal points

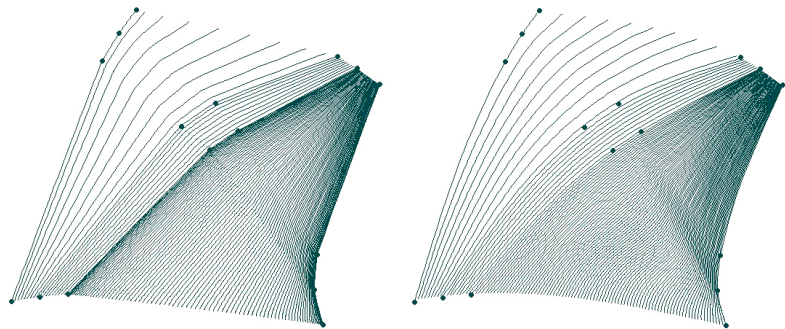


Рис. 7. Моделирование поверхности тела с резким распределением узловых точек: а — поверхность тела Кунса; б — поверхность тела r_2
Fig. 7. Modeling a solid surface with a sharp distribution of nodal points: а — Coons solid surface; б — r_2 solid surface

Пример тела r_2 , использующего граничные поверхности кубического сплайна, показан на рис. 5. Дополнительная свобода в моделировании достигается за счет возможности построения более гладкого построения поверхности на границе и внутри непрямоугольного объема тела, чем при использовании тела r_2 .

Результаты экспериментов

Исследование включало не только моделирование простых геометрических тел, но и проведение вычислительных экспериментов для объектов со сложной геометрией. Твёрдотельные модели, представленные в работе, были визуализированы с помощью компьютерной алгебры MathCad версии 15, но стоит отметить, что для этих целей могут быть использованы и другие инструменты компьютерной графики и научной визуализации. С помощью указанной выше программы были подготовлены рисунки для демонстрации изменения формы и внутренней части тел r_0 , r_1 и r_2 . На рис. 6 приведен

пример задания и моделирования поверхности тела с резким неравномерным распределением узловых точек. Проведенный вычислительный эксперимент показывает, что моделирование составной поверхности с помощью r_2 дает более гладкую поверхность, чем составная поверхность Кунса (рис. 7).

Предложенный метод параметрического моделирования тела был использован при разработке 3D-модели воздушного винта беспилотного летательного аппарата в среде САПР NX (рис. 8).

Полученные в ходе вычислительных экспериментов данные подтвердили, что предложенный подход является обоснованным и достоверным.

Заключение

Практическая работа с описанным в статье методом геометрического моделирования параметрического тела позволяет сделать следующие выводы: — предложенный новый метод описывания параметрического тела с резким неравномерным распределением узлов не требует перезадавания ис-

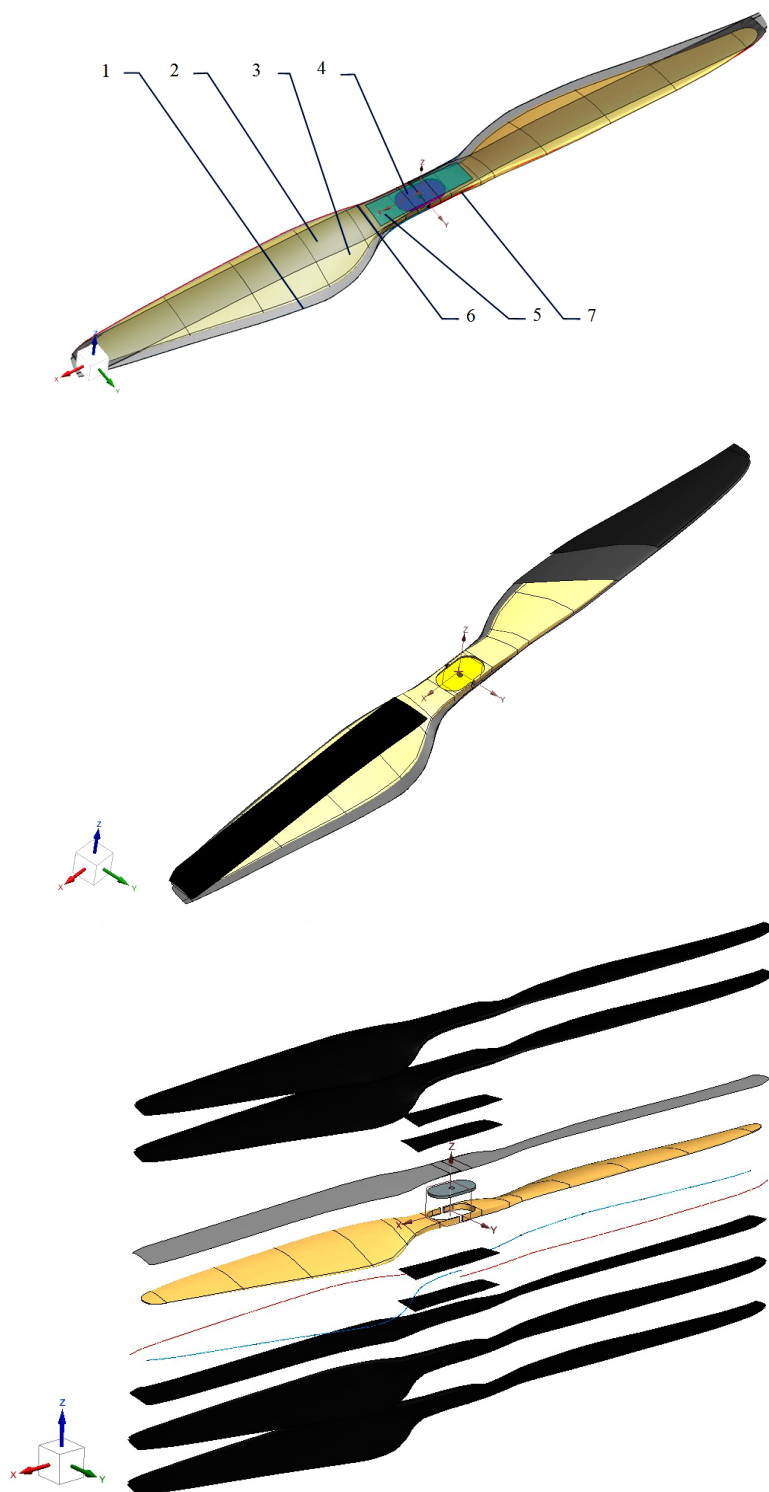


Рис. 8. 3D-модель воздушного винта беспилотного летательного аппарата:

- 1 — углепластиковая оболочка; 2 — однонаправленная углеродная лента;
3 — вкладыш из древесины бальза; 4 — сердцевина;
5 — полоски усиления центральной части винта; 6 — углеродные нити по передней кромке винта; 7 — углеродные нити по задней кромке винта

Fig. 8. 3D-model of an unmanned aerial vehicle propeller:

- 1 — carbon fiber skin; 2 — unidirectional carbon tape;
3 — balsa wood insert; 4 — core; 5 — reinforcing strips of the central part of the propeller;
6 — carbon fibers along the leading edge of the propeller; 7 — carbon fibers along the trailing edge of the propeller

ходного каркаса, при этом поверхность тела получается более гладкой, чем при описании методом Кунса;

— высокая скорость вычисления коэффициентов тела посредством кубических параметрических сплайнов, основанных на каркасных кривых,

исключает возникновение трудностей, связанных с переаппроксимацией;

— использование параметрических тел r_0 , r_1 и r_2 с их возможностями трансформации при изменении параметров повышает эффективность управления формой и внутренней структурой;

— при построении трехмерной расчетной сетки тела используется неравномерная линейная интерполяция. Такой подход позволяет в программе эффективно генерировать расчетную сетку с крупными ячейками в центральной части и мелкими у границ, оптимизируя вычислительные ресурсы за счет сохранения количества заданных узлов;

— приведенные примеры показывают, что процесс определения внутренней структуры при деформации формы тела чрезвычайно упрощается с помощью криволинейных координатных поверхностей.

Финансирование / Funding

Работа выполнена в рамках реализации стратегического технологического проекта Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления «БайкалАэроТех. Беспилотные горизонты» программы стратегического академического лидерства «Приоритет-2030».

The work is carried out as a part of the implementation of the strategic technological project of the East Siberian State University of Technology and Management "Baikalaerotech. Unmanned Horizons" Strategic Academic Leadership program "Priority 2030".

Список источников / References

1. Конопацкий Е. В., Ротков С. И., Лагунова М. В., Безсонов М. В. Подход к твердотельному моделированию геометрических объектов в точечном исчислении // Онтология проектирования. 2025. Т. 15, № 1 (55). С. 24–33. DOI: 10.18287/2223-9537-2025-15-1-24-33. EDN: NOBIOR.

Konopatskiy E. V., Rotkov S. I., Lagunova M. V., Bezsol'nov M. V. Podkhod k tvèrdotel'nomu modelirovaniyu geometricheskikh ob'yektov v tochechnom ischislenii [An approach to solid modeling of geometric objects in point calculus]. *Ontologiya proyektirovaniya. Ontology of Designing*. 2025. Vol. 15, no. 1 (55). P. 24–33. DOI: 10.18287/2223-9537-2025-15-1-24-33. EDN: NOBIOR. (In Russ.).

2. Сабоннад'ер Ж.-К., Кулон Ж.-Л. Метод конечных элементов и САПР / пер. с франц. В. А. Соколов, М. Б. Блеер. Москва: Мир, 1989. 192 с. ISBN 5-03-000488-2.

Sabonnad'yer Zh.-K., Kulon Zh.-L. Metod konechnykh elementov i SAPR [Finite element method and CAD] / trans. from Fr. by V. A. Sokolov, M. B. Bleier. Moscow, 1989. 192 p. ISBN 5-03-000488-2. (In Russ.).

3. Sederberg T. W., Parry S. R. Free-form deformation of solid geometric models. *ACM Siggraph Computer Graphics*. 1986. Vol. 20, no. 4. Dallas. P. 151–160. DOI: 10.1145/15886.15903.

4. Griessmair J., Purthagat W. Deformation of solids with trivariate B-splines. *Eurographic 89*. Lisbon, 1989. P. 137–148.

5. Денискин Ю. И. Обобщенные методы геометрического моделирования объектов и управления их формой при параметрическом представлении: дис. ... д-ра техн. наук. Москва, 2000. 326 с.

Deniskin Yu. I. Obobshchennyye metody geometricheskogo modelirovaniya ob'yektov i upravleniya ikh formoy pri parametricheskom predstavlenii [Generalized methods of geometric modeling of objects and control of their shape in parametric representation]. Moscow, 2000. 326 p. (In Russ.).

6. Аюшеев Т. В. Методы трехмерного моделирования и контроля процессов изготовления деталей из композиционных материалов способом намотки: дис. ... д-ра техн. наук. Нижний Новгород, 2006. 326 с.

Ayusheyev T. V. Metody trekhmernogo modelirovaniya i kontrolya protsessov izgotovleniya detaley iz kompozitsionnykh materialov sposobom namotki [Methods of three-dimensional

modeling and control of the processes of manufacturing parts from composite materials by winding]. Nizhny Novgorod, 2006. 326 p. (In Russ.).

7. Битюков Ю. И. Геометрическое моделирование технологических процессов намотки и выкладки конструкций из волокнистых композиционных материалов: дис. ... д-ра техн. наук. Омск, 2010. 332 с.

Bitukov Yu. I. Geometricheskoye modelirovaniye tekhnologicheskikh protsessov namotki i vykladki konstruktсий iz voloknistykh kompozitsionnykh materialov [Geometric modeling of technological processes of winding and laying structures made of fibrous composite materials]. Omsk, 2010. 332 p. (In Russ.).

8. Бронина Т. Н., Гасилова И. А., Ушакова О. В. Алгоритмы построения трехмерных структурированных сеток // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43, № 6. С. 875–883. EDN: OOCQSP.

Bronina T. N., Gasilova I. A., Ushakova O. V. Algoritmy postroyeniya trekhmernykh strukturirovannykh setok [Algorithms for three-dimensional structured grid generation]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki. Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2003. Vol. 43, no. 6. P. 875–883. EDN: OOCQSP. (In Russ.).

9. Đuriković R., Czanner S. Modelling with three types of Coons bodies. *International Journal of Modelling and Simulation*. 2004. Vol. 24, № 2. P. 97–101. DOI: 10.1080/02286203.2004.11442293.

10. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве / пер. с англ. Г. П. Бабенко, Г. П. Воскресенский. Москва: Мир, 1982. 304 с. ISBN 978-5-0000-0000-0.

Foks A., Pratt M. Vychislitel'naya geometriya. Primeneniye v proyektirovani i na proizvodstve [Computational geometry. Application in design and production] / trans. from Engl. by G. P. Babenko, G. P. Voskresenskiy. Moscow, 1982. 304 p. ISBN 978-5-0000-0000-0. (In Russ.).

11. Малоземов В. Н., Чашников Н. В. Параметрические поверхности Кунса // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2008. № 2. С. 16–22. EDN: KVOQBR.

Malozemov V. N., Chashnikov N. V. Parametricheskiye poverkhnosti Kunsy [Parametric Koons surfaces]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsestry upravleniya. Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2008. No. 2. P. 16–22. EDN: KVOQBR. (In Russ.).

АЮШЕЕВ Тумэн Владимирович, доктор технических наук, доцент (Россия), заведующий кафедрой «Инженерная и компьютерная графика» Восточно-Сибирского университета технологий и управления (ВСГУТУ), г. Улан-Удэ.

SPIN-код: 6408-2039

ORCID: 0000-0002-2246-1719

AuthorID (SCOPUS): 8974281900

Адрес для переписки: atv62@bk.ru

ЦЫДЫПОВ Цыбик Цырендоржиевич, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры «Самолето-вертолетостроение» ВСГУТУ, г. Улан-Удэ.

SPIN-код: 8241-7027

AuthorID (РИНЦ): 17361

Адрес для переписки: sssibik@mail.ru

ФИЛИПОВА Ксения Анатольевна, старший преподаватель кафедры «Самолето-вертолетостроение» ВСГУТУ, г. Улан-Удэ.

SPIN-код: 4469-6708

AuthorID (РИНЦ): 739711

Адрес для переписки: ipq84@mail.ru

Прозрачность финансовой деятельности: авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.

Статья поступила в редакцию 20.11.2025; одобрена после рецензирования 12.12.2025; принята к публикации 29.12.2025.

AYUSHEEV Tumen Vladimirovich, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Engineering and Computer Science Graphics Department, East Siberia State University of Technology and Management (ESSUTM), Ulan-Ude.

SPIN-code: 6408-2039

ORCID: 0000-0002-2246-1719

AuthorID (SCOPUS): 8974281900

Correspondence address: atv62@bk.ru

TSYDYPOV Tsybik Tsyrendorzhievich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate

Professor of the Aircraft and Helicopter Industry Department, ESSUTM, Ulan-Ude.

SPIN-code: 8241-7027

AuthorID (RSCI): 17361

Correspondence address: sssibik@mail.ru

FILIPPOVA Kseniya Anatolyevna, Senior Lecturer of the Aircraft and Helicopter Industry Department, ESSUTM, Ulan-Ude.

SPIN-code: 4469-6708

AuthorID (RSCI): 739711

Correspondence address: ipq84@mail.ru

Financial transparency: the authors have no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.

The article was submitted 20.11.2025; approved after reviewing 12.12.2025; accepted for publication 29.12.2025.

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ ТВЕРДЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Д. И. Чернявский

Омский государственный технический университет, Россия, 644050, г. Омск, пр. Мира, 11

Статья является продолжением изучения динамических зависимостей между силой и глубиной внедрения конических инденторов в преграды. Индентором является цилиндр с заостренной конической частью. Инденторы и преграды изготовлены из стали. В результате оцифровки графиков исследуемых зависимостей получены интерполяционные формулы распределения энергий упругих и пластических деформаций в контактной зоне. В отличие от предыдущей публикации, где рассматривались три варианта угла заострения конической головной части индентора, в данной работе значительно увеличен диапазон изменения данных углов.

Полученные результаты можно использовать при проектировании составных многостержневых пуансонов и матриц для обработки листовых материалов давлением, а также при разработке силовых и геометрических параметров ударных инструментов для гидромолотов.

Ключевые слова: упругие и пластические деформации, ударная сила, цилиндрический индентор с конической головной частью, технология бесформенной многоточечной формовки, разрушение горных пород, инструменты для гидромолота.

Для цитирования: Чернявский Д. И. Исследование упругопластических деформаций при динамическом взаимодействии двух твердых деформируемых тел // Омский научный вестник. 2026. № 1 (197). С. 15–22. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-15-22. EDN: TTVFLD.



© Чернявский Д. И., 2026.

Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

STUDY OF ELASTOPLASTIC DEFORMATIONS IN THE DYNAMIC INTERACTION OF TWO RIGID DEFORMABLE BODIES

D. I. Chernyavsky

Omsk State Technical University, Russia, Omsk, Mira Ave., 11, 644050

The article is a continuation of the study of dynamic dependencies between force and depth of introduction of conical indenters into barriers. The indenter is a cylinder with a pointed conical part. Indenters and barriers are made of steel. As a result of digitization of graphs of investigated dependencies, interpolation formulas of distribution of energies of elastic and plastic deformations in contact zone are obtained. Unlike the previous publication, which considered three variants of the angle of sharpening of the conical head part of the indenter, in this work the range of change of these angles is significantly increased.

The obtained results can be used in the design of composite many rod punches and matrices for pressure treatment of sheet materials, as well as in the development of power and geometric parameters of impact tools for hydromolots.

Keywords: elastic and plastic deformations, impact force, cylindrical indenter with conical head part, technology of formless multipoint moulding, destruction of rocks, tools for hydromolot.

For citation: Chernyavsky D. I. Study of elastoplastic deformations in the dynamic interaction of two rigid deformable bodies. *Omsk Scientific Bulletin*. 2026. No. 1 (197). P. 15–22. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-15-22. EDN: TTVFLD.



© Chernyavsky D. I., 2026.

The content is available under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Введение

В настоящее время широко применяются различные промышленные технологии, связанные с обработкой металлов давлением. С теоретической точки зрения такая обработка металлов осуществляется за счет взаимодействия движущихся с постоянной скоростью V штампов, которые перемещаются внутрь упругих и вязкоупругих деформируемых тел (заготовок). Такие явления описывают контактные задачи теории упругости.

Рассмотрим основные теоретические работы, посвященные механике контактных взаимодействий. Коллективная монография [1] содержит обзор основных достижений по методам решения и результатам решения задач механики контактных взаимодействий деформируемых тел, полученных российскими и иностранными учеными. В другой коллективной монографии ученых США [2] кратко изложены основные фундаментальные положения отдельных разделов контактной теории — динамики удара. Рассмотрены главные физико-механические аспекты сопровождающих удар явлений в разных диапазонах скоростей удара и разработанные к настоящему времени методы теоретического и экспериментального исследования поставленных задач. Монография А. Ю. Ишлинского и др. [3] посвящена математической теории пластичности, где авторы изложили результаты, имеющие теоретическое и практическое значение для разработки технологических процессов обработки материалов давлением.

В работе [4] М. И. Лысов и др. приводят основные положения теории процессов обработки материалов давлением, а также теоретические и экспериментальные исследования различных технологических операций.

В монографии [5] Е. И. Шемякин рассматривает процессы колебаний и вибраций в твердых телах, описываемые дифференциальными уравнениями динамики сплошной среды и упругими, нелинейно-упругими, упругопластическими связями; также исследуются основные закономерности динамических контактных процессов в массивных твердых телах. С. П. Тимошенко и Дж. Гудьер в работе [6] рассматривают различные классы задач механики контактных взаимодействий упругопластических тел, а также приводит методы решения конкретных типов задач механики твердого тела.

С практической точки зрения наибольший интерес представляет случай взаимодействия тел, имеющих контактные поверхности в виде совокупности кривых линий. В общем виде дифференциальные уравнения, описывающие перемещения и напряжения для данного случая, решаются с помощью полных эллиптических интегралов, значения которых приведены в специальных математических таблицах.

С технологической точки зрения наиболее просто изготовить криволинейные поверхности в виде сфер либо в виде цилиндров. Соответственно, касание таких поверхностей будет происходить либо в точке, либо в виде прямой линии. При этом контактную поверхность в виде полуплоскости можно рассматривать как сферу, имеющую бесконечно большой радиус. Впервые данную задачу решил Г. Герц в работе [7]. В публикации [8] приведены результаты различных исследований контактной задачи для определения осесимметричных напряжений и деформаций для различных условий нагружения двух тел.



Рис. 1. Техническое обслуживание пресса для многоточечной формовки [9]
Fig. 1. Multipoint press maintenance [9]

В настоящее время появилась новая технология для обработки листовых металлических заготовок давлением, которая получила название — технология бесформенной многоточечной формовки. В данном случае формующие поверхности матрицы и штампа образуются с помощью равномерно расположенных рядов, регулируемых по высоте стержней. В режиме реального времени система управления работой пресса индивидуально регулирует высоту каждого такого стержня. В результате штамповки формируется сложная трехмерная поверхность обрабатываемого листа или пластины. При необходимости оператор пресса может с помощью программных средств перестроить высоту каждого стержня и получить пресс-форму для изготовления другой листовой детали (рис. 1) [9].

Для повышения точности пресс-формы многоточечного пресса перспективным путем является увеличение количества стержней в этой пресс-форме. Для этого необходимо уменьшить поперечные сечения стержней, а их рабочие торцевые поверхности выполнить в виде конусов с углом при вершине β .

Для указанного случая использование теории Герца невозможно, так как конический индентор внедряется во второе тело гораздо глубже, чем сферический индентор. Данный факт существенно изменяет исходные дифференциальные уравнения, поэтому необходимо рассмотреть иной подход к решению данной контактной задачи.

А. G. Atkins и др. в работе [10] изучают вдавливание алмазных конусов в образцы из различных видов стали. Исследователи экспериментально нашли соотношения между величинами углов при вершине конусного индентора и распределением поля напряжений в исследуемом образце. М. E. Backman и др. в публикации [11] исследуют проникновение конических инденторов в стальные и дюралюминиевые пластины различной толщины. Рассмотрены различные эмпирические соотношения для исследуемого ударного взаимодействия, а также применяемые в ходе исследования численные и экспериментальные методы. В статье [12] N. A. Stilwell и др. исследуют изменение формы конического индентора, который внедряется в упругопластическое пространство. Путем исследования оставшегося отпечатка авторы определяют энергию упругих и пластических деформаций при ударе.

В работе [13] В. Гольдсмит и др. изучают прочность сланца, известняка и диорита на действие ударных нагрузок, возбуждаемых длинномерными стержнями, имитирующими буровой инстру-

Таблица 1. Обозначения в формулах
Table 1. Symbols in formulae

Символы	Описание	Размерность
F	Контактная сила	Н
β	Угол заострения конической головной части индентора	градус
h	Длина индентора	мм
a	Величина сближения контактирующих тел	мм
n_y	Величина доли энергии упругих деформаций в зоне контакта индентора и преграды	—
n_n	Величина доли энергии пластических деформаций в зоне контакта индентора и преграды	—
η	Коэффициент передачи кинетической энергии	—
k	Коэффициент восстановления	—
V_1	Скорость индентора до удара	м/с
V_2	Скорость преграды до удара	м/с
U_1	Скорость индентора после удара	м/с
U_2	Скорость преграды после удара	м/с
m_1	Масса индентора	кг
m_2	Масса преграды, охваченная волной сжатия, в конце ударного процесса	кг
θ_{12}	Угол между направлениями продольных осей симметрии индентора и преграды	
R	Коэффициент детерминации, определяющий достоверность интерполяции. Чем ближе величина R^2 к единице, тем достовернее интерполяция	

мент. Ударные концы стержней имели конусную и клиновидную форму и были заострены на 60° , 90° и 120° . Были получены данные о том, что для каждого угла заострения существуют оптимальные величины кинетической энергии удара, при которых испытуемая порода имеет наибольшие разрушения. Авторы публикации [14] рассматривают динамический процесс удара конического пробойника о пластину, лежащую на упругом основании. Ударное взаимодействие описывается с помощью аналитических уравнений. Решения данных уравнений, полученные с помощью преобразований Фурье, сравниваются с численными решениями по методу конечных элементов. В работе [15] предлагается метод численного расчета параметров текучести исследуемого материала при внедрении в образец конического индентора, имеющего различные углы заострения конуса его вершины. По результатам испытаний определялся коэффициент трения при динамическом внедрении конического индентора в исследуемый материал. В публикации [16] F. Lockett проводил аналитические и численные исследования внедрения конусных инденторов в упругопластическое полупространство. Были получены результаты, совпадающие с экспериментальными исследованиями, для конусов, имеющих угол при вершине — 180° (плоский пуансон), 160° , 140° , 120° и 105° . При углах вершины конуса меньших, чем приведенные углы, результаты исследований существенно отличались от экспериментальных данных.

Практика, связанная с обработкой металлов давлением, показала, что вершина конической заостренной части индентора затупляется в ходе его эксплуатации, т. е. ее форма приближается к эллипсоидной криволинейной поверхности с двумя радиусами кривизны.

Таким образом, целесообразно разделить данное исследование на два этапа:

1. Изучение удара инденторов с коническими вершинами с различными углами при вершине.

2. Исследование процесса ударного взаимодействия индентора, который имеет коническую рабочую часть со сферически закругленной вершиной. Данное исследование будет описано в следующей публикации.

Обозначения физических величин, принятых в данной статье, приведены в табл. 1.

Постановка задачи

Рассмотрим более простой вариант исследования. В работах [17–18] изучались процессы ударного взаимодействия конических инденторов с заостренной вершиной (рис. 2).

Рис. 2 показывает динамические зависимости сила — глубина внедрения для случаев удара цилиндрических стержней из отожженной инструментальной стали постоянной массы $m = 10,8$ г с головной частью в виде конуса с различными углами при вершине по преграде, изготовленной из того же материала. Начальная скорость индентора равна $60,8$ м/с. Диаметр стержней с конической головной частью, а также преграды составляет $9,53$ мм. На рис. 2 приведены номера опытов, проведенных с инденторами, имеющими соответствующие углы заострения конической головной части: $75 - \beta = 160^\circ$; $76 - \beta = 120^\circ$; $77 - \beta = 90^\circ$; $78 - \beta = 80^\circ$; $79 - \beta = 60^\circ$; $80 - \beta = 40^\circ$; $81 - \beta = 20^\circ$.

Принципиальная схема удара индентора о преграду показана на рис. 3.

В начале ударного процесса контакт индентора и преграды происходит в точке А. В ходе удара в соприкасающихся телах распространяется ударная волна сжатия, имеющая сферический фронт. Для понимания, на рис. 3 волна показана в виде круга. На самом деле данная волна распространяется только в инденторе и в преграде (заштрихова-

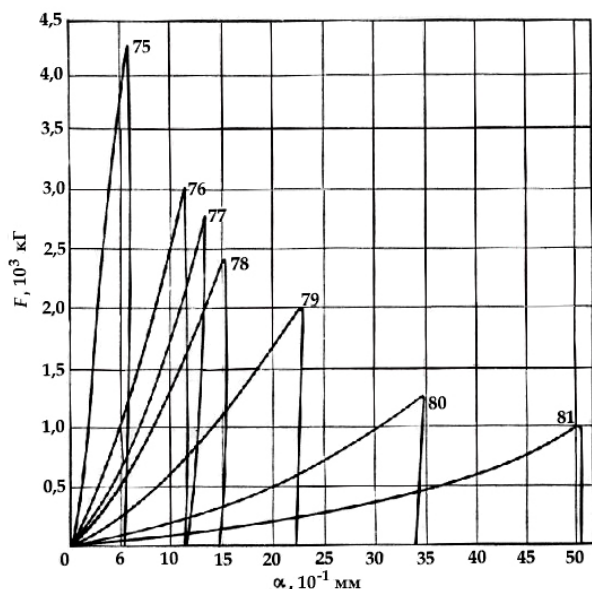


Рис. 2. Динамические зависимости сила–глубина внедрения для случаев удара конических цилиндрических инденторов о преграду, [17]. Начальная скорость индентора равна 60,8 м/с.

Индентор и преграда изготовлены из отожженной стали
Fig. 2. Dynamic force dependencies–depth of introduction for cases of impact of conical cylindrical indenters on the barrier, [17].

The initial indenter speed is 60.8 m/s. Indenter and barrier are made of annealed steel

но). Когда волна сжатия достигнет точки В, в зоне контакта будет действовать максимальная ударная сила.

Во второй половине удара волна сжатия в инденторе отразится от его свободного торца, и в материале индентора начнет распространяться разгрузочная волна растяжения. Когда данная волна достигнет точки контакта А, ударный процесс завершится, и индентор в зависимости от конкретной ситуации либо отсоединится от преграды, либо останется в ней. В любом случае, процесс обмена энергией между двумя телами завершится.

Одновременно в материале преграды будет продолжаться распространяться ударная волна сжатия. Так как длина преграды больше, чем длина индентора, то в момент окончания удара стержень преграды будет сжат.

В работе [19] приводится вывод уравнения связи законов сохранения энергии и механического импульса, а также уравнения коэффициента восстановления:

$$\eta = \frac{m_1^2 V_1^2 + m_2^2 V_2^2 + 2m_1 m_2 V_1 V_2 \cos(\theta_{12})}{(m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2)(m_1 + m_2)} + \frac{m_1 m_2 k^2 (V_1^2 - 2V_1 V_2 \cos(\theta_{12}) + V_2^2)}{(m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2)(m_1 + m_2)}; \quad (1)$$

$$\eta = \frac{m_1 U_1^2 + m_2 U_2^2}{m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2}; \quad (2)$$

$$k = \frac{U_2 - U_1}{V_1 - V_2}. \quad (3)$$

Для рассматриваемого случая удара скорость преграды до удара $V_2 = 0$ и угол $\theta_{12} = 0$. С учетом этих данных запишем выражение (1) как

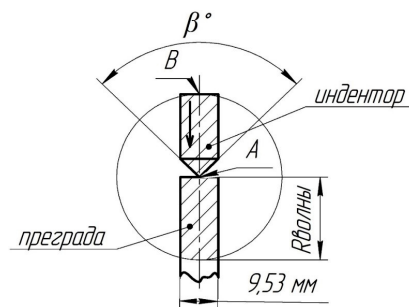


Рис. 3. Схема удара индентора о преграду (первая половина удара)

Fig. 3. Diagram of indenter impact on obstacle (first half of impact)

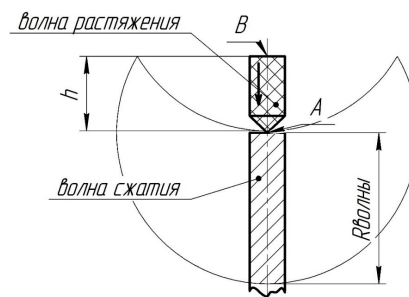


Рис. 4. Схема удара индентора о преграду (вторая половина удара)

Fig. 4. Diagram of indenter impact on obstacle (second half of impact)

$$\eta = \frac{m_1^2 V_1^2 + m_1 m_2 k^2 V_1^2}{m_1 V_1^2 (m_1 + m_2)}. \quad (4)$$

Введем в уравнение (4) выражение $m = m_2 / m_1$:

$$\eta = \frac{V_1^2 + m k^2 V_1^2}{V_1^2 (1 + m)} = \frac{1 + m k^2}{1 + m}. \quad (5)$$

Выражение (5) устанавливает связь между законом сохранения энергии и коэффициентом восстановления.

Как отмечено в работе [20], величина коэффициента восстановления k не является характеристикой материала соударяющихся тел, а зависит только от их жесткости при ударе. Определение величины коэффициента восстановления k на основании имеющейся к настоящему времени теоретической и практической научной базы по теории удара позволяет оценить упругопластические деформации в зоне ударного контакта двух тел. Определение таких деформаций необходимо для проектирования технологий холодной обработки материалов давлением.

Исходя из выражения (5), можно определить два крайних граничных условия при ударе двух тел: 1) $k = 1$, $\eta = 1$ и 2) $k = 0$, $\eta = 0$. Определим величины коэффициентов восстановления для экспериментов, приведенных на рис. 2.

Для этого рассмотрим публикацию [21], в которой автор разработал методику оцифровки и анализа динамических и статических зависимостей между силой и глубиной внедрения конических инденторов в преграды. Индентором являлся цилиндр с заостренной конической частью (рис. 3 и 4).

Таблица 2. Силовые и энергетические характеристики взаимодействия индентора из отожжённой инструментальной стали с преградой из того же материала. Головная часть индентора изготовлена в виде конуса с различными углами при вершине (см. рис. 2)

Table 2. Power and energy characteristics of indenter interaction from annealed tool steel with barrier from the same material. The head of the indenter is made in the form of a cone with different angles at the vertex (Fig. 2)

№ опыта	Угол β , градус	Максимальная сила — $F_{\max}$, Н	Остаточное сближение — α , мм	Энергия упругих деформаций — A_y , Дж	Энергия пластических деформаций — A_n , Дж	Доля энергии упругих деформаций $n_y = \frac{A_y}{A_y + A_n}$	Доля энергии пластических деформаций $n_n = \frac{A_n}{A_y + A_n}$
Энергия удара индентора — $A = 19,962$ Дж							
75	160	41675	0,540	1,282	14,661	0,081	0,919
76	120	29685	1,08	1,184	14,759	0,074	0,926
77	90	27190	1,276	1,060	14,883	0,065	0,934
78	80	23496	1,473	0,985	14,958	0,062	0,938
79	60	19613	2,225	0,927	15,016	0,048	0,952
80	40	12391	3,392	0,505	15,437	0,032	0,968
81	20	10202	5,041	0,099	15,844	0,006	0,994

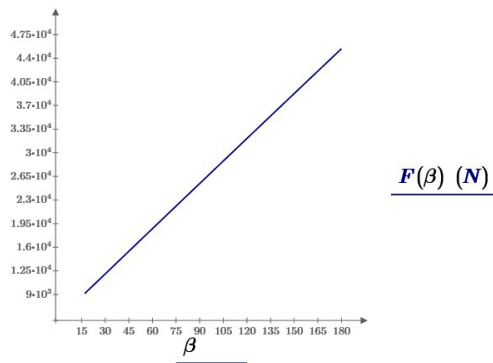


Рис. 5. График зависимости максимальной силы удара $F_{\max}$ от величины угла конуса β
Fig. 5. Maximum impact force $F_{\max}$ vs cone angle β

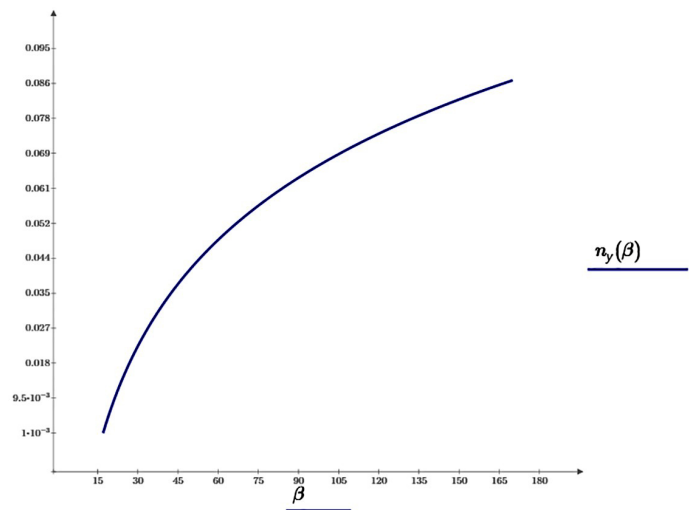


Рис. 6. График зависимости величины доли энергии упругих деформаций в зоне контакта индентора и преграды n_y от величины угла конуса β
Fig. 6. Plot of elastic strain energy fraction in the indenter and barrier contact zone n_y vs cone angle β

Применим данную методику для изучения графиков, приведенных на рис. 2. Результаты анализа показаны в табл. 2.

Как видно из табл. 2, величина энергии упругой деформации A_y уменьшается при уменьшении угла β . Определим интерполяционные функции $F_{\max}$ и n_y , которые описывают данные, приведенные в табл. 2.

$$F_{\max} = 5336 + 224,3\beta - 9,2 \cdot 10^{-3}\beta^2, \text{ Н}, R^2 = 0,979; \quad (6)$$

$$n_y = 2026 \cdot \beta^{1,837 \cdot 10^{-5}} - 2026, R^2 = 0,993. \quad (7)$$

Графики уравнений (6) и (7) приведены на рис. 5 и 6.

Аналогично можно получить уравнение зависимости коэффициента n_y от величины силы F , выражение (8):

$$n_y = -0,043 + 6,216 \cdot 10^{-6}F - 7,816 \cdot 10^{-11}F^2. \quad (8)$$

На основании графиков на рис. 5 и 6 введем допущение о том, что зависимость максимальной силы удара $F_{\max}$ от величины угла конуса β является линейной функцией. Кроме этого, примем, что

форма графиков на данных рисунках останется неизменной для различных скоростей удара конического индентора о преграду. Допущение о неизменности графиков означает, что вторые и третьи члены уравнений (6) – (9) остаются неизменными, а первый постоянный член каким-то образом изменяется.

Исходя из данных предположений, найдем интерполяционную функцию, аналогичную выражению (6):

$$F_{\max} = 5391 + 223\beta, \text{ Н}, R^2 = 0,978. \quad (9)$$

Для практического применения выражений (6) – (9) используем представленную ниже методику. В работе [21] приведены интерполяционные выражения для случаев удара инденторов с тремя различными вариантами величин угла конуса β (табл. 3).

1. Для диапазона углов конуса $90^\circ \leq \beta \leq 160^\circ$ используем следующие уравнения табл. 3:

$$F = -357,023 + 613,353V + 0,11V^2, \text{ Н};$$

$$n_y = 0,223 - 1,217 \cdot 10^{-3}V - 1,772 \cdot 10^{-5}V^2.$$

Таблица 3. Интерполяционные функции для расчета силы и относительной величины энергии упругих деформаций в зоне контакта конического индентора и наковальни при ударе и статическом нагружении

Table 3. Interpolation functions for calculation of force and relative value of elastic deformation energy in the contact zone of conical indenter and anvil during impact and static loading

Вид интерполяционной функции		Диапазоны изменения скорости удара V (м/с) и силы F (Н)	Коэффициент детерминации R^2
Взаимодействие — сталь по стали, $\beta = 120^\circ$			
Динамика	$F = -357,023 + 613,353V + 0,11V^2$	$20,4 \leq V \leq 57,4$	0,999
	$n_y = 0,223 - 1,217 \cdot 10^{-3}V - 1,772 \cdot 10^{-5}V^2$		0,998
	$n_y = 0,212 - 1,172 \cdot 10^{-6}F - 6,410 \cdot 10^{-11}F^2$	$1 \cdot 10^4 \leq F \leq 4 \cdot 10^4$	0,990
Статика	$n_y = 0,290 + 3,157 \cdot 10^{-7}F - 1,384 \cdot 10^{-10}F^2$	$7 \cdot 10^3 \leq F \leq 4 \cdot 10^4$	0,961
Взаимодействие — сталь по стали, $\beta = 60^\circ$			
Динамика	$F = 275,15 + 203,001V + 1,974V^2$	$22,5 \leq V \leq 74,0$	0,997
	$n_y = 0,12 - 1,512 \cdot 10^{-3}V + 5,798 \cdot 10^{-6}V^2$		0,999
	$n_y = 0,122 - 5,806 \cdot 10^{-6}F + 9,892 \cdot 10^{-11}F^2$	$5 \cdot 10^3 \leq F \leq 3 \cdot 10^4$	0,995
Статика	$n_y = 0,072 - 5,914 \cdot 10^{-7}F - 1,936 \cdot 10^{-11}F^2$	$5 \cdot 10^3 \leq F \leq 3 \cdot 10^4$	0,996
Взаимодействие — сталь по стали, $\beta = 20^\circ$			
Динамика	$F = 17,68 + 52,57V + 1,321V^2$	$38,6 \leq V \leq 84,0$	0,999
	$n_y = 0,103 - 1,526 \cdot 10^{-3}V + 4,215 \cdot 10^{-6}V^2$		0,996
	$n_y = 0,087 - 6,045 \cdot 10^{-6}F + 1,823 \cdot 10^{-10}F^2$	$4 \cdot 10^3 \leq F \leq 1,4 \cdot 10^4$	0,986
Статика	$n_y = 0,145 + 1,22 \cdot 10^{-7}F - 3,047 \cdot 10^{-10}F^2$	$6 \cdot 10^3 \leq F \leq 1,1 \cdot 10^4$	0,997

Допустим, что удар происходит при скорости $V = 40$ м/с. Тогда получим следующие численные величины: $F = 24353$ Н и $n_y = 0,146$. Для определения первого постоянного члена в уравнениях (7) и (9) используем следующий прием:

$$24350 = \text{const}_1 + 223 \cdot 120, \text{const}_1 = -2410. \quad (10)$$

Тогда для рассматриваемого диапазона углов β выражение 10 будет

$$F_{\max} = -2410 + 223\beta, \text{Н}. \quad (11)$$

Аналогично определим коэффициент n_y :

$$0,146 = 2026 \cdot 120^{1,837 \cdot 10^{-5}} + \text{const}_2, \\ \text{const}_2 = -2026,032. \quad (12)$$

Тогда для рассматриваемого диапазона углов β выражение 11 будет

$$n_y = 2026 \cdot \beta^{1,837 \cdot 10^{-5}} - 2026,032. \quad (13)$$

2. Для диапазона углов конуса $40^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ используем следующие уравнения табл. 3:

$$F = 275,15 + 203,001V + 1,974V^2, \text{Н};$$

$$n_y = 0,12 - 1,512 \cdot 10^{-3}V + 5,798 \cdot 10^{-6}V^2.$$

Допустим, что удар происходит при скорости $V = 40$ м/с. Тогда получим следующие численные величины: $F = 11550$ Н и $n_y = 0,069$.

Для определения первого постоянного члена в уравнениях (7) и (9) используем следующий прием:

$$11550 = \text{const}_3 + 223 \cdot 60, \text{const}_3 = -1830. \quad (14)$$

Тогда для рассматриваемого диапазона углов β выражение (12) будет

$$F_{\max} = -1830 + 223\beta, \text{Н}. \quad (15)$$

Аналогично определим коэффициент n_y :

$$0,069 = 2026 \cdot 60^{1,837 \cdot 10^{-5}} + \text{const}_4, \\ \text{const}_4 = -2926,083. \quad (16)$$

Тогда для рассматриваемого диапазона углов β выражение (13) будет

$$n_y = 2026 \cdot \beta^{1,837 \cdot 10^{-5}} - 2026,083. \quad (17)$$

3. Для диапазона углов конуса $10^\circ \leq \beta \leq 40^\circ$ используем следующие уравнения табл. 3:

$$F = 17,68 + 52,57V + 1,321V^2, \text{Н};$$

$$n_y = 0,103 - 1,526 \cdot 10^{-3}V + 4,215 \cdot 10^{-6}V^2.$$

Допустим, что удар происходит при скорости $V = 40$ м/с. Тогда получим следующие численные величины: $F = 4232$ Н и $n_y = 0,049$.

Для определения первого постоянного члена в уравнениях (7) и (9) используем следующий прием:

$$4232 = \text{const}_5 + 223 \cdot 20, \text{const}_5 = -228. \quad (18)$$

Тогда для рассматриваемого диапазона углов β выражение (12) будет

$$F_{\max} = -228 + 223 \cdot \beta, \text{Н}. \quad (19)$$

Аналогично определим коэффициент n_y :

$$0,049 = 2026 \cdot 20^{1,837 \cdot 10^{-5}} + \text{const}_6, \\ \text{const}_6 = -2026,062. \quad (20)$$

Тогда для рассматриваемого диапазона углов β выражение (13) будет

Таблица 4. Расчетные значения параметров удара индентора о преграду при скорости индентора 40 м/с
Table 4. Design values of indenter impact parameters on the obstacle at indenter speed of 40 m/s

$\beta, ^\circ$	160	120	90	80	60	40	20	10
$F, \text{ Н}$	33270	24350	18240	16010	11550	8692	4232	2002
η	0,118	0,110	0,083	0,060	0,052	0,041	0,027	0,018
k	0,319	0,306	0,292	0,228	0,187	0,123	0,064	≈ 0

$$n_y = 2026 \cdot \beta^{1,837 \cdot 10^{-5}} - 2026,062. \quad (21)$$

Вновь обратимся к выражению (5). Из данного уравнения видно, что величина коэффициента восстановления k уменьшается при уменьшении угла β . Введем допущение, что при величине угла β , равной 10° , коэффициент восстановления k близок к нулю. Тогда из уравнения (5) можно определить значение коэффициента m и, соответственно, величину массы m_2 .

Сначала определим величину коэффициента n_y . Для рассматриваемой величины скорости удара получим выражение:

$$n_y = 2026 \cdot \beta^{1,837 \cdot 10^{-5}} - 2026,062, \quad n_y = 0,018.$$

Далее определим взаимосвязь между коэффициентами n_y и η . Как показал анализ библиографических источников, энергия удара в конечном счете затрачивается на энергии формирования упругих и пластических деформаций в зоне контакта двух тел, на формирование в телах продольных, поперечных и поверхностных ударных волн Рэлея, а также на повышение температуры тел. По разным оценкам суммарная энергия упругих и пластических деформаций составляет 70–80 % от первоначальной энергии удара. Примем, что для рассматриваемого случая данная энергия составит 75 %. Тогда получим следующие выражения:

$$n_y = \frac{A_y}{A_y + A_n} = \frac{A_y}{0,75A}, \quad (22)$$

$$0,75n_y = \frac{A_y}{A} = \eta, \quad \eta = 0,75 n_y. \quad (23)$$

С учетом выражения (17) определим величину относительной массы m из уравнения (5):

$$\eta = 0,75n_y = 0,75 \cdot 0,024 = 0,018, \quad k = 0;$$

$$m = \frac{1}{\eta} - 1 = 55.$$

Данное выражение показывает, что при массе индентора $m_1 = 10,8$ г, масса преграды, которая участвует в ударном процессе, равна $m_2 = 596,8$ г.

Для определения величины коэффициента восстановления k преобразуем уравнение (5):

$$k = \sqrt{\frac{\eta(1+m)-1}{m}}. \quad (24)$$

Для вычисления коэффициента восстановления k и определения ударных сил для всего рассматриваемого диапазона углов β необходимо использовать выражения (11), (13), (15), (17), (19), (21). Результаты расчетов приведены в табл. 4.



Рис. 7. Дробление негабаритов пикой гидромолота при производстве гранитного щебня в карьере
Fig. 7. Crushing of oversize rock by hydromolot peak during production of granite crushed stone in the quarry

На основании данных табл. 4 можно сделать вывод, что при уменьшении угла заострения конусной головной части индентора при одинаковой энергии удара значения ударной силы F , коэффициента восстановления кинетической энергии η и коэффициента восстановления k также уменьшаются.

Выводы и заключение

При анализе полученных данных из табл. 4 можно сделать следующие выводы:

1. Получена методика определения параметров удара при средних скоростях соударения индентора и преграды для различных углов заострения конусной головной части индентора.
2. Полученные данные необходимо использовать при проектировании рабочей части пика гидромолотов при разрушении строительных и горных пород, для дробления негабаритов, рис. 7.
3. Предполагается далее проанализировать величины упругих и пластических деформаций в контактной зоне конического индентора и наковальни для случаев, когда вершины конических инденторов имеют закругления различного радиуса.

Список источников / References

1. Айзикович С. М., Александров В. М., Аргатов И. И. [и др.]. Механика контактных взаимодействий. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 670 с. ISBN 5-9221-0154-4. EDN: RIVBHQ.
Ayzikovich S. M., Aleksandrov V. M., Argatov I. I. [et al.]. Mekhanika kontaknykh vzaimodeystviy [Mechanics of

contact interactions]. Moscow, 2001. 670 p. ISBN 5-9221-0154-4. EDN: RIVBHQ. (In Russ.).

2. Зукас Д. А., Николас Т., Свифт Х. Ф. [и др.]. Динамика удара: моногр. Москва: Мир, 1985. 296 с.

Zukas D. A., Nikolas T., Swift Kh. F. [et al.]. Dinamika udara [Impact dynamics]. Moscow, 1985. 296 p. (In Russ.).

3. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. Москва: Физико-математическая литература, 2001. 704 с. ISBN 5-9221-0141-2. EDN: TQYAQT.

Ishlinskiy A. Yu., Ivlev D. D. Matematicheskaya teoriya plastichnosti [Mathematical theory of plasticity]. Moscow, 2001. 704 p. ISBN 5-9221-0141-2. EDN: TQYAQT. (In Russ.).

4. Лысов М. И., Сосов Н. В. Формообразование деталей гибкой. Москва: Машиностроение, 2001. 388 с. ISBN 5-217-03105-0.

Lysov M. I., Sosov N. V. Formoobrazovaniye detaley gibkoy [Shaping of flexible parts]. Moscow, 2001. 388 p. ISBN 5-217-03105-0. (In Russ.).

5. Шемякин Е. И. Динамические задачи теории упругости и пластичности: монограф. 2-е изд., доп. и перераб. Москва: НИЦ ГПИ ИГД им. А. А. Скочинского, 2007. EDN: QJRTET.

Shemyakin E. I. Dinamicheskiye zadachi teorii uprugosti i plastichnosti [Dynamic problems of the theory of elasticity and plasticity]. 2nd ed., expanded and revised. Moscow, 2007. EDN: QJRTET. (In Russ.).

6. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости / пер. с англ. М. И. Рейтмана; под ред. Г. С. Шапиро. Москва: Наука, 1975. 576 с.

Timoshenko S. P., Gud'yer Dzh. Teoriya uprugosti [Theory of elasticity] / trans. from Engl. M. I. Reytman / Ed. by G. S. Shapiro. Moscow, 1975. 576 p. (In Russ.).

7. Herz H. Gesammelte Werke. Band 1. Schriften vermischten inhalts. Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1895. S. 155.

8. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости / пер. с англ. М. И. Рейтмана; под ред. Г. С. Шапиро. Москва: Наука, 1975. 576 с.

Timoshenko S. P., Gud'yer Dzh. Teoriya uprugosti [Theory of elasticity] / trans. from Engl. M. I. Reytman; ed. by G. S. Shapiro. Moscow, 1975. 576 p. (In Russ.).

9. Upendra K., Akhil U. Buckling load prediction of laminated composite stiffened panels subjected to in-plane shear using ANN. *International Journal of Composites Science and Technology*. 2007. Vol. 102. P. 158–164. DOI: 10.1016/j.tws.2016.01.025.

10. Atkins A. G., Tabor D. Plastic indentation in metals with cones. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1965. Vol. 13. P. 149–164. DOI: 10.1016/0022-5096(65)90018-9.

11. Backman M., Goldsmith W. The mechanics of penetration of projectiles into targets. *International Journal of Engineering Science*. 1978. Vol. 16. P. 1–99. DOI: 10.1016/0020-7225(78)90002-2.

12. Stilwell N. A., Tabor D. Elastic recovery of conical indentation. *Proceedings of the Physical Society*. 1961. Vol. 78. P. 169–179. DOI: 10.1088/0370-1328/78/2/302.

13. Goldsmith W., Wu W. Response of rocks to impact loading by bars with pointed ends. *Rock Mechanics*. 1981. Vol. 13. P. 157–184. DOI: 10.1007/BF01239036.

14. Beskopylny A., Veremeenko A., Kadomtseva E., Shilov A. Dynamic response of a plate laying on elastic base during the impact of f conical indenter. *MATEC Web of Conferences*. 2018. Vol. 196. P. 01001. DOI: 10.1051/mateconf/201819601001.

15. Ganneau F., Constantinides G., Ulm F.-J. Dual-indentation technique for the assessment of strength properties of cohesive-frictional materials. *International Journal of Solids and Structures*. 2006. Vol. 43. P. 1727–1745. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.03.035.

16. Lockett F. J. Indentation of a rigid plastic material by a conical indenter. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1963. Vol. 11. P. 345–355. DOI: 10.1016/0022-5096(63)90035-8.

17. Goldsmith W., Yew C.-H. Penetration of Conical indenters into plane metal surfaces. *Proceedings of the 4th U. S. National Congress of Applied Mechanics*. 1962. Vol. 1. P. 177–188.

18. Tang W. The penetration of conical indenters with hemispherical tips into plane metal surfaces: Thesis (M.S.). University of California. Berkeley, 1962.

19. Chernyavsky D. I., Gapon D. D. The relationship between the laws of conservation of energy and momentum for low speed impact of several bodies. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 9, no. 2. P. 259–271. DOI: 10.5890/JAND.2020.06.008.

20. Johnson K. L. Contact mechanics. University of Cambridge, Cambridge University Press, 1985. 462 p. DOI: 10.1017/CBO9781139171731.

21. Чернявский Д. И. Исследование упругопластических деформаций при статическом и динамическом взаимодействии двух твердых деформируемых тел. Индентор имеет коническую головную часть // Омский научный вестник. 2025. № 2 (194). С. 5–17. DOI: 10.25206/1813-8225-2025-194-5-17. EDN: JXBIZZ.

Chernyavskiy D. I. Issledovaniye uprugoplasticheskikh deformatsiy pri staticheskom i dinamicheskom vzaimodeystvii dvukh tverdykh deformiruyemykh tel. Indentor imeyet konicheskuyu golovnyuyu chast' [Study of elastoplastic deformations at static and dynamic interaction of two solid deformable bodies. Indenter has conical head part]. *Omskiy nauchnyy vestnik. Omsk Scientific Bulletin*. 2025. No. 2 (194). P. 5–17. DOI: 10.25206/1813-8225-2025-194-5-17. EDN: JXBIZZ. (In Russ.).

ЧЕРНЯВСКИЙ Дмитрий Иванович, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры «Машиноведение» Омского государственного технического университета, г. Омск.

SPIN-код: 8610-2957

AuthorID (РИНЦ): 473365

ORCID: 0000-0002-7585-433X

AuthorID (SCOPUS): 6506002416

ResearcherID: N-2038-2015

Адрес для переписки: maneg1@omgtu.ru

Прозрачность финансовой деятельности: автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.

Статья поступила в редакцию 30.09.2025; одобрена после рецензирования 28.11.2025; принята к публикации 15.12.2025.

CHERNYAVSKY Dmitry Ivanovich, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Mechanical Engineering Department, Omsk State Technical University, Omsk.

SPIN-code: 8610-2957

AuthorID (RCSI): 473365

ORCID: 0000-0002-7585-433X

AuthorID (SCOPUS): 6506002416

ResearcherID: N-2038-2015

Correspondence address: maneg1@omgtu.ru

Financial transparency: the author has no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.

The article was submitted 30.09.2025; approved after reviewing 28.11.2025; accepted for publication 15.12.2025.

ВЛИЯНИЕ УРОВНЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ДЕТАЛИЗАЦИИ ЦИФРОВОГО ДВОЙНИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ НА РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

О. И. Ведяйкина, П. А. Хазов

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет,
Россия, 603000, г. Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65

В статье исследуются особенности влияния уровня геометрической детализации на точность результатов моделирования физических процессов над цифровым двойником высокотехнологичных установок. В качестве примера используется малогабаритная дозвуковая аэродинамическая труба. Проводится ряд компьютерных экспериментов с геометрическими моделями, отличающимися степенью детализации: от упрощенных до максимально полно отражающих реальную установку. Результаты компьютерного моделирования являются основой для определения оптимального варианта модели для создания наиболее точного цифрового двойника, при этом обладающего также достаточной степенью вычислительной эффективности.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, цифровой двойник, геометрическая модель, экспериментальная установка, аэродинамическая установка, геометрическая детализация.

Для цитирования: Ведяйкина О. И., Хазов П. А. Влияние уровня геометрической детализации цифрового двойника экспериментальной установки на результаты вычислительных экспериментов // Омский научный вестник. 2026. № 1 (197). С. 23–30. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-23-30. EDN: JNVTPE.



© Ведяйкина О. И., Хазов П. А., 2026.
Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

INFLUENCE OF THE GEOMETRIC DETAIL LEVEL OF THE DIGITAL TWIN OF THE EXPERIMENTAL SETUP ON THE RESULTS OF COMPUTATIONAL EXPERIMENTS

O. I. Vediaikina, P. A. Khazov

Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering,
Russia, Nizhny Novgorod, Il'inskaya St., 65, 603000

The article explores the impact of the level of geometric detail on the accuracy of modeling physical processes over a digital twin of high-tech facilities. A miniature subsonic wind tunnel is used as an example. The authors have conducted a series of computer simulations with pipe models, varying in the degree of detail: from simplified to the most detailed. By comparing the results of these simulations, the researchers aim to determine the optimal level of model detail to create the most accurate digital twin. The findings are planned to be used to make practical recommendations on the selection of suitable geometric models for the creation of digital twins intended for aerodynamic research. Thus, the aim of the work is to establish the relationship between the complexity of the geometric model and the accuracy of the results of modeling aerodynamic processes in a digital twin. The more accurate the model, the more computing resources will be required, so finding the optimal balance between accuracy and computational efficiency is a key research objective.

Keywords: computer modeling, digital twin, geometric model, experimental setup, aerodynamic setup, geometric detail.

For citation: Vediaikina O. I., Khazov P. A. Influence of the geometric detail level of the digital twin of the experimental setup on the results of computational experiments. *Omsk Scientific Bulletin*. 2026. No. 1 (197). P. 23–30. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-23-30. EDN: JNVTPЕ.



© Vediaikina O. I., Khazov P. A., 2026.
The content is available under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Введение

В настоящее время методы цифровой поддержки активно применяются для различных объектов машиностроения, таких как детали машин, приборы, аппаратура, а также сложных, уникальных и высокотехнологичных экспериментальных установок, таких, например, как аэродинамические трубы [1–6]. Эксперимент в указанных установках часто остается недостаточно изученным ввиду сложности визуализации получаемых результатов. Современные методы компьютерного моделирования способствуют разработке надежных методик и методов цифровой поддержки их жизненного цикла [7–8], которые в дальнейшем могут быть заложены в инженерную практику для проведения аэродинамических испытаний.

Одним из приоритетных направлений по разработке алгоритмов цифровой поддержки является применение цифровых двойников и цифровых моделей [9–16]. Цифровым двойником будет являться виртуальная копия реальной установки [17], объединяющая в себе геометрическую модель и физические данные с различных датчиков, характеризующих происходящие в ней процессы. Цифровой двойник позволяет отслеживать параметры, визуализировать сложные процессы и более точно анализировать результаты.

Внедрение цифровых двойников в процесс аэродинамических испытаний позволит моделировать обтекание объектов воздушными потоками с наперед заданными характеристиками, что открывает новые возможности для верификации данных реальных экспериментальных технологических установок и повышения эффективности физических экспериментов.

Методика компьютерного моделирования

Создание методики вычислительного эксперимента над стационарными объектами в аэродинамической трубе требует разработки цифрового двойника, полностью отражающего все физические процессы, для возможности отслеживания двусторонних связей при проведении испытаний в реальной и цифровой установках.

Исследуется необходимый уровень геометрической детализации цифрового двойника [18–19] дозвуковой малогабаритной вертикальной аэродинамической установки с открытой рабочей областью, расположенной в лаборатории кафедры отопления и вентиляции Нижегородского государственного архитектурно-строительного университета (рис. 1).

Диаметр основного канала составляет 1000 мм; диаметр выходного сечения — 400 мм; длина рабочей области — около 1200 мм. Общие габариты установки: высота — 3100 мм, ширина — 4400 мм. Скорость ветрового потока на выходном сечении трубы — до 12 м/с.

На основании геометрических измерений установки были замоделированы конструкция подмакетника и несколько вариаций аэродинамической установки (рис. 2). Геометрические модели отлича-

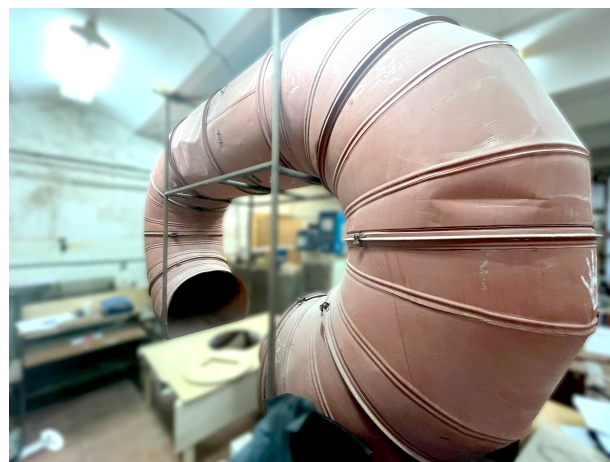


Рис. 1. Аэродинамическая труба — прототип цифрового двойника
Fig. 1. Wind tunnel is a prototype of a digital twin

ются разной степенью имитации трубы: от варианта, включающего только короткие выпуски трубы с выходным и входным сечениями, как основными элементами, необходимыми для проведения компьютерной имитации реального аэродинамического эксперимента (первый вид, рис. 2а), до модели всей конструкции трубы (четвертый вид, рис. 2г), а также промежуточные варианты. На рис. 2г видно, что в верхней части полной геометрической копии трубы имеется разрыв в месте установки осевого вентилятора, который выполнен для конструктивной возможности задания ветрового потока при выполнении компьютерного эксперимента.

Представленное вариантное решение обусловлено поиском оптимальной формы цифрового двойника, чтобы он полностью имитировал характеристики установки и её процессы, но при этом был наименее трудозатратным при выполнении цифровых испытаний. У всех видов компьютерных геометрических моделей, в том числе и первом с короткими выпусками, учитывалось геометрическое несовершенство установки, такое как небольшое отклонение в параллельности плоскостей входного и выходного отверстий. При этом для более полной оценки необходимости моделирования цифрового двойника с высокой геометрической точностью на одной модели (четвертый вариант целой трубы) были рассмотрены два варианта входного сечения: повторяющие реальное — непараллельное с выходным и упрощенное — идеализированный вариант без учета существующей скошенности (рис. 3), как ещё один показатель уровня геометрической детализации.

Компьютерное моделирование аэродинамического эксперимента проводилось в программном комплексе ANSYS с использованием модуля вычислительной гидрогазодинамики ANSYS CFX [20], препроцессора ANSYS Meshing и рабочей среды программного обеспечения ANSYS Workbench.

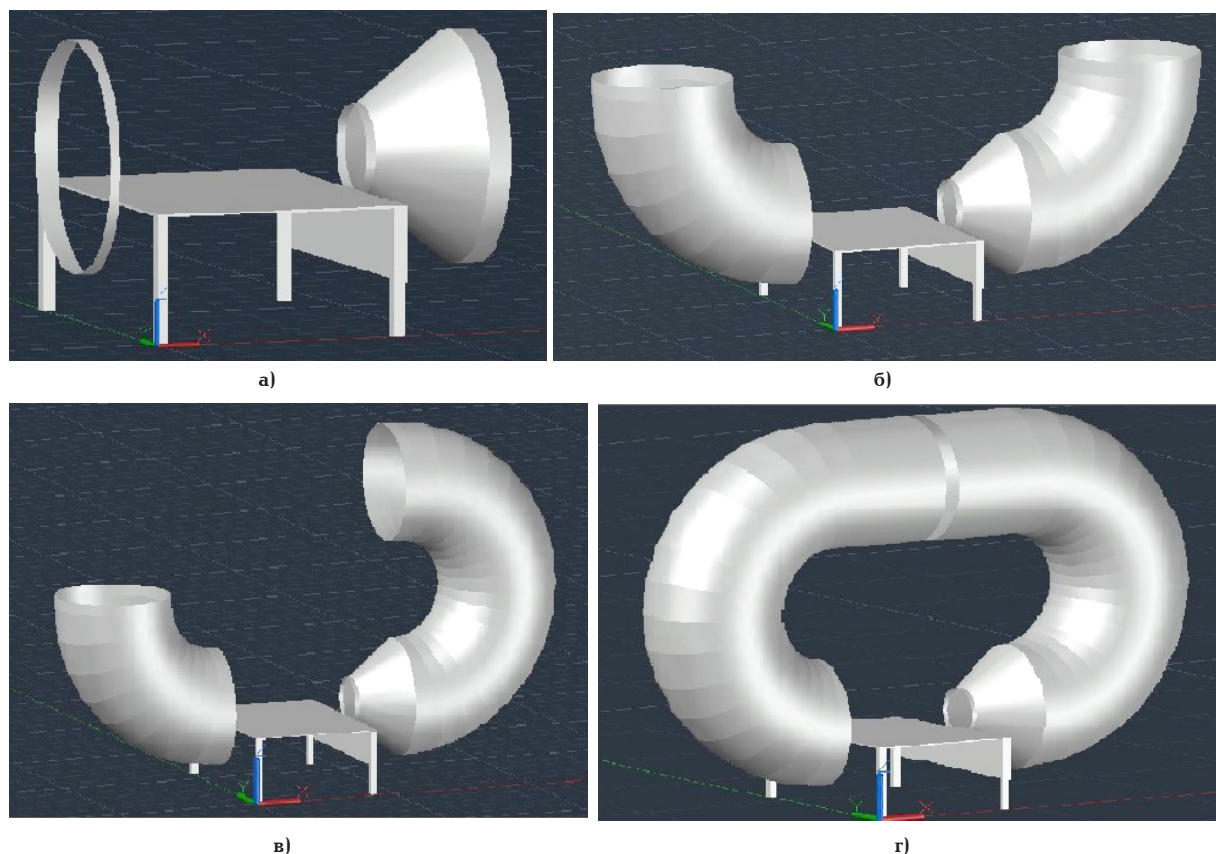


Рис. 2. Уровни геометрической детализации моделей аэродинамической трубы: а — короткие выпуски трубы; б — длинные выпуски трубы; в — часть трубы с выходным сечением, практически полностью повторяющим конструкцию установки; г — целая труба

Fig. 2. Levels of geometric detail in wind tunnel models: а — short pipe releases; б — long pipe releases; в — part of the pipe with an outlet section that repeats the design of the installation; г — whole pipe

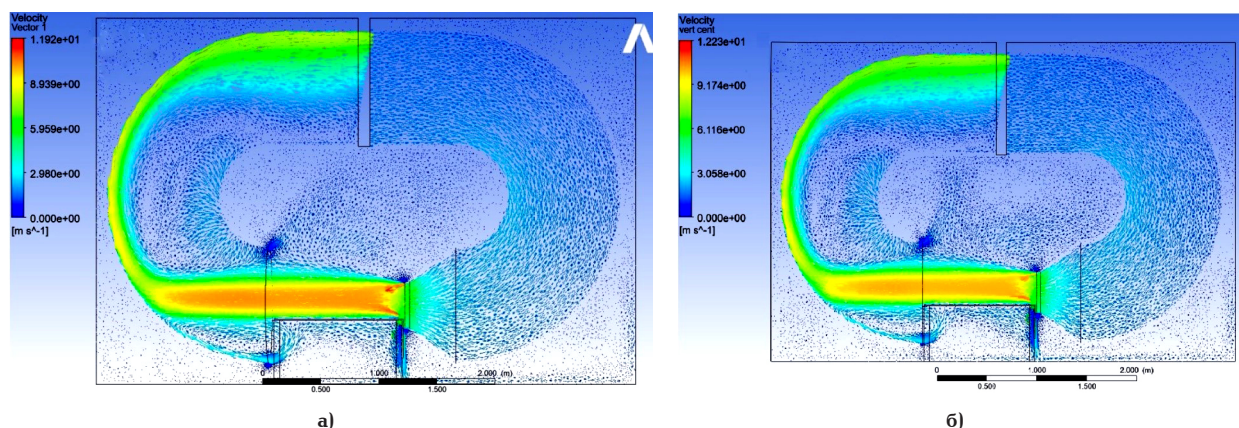


Рис. 3. Результаты аэродинамического расчета четвертого вида геометрической модели цифрового двойника со скошенным входным (а) и параллельным выходным (б)

Fig. 3. Results of aerodynamic calculation of the fourth type of geometric model of a digital twin with a beveled inlet section (a) and a parallel outlet section (b)

Для выполнения моделирования задавались граничные условия:

— размер расчетной области, обладающей свойствами газовой среды. По высоте — снизу ограничивается полом, сверху — в зависимости от вида геометрической модели: потолком при варианте с целой трубой (модель на рис. 2г) или выпусками труб при неполном отображении установки (модели на рис. 2а–в). По длине ограничивается либо размерами выпусков труб (модели на рис. 2а), либо припусками по 100 мм от внешних стенок (модели на рис. 2б–г). По ширине — с двух сторон от подматчетника добавлено по 500 мм для отслеживания

возможности смешения воздушных масс рабочей области и окружающего пространства.

Стандартно размеры рабочей области при проведении компьютерного аэродинамического эксперимента над стационарными объектами принимаются в несколько раз больше габаритов исследуемых объектов, и, таким образом, воздушные потоки успевают выравниваться после столкновения с объектами [21]. В описываемом исследовании размеры ограничены реальными габаритами помещения, в котором находится установка с целью получения наиболее приближенных к реальности результатов;

Таблица 1. Сравнение значений скоростей при четвертом виде геометрической модели с разными входными сечениями
Table. 1. Comparison of velocity values for the fourth type of the geometric model with different input sections

Высота точки от уровня пола, м	Скорости на выходном сечении, м/с			Скорости в середине рабочей области, м/с			Скорости на входном сечении, м/с		
	Скошенное входное сечение	Прямое входное сечение	Разница, %	Скошенное входное сечение	Прямое входное сечение	Разница, %	Скошенное входное сечение	Прямое входное сечение	Разница, %
0,56	5,06	4,94	2,35	6,21	5,37	13,58	6,77	5,62	17,0
0,60	9,97	9,98	0,13	7,99	7,62	4,62	8,21	7,95	3,08
0,65	10,09	10,15	0,65	9,67	9,69	0,23	9,51	9,53	0,20
0,70	9,64	9,69	0,50	10,07	10,12	0,49	10,0	10,11	1,06
0,75	9,59	9,63	0,45	10,08	10,13	0,50	10,05	10,16	1,11
0,80	9,70	9,71	0,18	9,92	9,92	0,03	9,79	9,90	1,04
0,85	9,49	9,57	0,77	8,77	8,85	0,89	8,58	8,63	0,58
0,90	0,67	0,49	27,93	5,7	6,13	7,03	6,30	6,33	0,51
Максимальная скорость потока							12,025	12,232	1,69

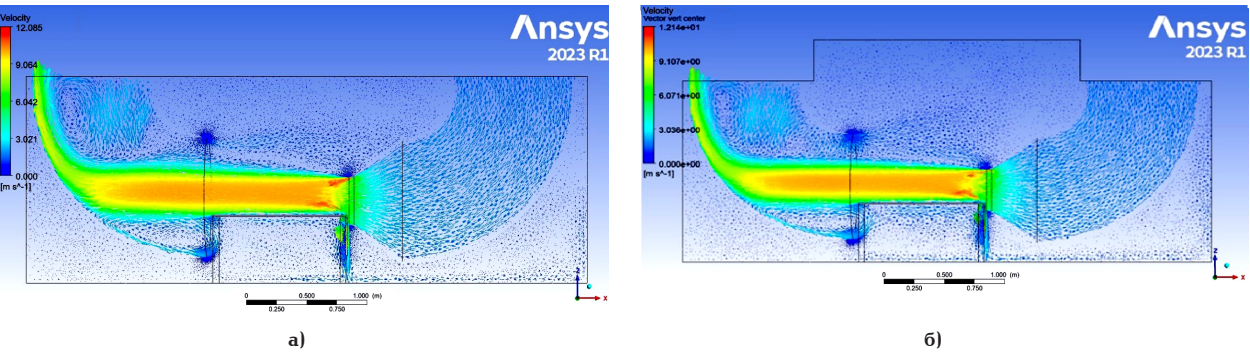


Рис. 4. Результаты аэродинамического расчета второго вида геометрической модели цифрового двойника с расчетной областью простой формы (а) и сложной (б)
Fig. 4. Results of aerodynamic calculation of the second type of geometric model of a digital twin with a simple-shaped computational domain (a) and a complex-shaped one (b)

— расчетная сетка формируется адаптивная, то есть со сгущением к поверхностям выпусков трубы и подмакетника и относительным укрупнением на внешних границах расчетной области;

— все твердые изучаемые поверхности имеют условие «непротекания», при котором обеспечивается свободное проскальзывание воздушных потоков вдоль этих поверхностей, но отсутствует проникание потоков сквозь них;

— вход воздушных потоков в моделируемую область осуществляется через сечение выходной части аэродинамической трубы на границе расчетной области. Скорость в выходном сечении реальной трубы достигает 12 м/с, поэтому, воспользовавшись уравнением постоянства объемного расхода несжимаемой жидкости, определяем соотношение скоростей в широкой и узкой частях трубы через обратную пропорцию площадей или квадратов диаметров сечений. Начальная скорость задаётся на входе в расчетную область равной 1,3 м/с;

— выход воздушных потоков осуществляется через поперечное сечение во входной части трубы и по всей поверхности вокруг неё, где назначается граничное условие отсутствия избыточного давления;

— на остальных поверхностях задается условие, не влияющее на распределение ветровых потоков;

— модель турбулентности назначена SST, являющаяся наиболее подходящей при рассматри-

ваемых малых скоростях потока и позволяющая адекватно описать столкновение частиц воздушной среды с препятствиями.

Результаты компьютерного моделирования

Для более качественной оценки влияния уровня геометрической детализации попарно рассматриваются практически идентичные модели, отличающиеся только одним показателем.

Первым произведено сравнение четвертого варианта моделей цифровых двойников со скошенным и прямым входным сечением. Распределение ветровых потоков в вертикальной плоскости, проходящей через середину выходного и входного сечения трубы, показано на рис. 3.

Визуально потоки движутся схоже, разгоняясь до максимальных значений скоростей и создавая вихри в одних и тех же местах, поэтому для более корректного сравнения необходимо обратиться к эмпирическим показателям (табл. 1).

Наибольшее расхождение результатов наблюдается на высоте 0,9 м от уровня пола, выше верхней границы выходного сечения аэродинамической трубы. Скорости в этих точках меньше 1 м/с, поэтому разница между ними в масштабах максимальных значений скоростей потока незначительна, следовательно, при анализе данных скорости можно не учитывать. Наибольшие расхождения модулей

Таблица 2. Сравнение значений скоростей второй геометрической модели цифрового двойника с разными расчетными областями

Table. 2. Comparison of the velocity values of the second geometric model of the digital twin with different calculation areas

Высота точки от уровня пола, м	Скорости на выходном сечении, м/с			Скорости в середине рабочей области, м/с			Скорости на входном сечении, м/с		
	простая расчетная область	сложная расчетная область	разница, %	простая расчетная область	сложная расчетная область	разница, %	простая расчетная область	сложная расчетная область	разница, %
0,56	4,69	4,79	2,15	5,06	5,17	2,15	4,98	5,22	4,56
0,60	9,51	10,06	5,44	7,43	7,49	0,87	7,52	7,63	1,45
0,65	10,27	10,19	0,78	9,6	9,61	0,03	9,45	9,41	0,34
0,70	9,71	9,68	0,30	10,14	10,11	0,30	10,10	10,05	0,50
0,75	9,63	9,61	0,27	10,17	10,14	0,28	10,17	10,14	0,33
0,80	9,73	9,71	0,24	10,01	10,0	0,12	10,05	10,03	0,20
0,85	9,81	9,78	0,34	8,96	9,12	1,77	9,38	9,15	2,40
0,90	0,54	0,65	16,98	5,86	5,49	6,30	7,14	6,44	9,79
Максимальная скорость потока							12,085	12,142	0,47

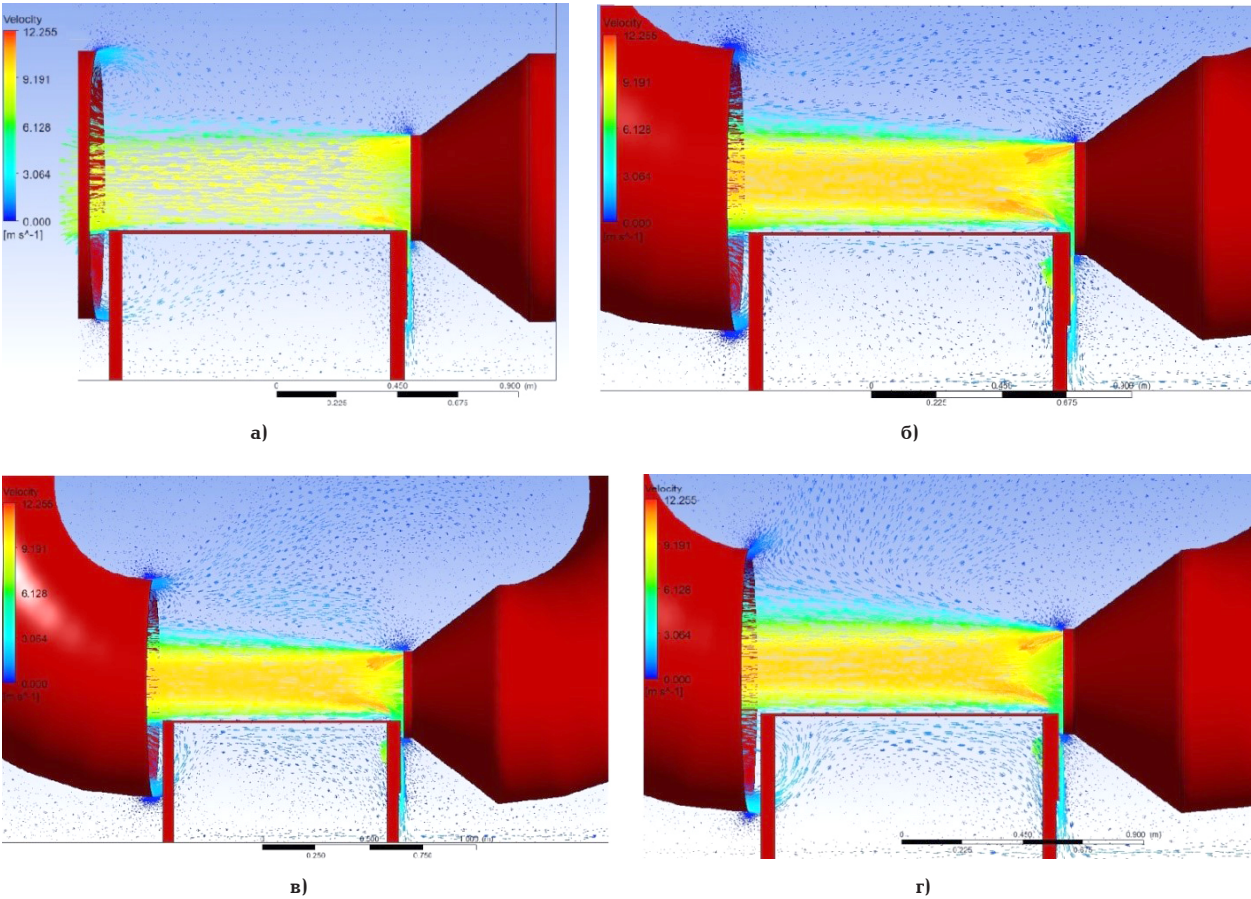


Рис. 5. Результаты аэродинамического расчета различных вариантов геометрической детализации моделей цифровых двойников: а — короткие выпуски трубы; б — длинные выпуски трубы; в — часть трубы с выходным сечением, практически полностью повторяющим конструкцию установки; г — целая труба

Fig. 5. Results of aerodynamic calculations of various geometric details of digital twin models: а — short pipe releases; б — long pipe releases; в — part of the pipe with an outlet section that repeats the design of the installation; г — whole pipe

скоростей наблюдаются на поверхности подмакетника во всех трех точках измерения и достигают отличия до 17 % на рассматриваемом входном сечении. Значения максимальных скоростей в потоке приблизительно одинаковые с разницей в пределах 2 %. В целом, при схожих результатах экспериментов наибольшие отличия прослеживаются в области сравниваемого входного сечения, что приводит

к необходимости выбора варианта более точной геометрической модели со скошенным сечением. Следующей рассматриваемой парой является геометрическая модель с длинными выпусками выходной и входной частей трубы, образуя только нижнюю половину исходной установки, обрезанную вертикальным размером расчетной области. При этом для сравнения берётся область, огра-

Таблица 3. Сравнение значений модулей скоростей четырех видов геометрических моделей цифровых двойников
Table. 3. Comparison of the velocity module values of four types of geometric models of digital twins

Высота точки от уровня пола, м	Первый вид	Второй вид	Третий вид	Четвертый вид	Максимальная разница, %
Значения скоростей на выходном сечении, м/с					
0,56	2,66	4,69	4,85	5,06	47,43
0,60	9,32	9,51	9,75	9,97	6,52
0,65	8,79	10,27	10,22	10,09	14,35
0,70	8,54	9,71	9,68	9,64	12,06
0,75	8,49	9,63	9,62	9,59	11,84
0,80	8,62	9,73	9,71	9,70	11,42
0,85	8,86	9,81	9,76	9,49	9,75
Значения скоростей в середине рабочей области, м/с					
0,56	7,92	5,06	5,52	6,21	36,14
0,60	8,56	7,43	7,67	7,99	13,24
0,65	8,99	9,60	9,96	9,67	6,96
0,70	9,09	10,14	10,11	10,07	10,39
0,75	9,09	10,17	10,14	10,08	10,60
0,80	9,03	10,01	10,0	9,92	9,85
0,85	8,61	8,96	9,04	8,77	4,81
0,90	6,91	5,86	5,93	5,7	17,51
Значения скоростей на входном сечении, м/с					
0,56	7,07	4,98	5,61	6,77	29,56
0,60	8,20	7,52	7,81	8,21	8,40
0,65	8,30	9,45	9,45	9,51	12,72
0,70	8,30	10,10	10,07	10,0	17,80
0,75	8,31	10,17	10,14	10,05	18,33
0,80	8,14	10,05	10,03	9,79	19,03
0,85	7,59	9,38	9,08	8,58	19,13
0,90	6,03	7,14	9,76	6,30	38,29
Значения максимальных скоростей, м/с					
	11,41	12,09	12,26	12,03	6,93

ниченными сечениями трубы и увеличенная в центральной части до нижней границы вертикального участка аэродинамической установки (рис. 4). Два варианта детализации расчетных областей исследуются для изучения их влияния на распределения создаваемых ветровых потоков, их смещение с окружающим пространством и образование турбулентностей. Распределение векторов скоростей в вертикальной центральной плоскости расчетной области, расположенной вдоль аэродинамической установки, показано на рис. 4. Области образования завихрений, максимальных скоростей и движения ветровых потоков визуально совпадают.

Профили распределения ветровых потоков визуально достаточно близкие, что говорит об отсутствии кардинального влияния увеличенной расчетной области на движение ветровых потоков в открытой части установки и создание новых завихрений и смещений.

Более детальный анализ распределения скоростей при двух вариантах расчетных моделируемых областей второго вида геометрических моделей цифровых двойников приведен в табл. 2.

Максимальные отличия, как и в рассмотренном выше варианте, наблюдаются в точке над верхней границей выходного сечения (выделены курсивом в табл. 2), при этом оба значения меньше 1 м/с, что

характеризует практически отсутствие движения воздушных масс над выпуском аэродинамической трубы. Учитывая предельное значение скорости, разница этих двух показателей становится незначительной. В целом, отличия в модулях скоростей в большинстве точек меньше 1 % и достигают максимального показателя в одной точке у выходного сечения, оставаясь при этом в пределах 10 %, а расхождение наибольшей скорости ветрового потока практически отсутствует.

По результатам сравнения можно сделать вывод, что построение более сложной расчетной области не несет в себе кардинального, критического изменения в результатах численного эксперимента, увеличивая при этом трудозатраты на её создание и расчёт.

Вышеизложенные результаты экспериментов показали целесообразность учета скошенности входного сечения при моделировании геометрической модели цифрового двойника, поэтому она отражается во всех четырех видах. Распределение ветровых потоков в рабочей области всех вариантов моделей показано на рис. 5. Максимальные значения модулей скоростей на шкале приведены к одному показателю для наиболее наглядного отображения потока векторов в цветовом диапазоне на рисунке. Визуально распределение скоростей

достаточно близкое при всех вариантах: максимальные показатели и завихрения образуются в тех же местах, кроме немного выбивающейся первой модели.

Для более точного и детального сравнения результатов компьютерных экспериментов всех четырех видов геометрических моделей цифрового двойника аэродинамической трубы данные модулей скоростей в различных областях и точках потока приведены в табл. 3.

В последнем столбце отражена разница минимального и максимального показателей скоростей в каждой точке (выделены жирным шрифтом) из всех четырех видов геометрических моделей. Значения в нём достигают почти 50 %.

Для оценки влияния на распределение воздушного потока формы выходной части трубы можно провести сравнение модулей скоростей в различных точках рабочей области третьего и четвертого видов моделей цифровых двойников, обладающих одинаковыми геометрическими характеристиками этих частей установки (табл. 3). Разница в значениях модулей скоростей в точках достигает почти 36 %, что опровергает наличие влияния на создаваемый установкой ветровой поток исключительно выходной части трубы, в противном случае показатели были бы более близкими.

Практически в 100 % случаев наиболее отличающиеся значения скоростей наблюдаются в первом варианте с короткими выпусками труб. Модули максимальных скоростей разнятся в 7 %. Если оставить для сравнения модели со второй по четвертую, то разница уменьшается всего до 2 %.

Заключение

Изучение скоростных характеристик четырех уровней геометрической детализации цифрового двойника аэродинамической трубы позволило оценить их высокую степень влияния на результаты компьютерного эксперимента. Между значениями модулей скоростей, выбираемых в одних и тех же точках рабочей области, отсутствует достаточное соответствие, что приводит к необходимости продолжения исследования всех четырех вариантов геометрических моделей и сравнения их показателей с данными реальной аэродинамической установки.

На основании изложенного могут быть сделаны следующие выводы:

1. Учет фактических дефектов и особенностей геометрии реальных установок влияет на точность воспроизводимых цифровым двойником процессов.

2. Увеличение сложности расчетной области не приводит к критическим изменениям в результатах компьютерного эксперимента, что позволяет оптимизировать затраты без потери качества моделирования.

3. Простая модель с короткими выпусками трубы показывает меньшую точность работы цифрового двойника по сравнению с более сложными, однако их отсечение из исследования на данном этапе является нецелесообразным ввиду учета ещё и вычислительных затрат, связанных с используемой моделью.

В перспективе результаты данного исследования могут послужить основой для разработки методических рекомендаций по выбору геометрических моделей для создания цифровых двойников в аэродинамических экспериментах, которые могут найти отражение в нормативной документации [17].

Список источников / References

1. Leonovich S. N., Riachi J. 3D-Modeling for Life Cycle of the Structure. *Science and Technique*. 2021. Vol. 20, no. 1. P. 5–9. DOI: 10.21122/2227-1031-2021-20-1-5-9. EDN: ORBAPZ.
2. Байбурин В. Б., Никифоров А. А., Пахомов Я. А. [и др.]. Цифровой двойник стерилизатора с цифровой системой управления параметрами СВЧ излучения магнетронного генератора // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2023. № 3. С. 35–43. DOI: 10.24412/2541-9269-2023-3-35-43. EDN: RHGREV.
Bayburin V. B., Nikiforov A. A., Pakhomov Ya. A. [et al.]. Tsifrovoy dvoynik sterilizatora s tsifrovoy sistemoy upravleniya parametrami SVCh izlucheniya magnetronnogo generator [Digital double of the sterilizer with a digital control system for the parameters of the microwave radiation of the magnetron generator]. *Matematicheskoe Modelirovanie, Komp'uternyy i Naturnyy Eksperiment v Estestvennykh Naukakh*. 2023. No. 3. P. 35–43. DOI: 10.24412/2541-9269-2023-3-35-43. EDN: RHGREV. (In Russ.).
3. Ведяйкина О. И., Хазов П. А., Шилов С. С. Алгоритм цифровой поддержки работоспособности малогабаритных аэродинамических экспериментальных установок // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2025. Т. 25, № 2. С. 62–71. DOI: 10.14529/build250208. EDN: RZJND.
4. Vedayaykina O. I., Khazov P. A., Shilov S. S. Algoritm tsifrovoy podderzhki rabotosposobnosti malogabaritnykh aerodinamicheskikh eksperimental'nykh ustanovok [An algorithm for the digital support of the performance of small-sized aerodynamic experimental setups]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arkhitektura. Bulletin of South Ural State University. Series Construction Engineering and Architecture*. 2025. Vol. 25, no. 2. P. 62–71. DOI: 10.14529/build250208. EDN: RZJND. (In Russ.).
4. Piras G., Muzi F., Tiburcio V. A. Digital management methodology for building production optimization through digital twin and artificial intelligence integration. *Buildings*. 2024. Vol. 14, no. 7. P. 2110. DOI: 10.3390/buildings14072110. EDN: IDYZLA.
5. Lehner Ch., Padovano A., Zehetner Ch., Hackenberg G. Digital twin and digital thread within the product lifecycle management. *Procedia Computer Science*. 2024. Vol. 232. P. 2875–2886. DOI: 10.1016/j.procs.2024.02.104. EDN: LTNKJC.
6. Liu Sh., Lu Yu., Shen X., Bao J. A digital thread-driven distributed collaboration mechanism between digital twin manufacturing units. *Journal of Manufacturing Systems*. 2023. Vol. 68. P. 145–159. DOI: 10.1016/j.jmsy.2023.02.014. EDN: BWCNWU.
7. Петрушин С. И., Петрушин С. И. Техноэкономика. Оптимизация жизненного цикла изделий машиностроения: моногр. Томск: Изд-во Томского политехнического ун-та, 2010. 138 с.
Petrushin S. I., Petrushin S. I. Tekhnoekonomika. Optimizatsiya zhiznennogo tsikla izdeliy mashinostroyeniya [Techno-economics. Optimization of the life cycle of mechanical engineering products]. Tomsk, 2010. 138 p. (In Russ.).
8. Jiang L., Su Sh., Pei X. [et al.] Product-part level digital twin modeling method for digital thread framework. *Computers & Industrial Engineering*. 2023. Vol. 179. P. 109168. DOI: 10.1016/j.cie.2023.109168. EDN: CESZDI.
9. Лычкина Н. Н., Павлов В. В. Концепция цифрового двойника и роль имитационных моделей в архитектуре цифрового двойника // Имитационное моделирование. Теория и практика (ИММОД-2023): сб. тр. Одиннадцатой всерос. науч.-практ. конф. по имитационному моделированию и его применению в науке и промышленности, Казань, 18–20 октября 2023 года. Казань: Изд-во АН РТ, 2023. С. 139–149.
Lychkina N. N., Pavlov V. V. Kontseptsiya tsifrovogo dvoynika i rol' imitatsionnykh modeley v arkhitekture tsifrovogo dvoynika

[The concept of the digital twin and the role of simulation models in the architecture of the digital twin]. *Imitatsionnoye modelirovaniye. Teoriya i praktika (IMMOD-2023)*. Kazan, 2023. P. 139–149. (In Russ.).

10. Пантюхин О. В., Васин С.А. Цифровой двойник изделий специального назначения // Качество. Инновации. Образование. 2021. № 1 (171). С. 37–40. DOI: 10.31145/1999-513x-2021-1-37-40. EDN: ZPWWOZ.

Pantukhin O. V., Vasin S.A. Tsifrovoy dvoynik izdeliy spetsial'nogo naznacheniya [Digital double of special purpose products]. *Kachestvo. Innovatsii. Obrazovaniye. Quality. Innovation. Education*. 2021. No. 1 (171). P. 37–40. DOI: 10.31145/1999-513x-2021-1-37-40. EDN: ZPWWOZ. (In Russ.).

11. Семенов А. П. Технология «Цифровой двойник» при техническом обслуживании локомотивов // Транспорт Азиатско-Тихоокеанского региона. 2019. № 3 (20). С. 38–40. EDN: NXSJER.

Semenov A. P. Tekhnologiya «Tsifrovoy dvoynik» pri tekhnicheskoy obsluzhivaniy lokomotivov [“Digital Twin” technology in locomotive maintenance]. *Transport Aziatsko-Tikhookeanskogo regiona. Transport of the Asia-Pacific Region*. 2019. No. 3 (20). P. 38–40. EDN: NXSJER. (In Russ.).

12. Arrichiello V., Gualeni P. Systems engineering and digital twin: a vision for the future of cruise ships design, production and operations. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing*. 2020. Vol. 14, no. 1. P. 115–122. DOI: 10.1007/s12008-019-00621-3.

13. Перевалов Ю. Ю., Демидович В. Б. Цифровой двойник установки индукционного нагрева углеродных волокон // Электротехника. 2021. № 3. С. 16–20. EDN: EUKZXE.

Perevalov Yu. Yu., Demidovich V. B. Tsifrovoy dvoynik ustanovki induktsionnogo nagreva ugleodnykh volokon [Digital twin of induction installation for heating carbon fiber]. *Elektrotehnika*. 2021. No. 3. P. 16–20. EDN: EUKZXE. (In Russ.).

14. Grieves M. Digital Twin: Manufacturing Excellence through Virtual Factory Replication // LLC. 2014. https://www.researchgate.net/publication/275211047_Digital_Twin_Manufacturing_Excellence_through_Virtual_Factory_Replication (accessed: 28.05.2025).

15. Zhang H., Wang Z., Zhang Sh. [et al.] Digital-Triple: a new three entities digital-twin paradigm for equipment fault diagnosis. *Journal of Intelligent Manufacturing*. 2024. DOI: 10.1007/s10845-024-02471-7. EDN: BCCFOK.

16. Jeong D. Y., Jo S. K., Lee In. B. [et al.] Digital Twin Application: Making a Virtual Pig House Toward Digital Livestock Farming. *IEEE Access*. 2023. Vol. 11. P. 121592–121602. DOI: 10.1109/access.2023.3313618. EDN: GEKYGW.

17. ГОСТ Р 57700.37-2021/ Компьютерные модели и моделирование. Цифровые двойники изделий. Общие положения. Введ. 01–01–2022. Москва: Российский институт стандартизации, 2021. 16 с.

GOST R 57700.37-2021. Komp'yuternyye modeli i modelirovaniye. Tsifrovyye dvoyniki izdeliy. Obshchiye polozheniya [Computer models and simulation. Digital twins of products. General provisions]. Moscow, 2021. 16 p. (In Russ.).

18. Zhang S., Zsöki A. M. Effect Geometric Detail on the Outcome of DEM Simulations with Polyhedral Particles. *Geomechanics and Geoengineering*. 2023. Vol. 18, no. 5. P. 426–439. DOI: 10.1080/17486025.2022.2065037. EDN: FIBLMD.

19. Гордеева Э. С., Богутский В. Б. Оценка влияния геометрических характеристик обрабатываемой детали и частиц рабочей среды на процесс вибрационной упрочняющей обработки // Вестник науки и образования Северо-Запада России. 2024. Т. 10, № 1. С. 76–85. EDN: CDXTBC.

Gordeeva E. S., Bogutsky V. B. Otsenka vliyaniya geometricheskikh kharakteristik obrabatyvayemoy detali i chastits rabochey sredy na protsess vibratsionnoy uprochnyayushchey obrabotki [Evaluation of the influence of the geometric

characteristics of the processed detail and the particles of the working medium on the process of vibration hardening]. *Vestnik nauki i obrazovaniya Severo-Zapada Rossii. Journal of Science and Education of North-West Russia*. 2024. Vol. 10, no.1. P. 76–85. (In Russ.).

20. Басов К. А. ANSYS для конструкторов. Москва: ДМК Пресс, 2016. 248 с.

Basov K. A. ANSYS dlya konstrukturov [ANSYS for constructors]. Moscow, 2016. 248 p. (In Russ.).

21. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. 2-е изд. Москва: Мир, 1981. 408 с.

Temam R. Uravneniya Nav'ye–Stoksa. Teoriya i chislennyi analiz [Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis]. 2nd ed. Moscow, 1981. 408 p. (In Russ.).

ВЕДЯЙКИНА Ольга Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Общая физика и теоретическая механика» Нижегородского государственного архитектурно-строительного университета (ННГАСУ), г. Нижний Новгород. SPIN-код: 1652-5585

ORCID: 0009-0007-1686-2579

Адрес для переписки: razvnauki@rambler.ru

ХАЗОВ Павел Алексеевич, доктор технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры «Теория сооружений и техническая механика» ННГАСУ, г. Нижний Новгород. SPIN-код: 2856-3284

ORCID: 0000-0003-1220-6930

AuthorID (SCOPUS): 57219007380

ResearcherID: ABN-9937-2022

Адрес для переписки: khazov.nngasu@mail.ru

Прозрачность финансовой деятельности: авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.

Статья поступила в редакцию 14.08.2025; одобрена после рецензирования 24.11.2025; принята к публикации 26.12.2025.

VEDYAIKINA Olga Ivanovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the General Physics and Theoretical Mechanics Department, Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod. SPIN-code: 1652-5585

ORCID: 0009-0007-1686-2579

Correspondence address: razvnauki@rambler.ru

KHAZOV Pavel Alekseevich, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Theory of Structures and Technical Mechanics Department, Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod. SPIN-code: 2856-3284

ORCID: 0000-0003-1220-6930

AuthorID (SCOPUS): 57219007380

ResearcherID: ABN-9937-2022

Correspondence address: khazov.nngasu@mail.ru

Financial transparency: the authors have no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.

The article was submitted 14.08.2025; approved after reviewing 24.11.2025; accepted for publication 26.12.2025.

АЛГОРИТМЫ РАСЧЁТА ВЕКТОРОВ НОРМАЛЕЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ В РЕГУЛЯРНЫХ И СИНГУЛЯРНЫХ ТОЧКАХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

А. А. Захаров

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет),
Россия, 105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, 5/1

В статье описывается обобщение формул Вейнгартена для нахождения частных производных произвольного порядка единичного вектора нормали в заданной точке параметрической поверхности. Также приводятся методы вычисления нормали и ее производных в сингулярных точках параметрической поверхности. Рассматриваются сингулярные точки, где локальные вектора базиса являются линейно-зависимыми или где хотя бы один из них является нулевым. Представлены алгоритмы вычисления нормали и всех ее n -ых частных производных в сингулярных и несингулярных точках поверхности. Данные алгоритмы могут использоваться в системах автоматизированного проектирования и производства при разработке геометрических библиотек для работы с оболочками и телами смещения или их обобщениями; описании процессов эквидистантного роста поверхностей; генерации траекторий обрабатывающих инструментов в приложениях для станков с числовым программным управлением; геометрическом моделировании изменения формы поверхности в процессе многослойной укладки ткани и намотки ленты, а также при расчетах траекторий движения в робототехнике.

Ключевые слова: формулы Вейнгартена, поверхность смещения, тело смещения, параметрическая поверхность, вектор нормали, сингулярная точка, дифференциальные свойства поверхности, вырожденный вектор нормали.

Для цитирования: Захаров А. А. Алгоритмы расчёта векторов нормалей и их производных в регулярных и сингулярных точках параметрических поверхностей // Омский научный вестник. 2026. № 1 (197). С. 31–37. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-31-37. EDN: PLSZVM.



© Захаров А. А., 2026.
Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

COMPUTING NORMAL VECTORS AND DERIVATIVES AT REGULAR AND SINGULAR POINTS OF PARAMETRIC SURFACES

A. A. Zakharov

Bauman Moscow State Technical University,
Russia, Moscow, 2nd Baumanskaya St., 5/1, 105005

The paper describes a generalization of the Weingarten formulae to find the partial derivatives of arbitrary order of a unit surface normal vector at a given point on a parametric surface. It also proposes methods for computing the normal vectors and its partial derivatives at singular points on the parametric surface. It considers the singular points where two surface base vectors in the tangent plane of the surface are linearly dependent or where at least one of them is zero. It provides algorithms for calculating the normal vectors and its partial derivatives at regular and singular points. This algorithm can be used in computer-aided design and manufacturing systems and integrated into geometry libraries for working with offset surfaces or their generalizations, the description of surface growth processes, the generation of tool paths for numerical control machining applications, geometric modeling of changes in surface shape when multilayer fabric draping, filament winding and tape laying, and access space representations in robotics.

Keywords: Weingarten formulae, offset surface, offset body, parametric surface, normal vector, singular point, differential surface properties, degenerate normal vector.

For citation: Zakharov A. A. Computing normal vectors and derivatives at regular and singular points of parametric surfaces. *Omsk Scientific Bulletin*. 2026. No. 1 (197). P. 31–37. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-31-37. EDN: PLSZVM.



© Zakharov A. A., 2026.
The content is available under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Введение

Большинство геометрических ядер для программ твердотельного моделирования содержат функции для вычисления координат точек параметрической поверхности и всех частных производных до определенного порядка. Примеры реализации таких функций для NURBS-поверхностей, собранные в универсальной библиотеке Nlib, приведены в [1]. Точки на некоторых типах параметрических поверхностей, таких как поверхности смещения (offset surfaces) или их обобщений [2–6], вычисляются с использованием единичных векторов нормали к этим поверхностям:

$$\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + h(u, v)\mathbf{n}(u, v), \quad (1)$$

где $\mathbf{r}(u, v)$ — порождающая поверхность; $h(u, v)$ — функция расстояния от порождающей поверхности; $\mathbf{n}(u, v)$ — вектор единичной нормали порождающей поверхности.

Поверхности смещения широко используются в системах автоматизированного проектирования (CAD) и автоматизированного производства (CAM), включая, например, операции оболочки и тела смещения, придания толщины, описание процессов эквидистантного роста поверхностей, генерацию траекторий обрабатывающих инструментов в приложениях для станков с числовым программным управлением, геометрического моделирования технологического процесса многослойной укладки ткани и намотки нити или ленты, при расчетах траекторий движения в робототехнике [2–12].

Для поверхностей смещения необходимо уметь находить производные единичного вектора нормали порождающей поверхности. Формулы для вычисления первых производных вектора единичной нормали хорошо известны из дифференциальной геометрии и носят название формул Вейнгартена [13, 14]. В [2] рассматривается анализ кривизны поверхности смещения и приводятся формулы для вычисления вторых производных вектора единичной нормали. Однако полученные выражения чрезвычайно громоздки. Более того, подробный анализ кривизны требует вычисления частных производных до четвертого порядка [2, с. 19]. В данной работе проводится обобщение вывода формулы Вейнгартена для нахождения производных единичной нормали произвольного порядка. Также учитывается случай наличия на поверхности сингулярных (особых) точек. В ряде случаев, для удобства представления конечного результата, используется запись в виде алгоритмов на С-подобном языке программирования.

1. Исходные определения

Рассмотрим векторную функцию $\mathbf{r}(u, v)$ двух скалярных параметров u и v , описывающую положение произвольной точки на поверхности:

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$, $v_{\min} \leq v \leq v_{\max}$.

Будем считать, что координатные функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ являются однозначными непрерывными функциями, которые имеют непрерывные производные по каждому параметру любого требуемого порядка.

Обозначим (k, l) -ю частную производную функции $\mathbf{r}(u, v)$:

$$\mathbf{r}^{(k, l)} = \frac{\partial^{k+l}}{\partial^k u \partial^l v} \mathbf{r}.$$

Введем два локальных вектора базиса $\mathbf{r}_i$, $i = 1, 2$ на поверхности

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}. \quad (3)$$

Точка поверхности называется регулярной (несингулярной), если в этой точке длины обоих локальных векторов базиса на поверхности отличны от нуля и эти векторы не параллельны. В противном случае точка поверхности называется сингулярной.

Ковариантные компоненты метрического тензора на поверхности определяются как скалярные произведения локальных векторов базиса:

$$g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j, \quad i, j = 1, 2. \quad (4)$$

В регулярных точках контравариантные компоненты метрического тензора вычисляются с помощью уравнения

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j.$$

Отсюда компоненты обратной матрицы имеют следующий вид:

$$g^{ij} : \frac{1}{g} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix}, \quad g = \det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2. \quad (5)$$

В регулярных точках единичный вектор нормали поверхности определяется с помощью векторного произведения локальных векторов базиса и нормировки полученного результата:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{\sqrt{g}}. \quad (6)$$

Для этого вектора справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i = 0. \quad (7)$$

Три вектора $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{n}$ определяют локальную систему координат на поверхности.

Ковариантные компоненты тензора кривизны на поверхности определяются как скалярные произведения вторых производных вектора $\mathbf{r}$ и вектора нормали $\mathbf{n}$:

$$b_{ij} = \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{n}. \quad (8)$$

Смешанные компоненты тензора кривизны на поверхности получаются как линейные комбинации его ковариантных компонентов с контравариантными компонентами метрического тензора:

$$b_i^j = b_{ik} g^{kj}.$$

2. Расчёт векторов нормалей в сингулярных точках

Если точка (u, v) является сингулярной, то локальный вектор базиса $\mathbf{r}_i$ может оказаться нулевым или линейно-зависимым.

В случае, когда вектор $\mathbf{r}_i = 0$, значение $\mathbf{r}_i$ для расчёта нормали в (6) выбирается на основе метода, изложенного в [15, с. 235–236]. Согласно ему, если, например, $\mathbf{r}_1 = 0$, то в качестве $\mathbf{r}_1$ можно выбрать первое ненулевое значение производной $\mathbf{r}^{(1,j)}$, $j = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(u, v + dv) &= \mathbf{r}^{(1,0)}(u, v) + \\ &+ \mathbf{r}^{(1,1)}(u, v)dv + \frac{1}{2}\mathbf{r}^{(1,2)}(u, v)dv^2 + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

При $v = v_{\max}$ значение dv в (9) нужно брать с обратным знаком, то есть полученное значение $\mathbf{r}^{(1,j)}$ требуется умножить на -1 в случае, когда j — нечетное [16, с. 217].

После выбора значения $\mathbf{r}_i$ требуется пересчитать значения g_{ik} , g^{ij} , g и $\mathbf{n}$ в сингулярной точке с помощью выражений (4)–(6).

В случае, когда вектора $\mathbf{r}_i$ являются линейно-зависимыми, неединичный вектор нормали $\tilde{\mathbf{n}}$ рассчитывается на основе метода, идея которого изложена в [16]. Согласно этому методу:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{n}}(u + du, v + dv) &= \\ &= \tilde{\mathbf{n}}(u, v) + \tilde{\mathbf{n}}^{(1,0)}(u, v)du + \tilde{\mathbf{n}}^{(0,1)}(u, v)dv + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\tilde{\mathbf{n}}^{(2,0)}(u, v)du^2 + 2\tilde{\mathbf{n}}^{(1,1)}(u, v)dudv + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\mathbf{n}}^{(0,2)}(u, v)dv^2 \right) + \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{n}} &= \mathbf{r}^{(1,0)} \times \mathbf{r}^{(0,1)}, \\ \tilde{\mathbf{n}}^{(1,0)} &= \mathbf{r}^{(2,0)} \times \mathbf{r}^{(0,1)} + \mathbf{r}^{(1,0)} \times \mathbf{r}^{(1,1)}, \\ \tilde{\mathbf{n}}^{(0,1)} &= \mathbf{r}^{(1,1)} \times \mathbf{r}^{(0,1)} + \mathbf{r}^{(1,0)} \times \mathbf{r}^{(0,2)}, \\ \tilde{\mathbf{n}}^{(2,0)} &= \mathbf{r}^{(3,0)} \times \mathbf{r}^{(0,1)} + 2(\mathbf{r}^{(2,0)} \times \mathbf{r}^{(1,1)}) + \mathbf{r}^{(1,0)} \times \mathbf{r}^{(2,1)}, \\ \tilde{\mathbf{n}}^{(1,1)} &= \mathbf{r}^{(2,1)} \times \mathbf{r}^{(0,1)} + \mathbf{r}^{(2,0)} \times \mathbf{r}^{(0,2)} + \mathbf{r}^{(1,0)} \times \mathbf{r}^{(1,2)}, \\ \tilde{\mathbf{n}}^{(0,2)} &= \mathbf{r}^{(1,2)} \times \mathbf{r}^{(0,1)} + 2(\mathbf{r}^{(1,1)} \times \mathbf{r}^{(0,2)}) + \mathbf{r}^{(1,0)} \times \mathbf{r}^{(0,3)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Покажем, как можно вычислить вектор $\tilde{\mathbf{n}}$ в общем случае с помощью алгоритма A.1¹.

Пусть значения производных $\mathbf{r}^{(k,l)}$, $k, l \geq 0$ и $0 \leq k+l \leq d$ уже вычислены и загружены в массив `rders[] []`. Предполагается, что функция `cross` вы-

числяет векторное произведение, функция `length` — длину вектора, а `Bin[n][k]` — это предварительно вычисленные биномиальные коэффициенты $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Алгоритм A.1¹ вычисляет вектор `normal` и значение `min_d`, являющееся наименьшим порядком производной слагаемых в ряде Тейлора (10), которые не являются нулевыми.

После расчёта вектора $\tilde{\mathbf{n}}$ рассчитаем «новое» значение вектора $\mathbf{r}_2$ с помощью выражения

$$\mathbf{r}_2 = \tilde{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_1. \quad (12)$$

После выбора значения $\mathbf{r}_{2'}$, как и в предыдущем случае, требуется пересчитать значения g_{ik} , g^{ij} , g и $\mathbf{n}$ с помощью выражений (4)–(6).

Заметим также, что не во всех случаях удаётся однозначно вычислить значение вектора нормали в сингулярной точке [15, 16].

3. Деривационные формулы Вейнгартена

Формулы Вейнгартена выражают значения частных производных вектора единичной нормали $\mathbf{n}$ через локальные векторы базиса. Дифференцируя по параметрам поверхности u и v первое равенство в (7), получим $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_i = 0$, из чего следует, что частные производные нормали поверхности $\mathbf{n}_i$ ортогональны к $\mathbf{n}$ и, следовательно, лежат в касательной плоскости поверхности. Следовательно, $\mathbf{n}_i$ можно представить в виде разложений по векторам $\mathbf{r}_i$:

$$\mathbf{n}_i = \alpha_i^k \mathbf{r}_k. \quad (13)$$

Умножим (13) скалярно на $\mathbf{r}_j$:

$$\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_j = \alpha_i^k (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_j) = \alpha_i^k g_{kj}. \quad (14)$$

Продифференцировав второе равенство в (7), имеем $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{ij} + \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{r}_i = 0$. Таким образом, из (8) получим:

$$b_{ij} = -\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{r}_i. \quad (15)$$

Тогда α_i^k можно определить как

$$\alpha_i^k = -b_{ij} g^{jk}.$$

Отсюда формулы Вейнгартена имеют вид:

$$\mathbf{n}_i = -b_{ij} g^{jk} \mathbf{r}_k = -b_i^k \mathbf{r}_k. \quad (16)$$

4. Обобщение деривационных формул Вейнгартена

В общем случае производные вектора нормали уже не лежат в касательной плоскости поверхности, поэтому их можно представить в виде разложения по векторам $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{n}^{(k,l)} = \alpha_1^{kl} \mathbf{r}_1 + \alpha_2^{kl} \mathbf{r}_2 + \alpha_3^{kl} \mathbf{n}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^{(k,l)} \cdot \mathbf{n} &= \alpha_3^{kl}, \\ \mathbf{n}^{(k,l)} \cdot \mathbf{r}_1 &= \alpha_1^{kl} g_{11} + \alpha_2^{kl} g_{21}, \\ \mathbf{n}^{(k,l)} \cdot \mathbf{r}_2 &= \alpha_1^{kl} g_{12} + \alpha_2^{kl} g_{22}. \end{aligned}$$

При $k = 0$ и $l = 0$, очевидно, получаем $\alpha_1^{kl} = 0$, $\alpha_2^{kl} = 0$ и $\alpha_3^{kl} = 1$.

Во всех остальных случаях, чтобы получить выражения для вычисления коэффициентов α_1^{kl} , α_2^{kl}

и a_3^{kl} , найдем (k,l) -ю частную производную от выражений (7), используя формулу Лейбница. В общем виде эти выражения будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \left[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{c}) \right]^{(l)} &= \left[\sum_{i=0}^k C_k^i \mathbf{n}^{(i,0)} \cdot \mathbf{c}^{(k-i,0)} \right]^{(l)} = \\ &= \sum_{i=0}^k C_k^i \sum_{j=0}^l C_l^j \mathbf{n}^{(i,j)} \cdot \mathbf{c}^{(k-i,l-j)} = 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{c} = \mathbf{n}$, $\mathbf{c} = \mathbf{r}_1$ или $\mathbf{c} = \mathbf{r}_2$.

5. Алгоритм расчёта обобщённых деривационных формул Вейнгартена

Для нахождения коэффициентов a_1^{kl} , a_2^{kl} и a_3^{kl} и получения производных вектора нормали $\mathbf{n}^{(k,l)}$ рассмотрим алгоритм A.2².

Пусть значения (u,v) фиксированы, и все производные $\mathbf{r}_1^{(k,l)} = \mathbf{r}^{(k+l,l)}$, $\mathbf{r}_2^{(k,l)} = \mathbf{r}^{(k,l+1)}$ для $k,l \geq 0$ и $0 \leq k+l \leq d$ уже вычислены и загружены в массив $\text{rders}[] []$. В переменных g_{11} , g_{12} , g_{21} , g_{22} содержатся ковариантные компоненты метрического тензора на поверхности (4).

Алгоритм A.2² вычисляет массив $\text{ders_norm}[] []$, где $\text{ders_norm}[k][l]$ — производная $\mathbf{n}(u,v)$ по u — k раз и по v — l раз. Предполагается, что функция dot вычисляет скалярное произведение.

6. Расчёт производной вектора нормали в сингулярной точке

В сингулярной точке, где, например, $\mathbf{r}_1 = 0$, за исходное значение вектора $\mathbf{r}_1^{(0,0)}$ для расчёта вектора нормали выбирается вектор $\mathbf{r}^{(1,l)}$ (см. пункт 2). Далее считаются значения производных более высокого порядка $\mathbf{r}_1^{(k,l)}$, где в качестве l -й производной по v берется ее $l+j$ -я производная. Указанные значения загружаются в массив $\text{rders}[] []$, и расчет производных вектора нормали осуществляется с помощью алгоритма A.2². Заметим, что в точке типа полюс, где сходятся параметрические направления одного из семейств, производной нормали не существует.

В сингулярной точке, где вектора $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ являются линейно-зависимыми, «новое» значение вектора $\mathbf{r}_2$ рассчитывается по формуле (12). Получим значения его производных $\mathbf{r}_2^{(k,l)}$, $k,l \geq 0$ и $0 \leq k+l \leq d$ в три этапа, первые два из которых рассчитывают значения производных вектора $\tilde{\mathbf{n}}$.

На первом этапе на основе формул (11) считаем исходные производные $\tilde{\mathbf{n}}^{(k,l)}$ и загрузим их в массив ders_norm1 с помощью алгоритма A.3³. Начинать расчет производных будем с порядка $\min_d+1$.

На втором этапе будем дифференцировать выражение для $\tilde{\mathbf{n}}$ (10), в котором оставим только

первые ненулевые слагаемые с порядком производной $\min_d$. Алгоритм A.4⁴ выполняет этот расчет и записывает результат в массив ders_norm2 . Алгоритм A.4⁴ принимает массив normal из Алгоритма A.1¹ и массив ders_norm1 из Алгоритма A.3³ в качестве входных данных.

На третьем этапе рассчитываются значения производных вектора $\mathbf{r}_2$. Для этого продифференцируем выражение (12) с использованием формулы Лейбница. Алгоритм A.5⁵ принимает на вход массивы rders и ders_norm2 и возвращает массив производных вектора $\mathbf{r}_2$ — ders_r2 .

Для расчета производной вектора нормали в сингулярной точке полученные значения $\text{ders_r2}[i][j]$ используются в алгоритме A.2² при расчете значений переменной v_2 вместо массива значений $\text{rders}[i][j+1]$.

7. Тестирование разработанных алгоритмов

Алгоритм A.2² был протестирован на модельных геометриях, представленных на рис. 1. Геометрии были построены с использованием построения поверхностей смещения от порождающих поверхностей, представляющих собой плоскую, цилиндрическую и сферическую поверхности.

В регулярных точках поверхностей смещения вычислялись значения радиусов кривизн по формулам:

$$\rho_u = \frac{g_{11}}{b_{11}}, \quad \rho_v = \frac{g_{22}}{b_{22}},$$

задействующие вычисления первых и вторых производных векторов нормалей порождающих поверхностей у поверхностей смещения (1). Полученные значения сравнивались с аналитическими значениями. По результатам сравнения были получены совпадения с точностью до машинного нуля.

Алгоритм расчета вектора нормали в сингулярной точке, где один из векторов $\mathbf{r}_i = 0$, тестировался для поверхности эллипсоида вращения, оси которого были выровнены по осям координат, и тела смещения, отраженного от его поверхности (рис. 2а, б). Сингулярными точками указанного типа на нем являются точки полюса.

На рисунках стрелками показаны направления локальных векторов базиса и векторов нормалей. Для эллипсоида вращения нормаль, вычисленная в точке полюса, совпала с соответствующим базисным ортом. Далее, эта нормаль использовалась для нахождения точки полюса поверхности смещения. И далее, в точке полюса поверхности смещения, вновь была вычислена нормаль, которая также совпала с базисным ортом. Направления локальных векторов базиса в точке полюса изменяются в зависимости от значения параметрической координаты.

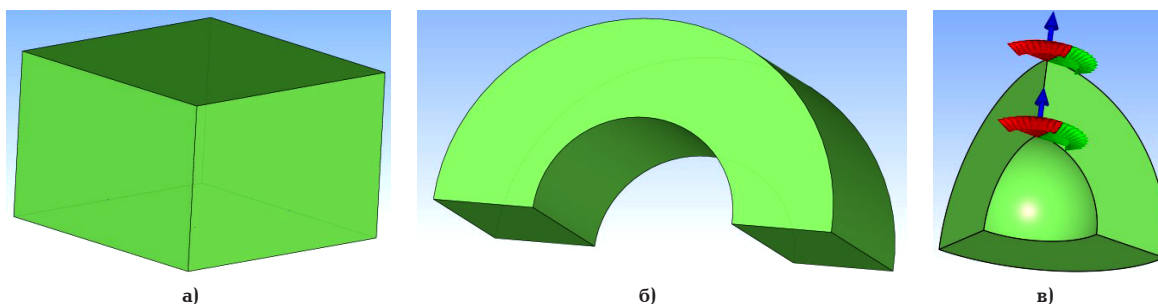


Рис. 1. Тела смещения: а — плоское; б — цилиндрическое; в — сферическое
Fig. 1. Offset solids: a — flat; б — cylindrical; в — spherical

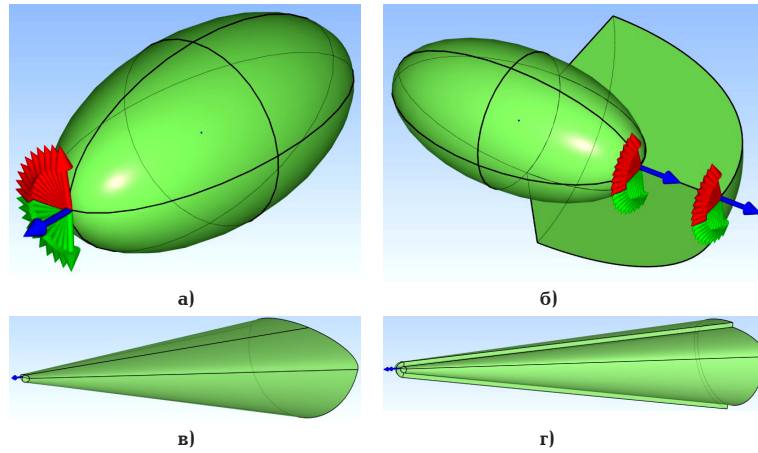


Рис. 2. Геометрии с сингулярными точками полюса:
а — эллипсоид вращения; б — эллиптическое тело;
в — биконус $\delta_s = 0,3$ [17]; г — биконусная оболочка
Fig. 2. Geometries with singular pole points: а — rotation ellipsoid;
б — offset of rotation ellipsoid; в — bicone $\delta_s = 0,3$ [17]; г — bicone shell

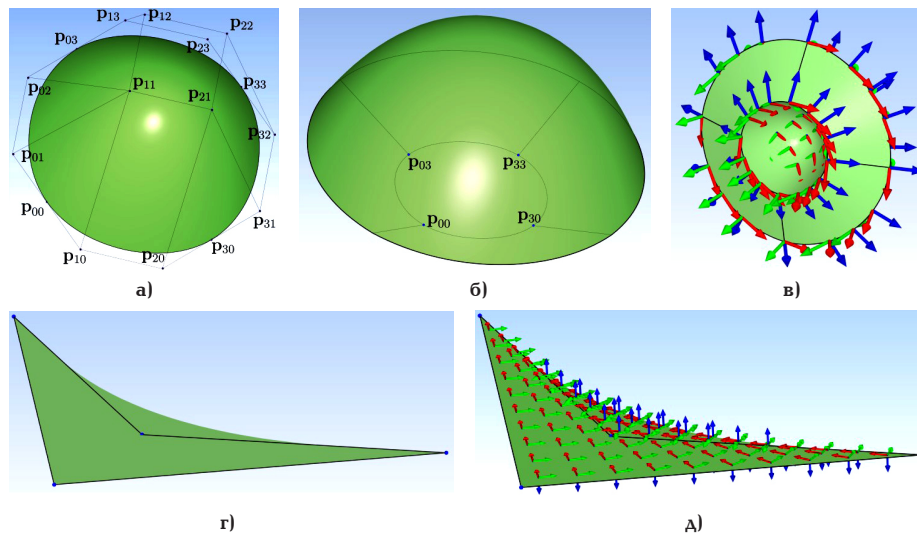


Рис. 3. Геометрии с сингулярными точками, где r_i — линейно-зависимые:
а — бикубическая NURBS-поверхность; б — тело смещения бикубической NURBS-поверхности; в — вектора r_i и n ; г — билинейный сплайн; д — вектора r_i и n
Fig. 3. Geometries with singular points, where r_i are linearly dependent:
а — bicubic NURBS surface; б — offset of bicubic NURBS surface;
в — vectors r_i and n ; г — bilinear spline; д — vectors r_i and n

ты вдоль вырожденного направления, для которого $r_i = 0$. После нахождения вектора нормали, вырожденный вектор $r_i = 0$ пересчитывается, например, по формуле (12), если $i = 2$. На рис. 1в показаны аналогичные результаты в точке полюса сферической поверхности.

На рис. 2в, г приведен пример построения биконусного тела от порождающей поверхности с полюсной точкой, которое может использоваться для решения аэродинамических и тепловых задач, а также задач прочностного проектирования [17].

На рис. 3 показаны два типа геометрий, которые имеют сингулярные точки, где локальные вектора базиса r_i являются линейно-зависимыми.

На рис. 3а показана бикубическая NURBS-поверхность со скругленными углами, ее контрольные точки и контрольный полигон. Угловые контрольные точки и их соседи по обоим параметрическим направлениям (например, точки p_{00} , p_{01} , p_{10}) лежат на одной прямой. Таким образом, данная поверхность имеет четыре сингулярные точки: p_{00} , p_{03} , p_{30} , p_{33} . В этих точках локальные вектора базиса

являются параллельными, либо — однонаправленными (в точках p_{03} , p_{30}), либо — противоположно направленными (в точках p_{00} , p_{33}). На рис. 3б показано построенное на основе этой поверхности тело смещения. Нормали в сингулярных точках, вычисленные по алгоритму А.1¹, имеют правильные направления, согласующиеся с направлениями нормалей в ближайших несингулярных точках (рис. 3в). На рис. 3в также показаны направления локальных векторов базиса, в сингулярных точках эти вектора были скорректированы с помощью формулы (12). Для поверхности смещения вычисление локальных векторов базиса требует вычисления первых производных вектора нормали порождающей поверхности, которое осуществляется с помощью алгоритмов А.2² — А.5³.

На рис. 3г показан плоский билинейный сплайн. Данная поверхность содержит внутренние сингулярные точки, при переходе через которые направление нормали меняет знак на противоположный. На рис. 3д показаны направления локальных векторов базиса и векторов нормалей, которые были

вычислены с помощью алгоритма А.1. Заметим также, что в сингулярных точках данной поверхности производные нормали не существуют.

Построение и визуализация представленных геометрий проводилась в программном комплексе SMCM [18].

Заключение

Было проведено обобщение формул Вейнгартена для нахождения частных производных n -го порядка вектора единичной нормали с использованием правила Лейбница. Предложены методы вычисления нормали и ее производных произвольного порядка в сингулярных точках параметрической поверхности, где локальные вектора базиса являются линейно-зависимыми или где хотя бы один из них является нулевым. Разработаны алгоритмы вычисления нормали и ее частных производных в сингулярных и несингулярных точках поверхности. Их использование позволяет избежать применения явных громоздких выражений для расчёта дифференциальных характеристик параметрических поверхностей.

Примечания

```

ALGORITHM A.1
getNormal(rders, normal, min_d)
/* Compute n(u,v) if r(u,v) are linear dependent */
/* from r(u,v) derivatives */
/* Input: rders */
/* Output: normal, min_d */
normal = 0;
f = 1;
for (d = 1; ; ++d) {
    for (k = 0; k <= d; ++k) {
        l = d - k;
        sum_norm = 0;
        is_reverse = false;
        if ((k%2 == 1) && (u = u_max))
            is_reverse = !is_reverse;
        if ((l%2 == 1) && (v = v_max))
            is_reverse = !is_reverse;
        for (i = 0; i <= k; ++i) {
            dnorm = 0;
            for (j = 0; j <= l; ++j)
                dnorm += Bin[l][j] * cross(rders[i+1][j],
                                           rders[k-i][l-j+1]);
            sum_norm += dnorm * Bin[k][i];
        }
        if (is_reverse) sum_norm *= -1;
        normal += sum_norm * Bin[d][k];
    }
    f *= d;
    normal *= 1 / f;
    if (length(normal) != 0) {
        min_d = d; break;
    }
}
}

```

```

ALGORITHM A.2
getNormalDerivs(d, rders, ders_norm)
/* Compute n(u,v) derivatives */
/* from r(u,v) derivatives */
/* Input: rders, g11, g12, g22, d */
/* Output: ders_norm */
for (k = 0; k <= d; ++k)
    for (l = 0; l <= d - k; ++l) {
        u1 = u2 = u3 = 0;
        for (i = 0; i <= k; ++i) {
            v1 = v2 = v3 = 0;
            for (j = 0; j <= l; ++j) {
                if ((i == 0) && (j == 0)) continue;
                v1 += Bin[l][j] * dot(rders[i+1][j],
                                     ders_norm[k-i][l-j]);
                v2 += Bin[l][j] * dot(rders[i][j+1],
                                     ders_norm[k-i][l-j]);
                if ((i != k) || (j != l))
                    v3 += Bin[l][j] *
                        dot(ders_norm[i][j],
                           ders_norm[k-i][l-j]);
            }
            u1 += v1 * Bin[k][i];
            u2 += v2 * Bin[k][i];
            u3 += v3 * Bin[k][i];
        }
        if ((k == 0) && (l == 0))

```

```

        u3 = 1.0;
    else
        u3 /= 2.0;
    a1 = (u1 * g11 + u2 * g12);
    a2 = (u1 * g21 + u2 * g22);
    a3 = u3;
    ders_norm[k][l] = a1*rders[l][0] + a2*rders[0][l] +
        a3*der_norm[0][0];
}
}

```

```

ALGORITHM A.3
getNormalDerivs1(d, min_d, rders, ders_norm1)
/* Compute ders_norm1 */
/* from r(u,v) derivatives */
/* Input: rders, d, min_d */
/* Output: ders_norm1 */
for (m = min_d + 1; m <= (min_d + d); ++m)
    for (k = 0; k <= m; ++k) {
        l = m - k;
        ders_norm1[k][l] = 0;
        for (i = 0; i <= k; ++i) {
            dnorm = 0;
            for (j = 0; j <= l; ++j)
                dnorm += Bin[l][j] * cross(rders[i+1][j],
                                           rders[k-i][l-j+1]);
            ders_norm1[k][l] += dnorm * Bin[k][i];
        }
    }
}

```

```

ALGORITHM A.4
getNormalDerivs2(d, min_d, normal, ders_norm1, ders_norm2)
/* Compute ders_norm2 */
/* Input: normal, ders_norm1, d, min_d */
/* Output: ders_norm2 */
f = 1;
for (k = 0; k <= min_d; ++k) f *= k;
for (i = 0; i <= d; ++i)
    for (j = 0; j <= d - i; ++j) {
        if ((i == 0) && (j == 0)) {
            ders_norm2[i][j] = normal; continue;
        }
        else
            ders_norm2[i][j] = 0;
        for (k = 0; k <= min_d; ++k) {
            l = min_d - k;
            is_reverse = false;
            if ((k%2 == 1) && (u = u_max))
                is_reverse = !is_reverse;
            if ((l%2 == 1) && (v = v_max))
                is_reverse = !is_reverse;
            if (is_reverse) sign = -1;
            else sign = 1;
            ders_norm2[i][j] += sign * Bin[min_d][k] *
                ders_norm1[k+i][l+j] / f;
        }
    }
}

```

```

ALGORITHM A.5
getR2Derivs(d, rders, ders_norm2, ders_r2)
/* Compute ders_r2 */
/* from r(u,v) derivatives */
/* Input: ders_norm2, d, rders */
/* Output: ders_r2 */
for (k = 0; k <= d; ++k)
    for (l = 0; l <= d - k; ++l) {
        ders_r2[k][l] = 0;
        for (i = 0; i <= k; ++i) {
            sum_dr2 = 0;
            for (j = 0; j <= l; ++j)
                sum_dr2 += Bin[l][j] * cross(ders_norm2[i][j],
                                           rders[k-i+1][l-j]);
            ders_r2[k][l] += Bin[k][i] * sum_dr2;
        }
    }
}

```

Список источников / References

1. Piegl L., Tiller W. The NURBS book. 2nd ed. New York: Springer, 1997. 646 p. DOI: 10.1007/978-3-642-59223-2.
2. Farouki R. T. The approximation of non-degenerate offset surfaces. *Computer Aided Geometric Design*. 1986. Vol. 3, no. 1. P. 15–44. DOI: 10.1016/0167-8396(86)90022-1.

3. Pham B. Offset curves and surfaces: a brief survey. *Computer-Aided Design*. 1992. Vol. 24, no. 4. P. 223–229. DOI: 10.1016/0010-4485(92)90059-J.
4. Barnhill R. E., Frost T. M., Kersey S. N. Self-intersections and offset surfaces. *Geometry Processing for Design and Manufacturing* / ed. Barnhill R. E. Philadelphia: SIAM, 1992. P. 35–44. DOI: 10.1137/1.9781611971668.ch2.
5. Maekawa T. An overview of offset curves and surfaces. *Computer-Aided Design*. 1999. Vol. 31, no. 3. P. 165–173. DOI: 10.1016/S0010-4485(99)00013-5.
6. Kumar R. G. V. V., Shastry K. G., Prakash B. G. Computing constant offsets of a NURBS B-Rep. *Computer-Aided Design*. 2003. Vol. 35, no. 10. P. 935–944. DOI: 10.1016/S0010-4485(02)00210-5.
7. Iglesias A., Gálvez A., Puig-Pey J. Computational methods for geometric processing. Applications to industry. *Lecture Notes in Computer Science*. 2001. Vol. 2073. P. 698–707. DOI: 10.1007/3-540-45545-0_81.
8. Геометрическое ядро RGK на форуме компании «Топ Системы» // САПР и Графика. 2023. № 7 (323). С. 32–41. EDN: QDALSS.
- Geometricheskoye yadro RGK na forumе kompanii «Тop Sistemy» [RGK geometric core on the Top Systems company forum]. *SAPR i Grafika. CAD and Graphics*. 2023. No. 7 (323). P. 32–41. EDN: QDALSS. (In Russ.).
9. Битюков Ю. И., Денискин Ю. И. Геометрическое моделирование многослойной намотки // Труды МАИ. 2010. № 37. С. 16. EDN: MLMQWL.
- Bitukov Yu. I., Deniskin Yu. I. Geometricheskoye modelirovaniye mnogosloynnoy namotki [Geometrical modelling of multilayered winding]. *Trudy MAI*. 2010. No. 37. P. 16. EDN: MLMQWL. (In Russ.).
10. Dimitrienko Yu. I., Zakharov A. A., Gorbunov V. Y. Modeling of the draping textile on a curved surface. *Journal of Physics Conference Series*. 2021. Vol. 1990 (1). 012062. DOI: 10.1088/1742-6596/1990/1/012062.
11. Димитриенко Ю. И., Захаров А. А., Коряков М. Н. Моделирование выгорания конструкций из дисперсно-армированных сред // Химическая физика и мезоскопия. 2023. Т. 25, № 4. С. 463–473. DOI: 10.15350/17270529.2023.4.40. EDN: SCQKHN.
- Dimitriyenko Yu. I., Zakharov A. A., Koryakov M. N. Modelirovaniye vygoraniya konstruktсий iz dispersno-armirovannykh sred [Burnback simulation of fuel grains with dispersed-reinforced propellant composition]. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya. Chemical Physics and Mesoscopy*. 2023. Vol. 25, no. 4. P. 463–473. DOI: 10.15350/17270529.2023.4.40. EDN: SCQKHN. (In Russ.).
12. Dimitrienko Yu., Zakharov A., Koryakov M. Simulation of energetic composite materials combustion. *International Scientific and Practical Conference “Environmental Risks and Safety in Mechanical Engineering” (ERSME-2023)*. 2023. Vol. 376. 01031. DOI: 10.1051/e3sconf/202337601031.
13. Konyukhov A., Schweizerhof K. Computational contact mechanics: geometrically exact theory for arbitrary shaped bodies. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013. P. 25–34.
14. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование. 2-е изд. Москва: ДМК Пресс, 2024. 408 с. ISBN 978-5-93700-304-1.
- Golovanov N. N. Geometricheskoye modelirovaniye [Geometric Modeling]. 2nd ed. Moscow, 2024. 408 p. ISBN 978-5-93700-304-1. (In Russ.).
15. Faux I. D., Pratt M. J. Computational geometry for design and manufacture. New York: John Wiley & Sons, 1979. 329 p.
16. Yamaguchi Y. Differential properties at singular points of parametric surfaces. *CAD Tools and Algorithms for Product Design* / eds.: Brunet P., Hoffmann C. M., Roller D. Berlin, Heidelberg: Springer; 2000. P. 211–221. DOI: 10.1007/978-3-662-04123-9_14.
17. Братчев А. В., Ватолина Е. Г., Забарко Д. А. [и др.]. Вопросы теплотехнического проектирования перспективных гиперзвуковых летательных аппаратов аэробаллистического типа // Известия Института инженерной физики. 2009. № 2 (12). С. 42–49. EDN: KJBСMT.
- Bratchev A. V., Vatolina E. G., Zabarko D. A. [et al.]. Voprosy teplotekhnicheskogo proyektirovaniya perspektivnykh giperzvukovykh letatel'nykh apparatov aeroballisticheskogo tipa [Thermal design issues for advanced hypersonic aeroballistic aircraft]. *Izvestiya Instituta Inzhenernoy Fiziki*. 2009. No. 2 (12). P. 42–49. EDN: KJBСMT. (In Russ.).
18. Dimitrienko Y., Yurin Yu., Bogdanov I. [et al.]. Supercomputer multiscale modeling of composite structures strength. *E3S Web of Conferences*. 2023. Vol. 376 (3). P. 01034. DOI: 10.1051/e3sconf/202337601034.
- ЗАХАРОВ Андрей Алексеевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика», старший научный сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет), г. Москва.
SPIN-код: 6340-9326
AuthorID (РИНЦ): 656988
ORCID: 0000-0001-7553-0805
AuthorID (SCOPUS): 56841188600
ResearcherID: K-6811-2017
Адрес для переписки: azaharov@bmstu.ru
- Прозрачность финансовой деятельности:** автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.
- Статья поступила в редакцию 11.09.2025; одобрена после рецензирования 05.11.2025; принята к публикации 25.12.2025.
- ZAKHAROV Andrey Alekseyevich**, Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Senior Researcher of the Research and Education Center of Supercomputer Engineering Simulation and Development of Software Packages, Bauman Moscow State Technical University, Moscow.
SPIN-code: 6340-9326
AuthorID (RSCI): 656988
ORCID: 0000-0001-7553-0805
AuthorID (SCOPUS): 56841188600
ResearcherID: K-6811-2017
Correspondence address: azaharov@bmstu.ru
- Financial transparency:** the author has no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.
- The article was submitted 11.09.2025; approved after reviewing 05.11.2025; accepted for publication 25.12.2025.

РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ВЫБОРА ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ В ОРГАНИЗАЦИОННО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОМ ОБЕСПЕЧЕНИИ ПРОИЗВОДСТВА

А. С. Краско^{1,2}, М. С. Кружкова², С. А. Пупукин²

¹Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет),
Россия, 105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, 5/1

²МИРЭА — Российский технологический университет,
Россия, 119454, г. Москва, пр. Вернадского, 78

В статье рассматривается методика выбора оптимального состава технологического оборудования для производственных участков машиностроительных предприятий. Методика включает разработку алгоритма, учитывающего технические и организационные аспекты производства. На примере детали «Вилка» демонстрируется выбор фрезерного оборудования с учетом технологической подготовки, расстановки станков и организации производства. Методика учитывает поточность производства, минимизацию перемещений, эффективное использование площадей, сервисное обслуживание и квалификацию персонала. Алгоритм обеспечивает комплексную оценку производственных процессов, включая загрузку оборудования, экономические показатели и организационные требования. Основное внимание уделяется оптимизации капитальных вложений при максимальной производительности. Применение методики позволяет повысить технико-экономические показатели, оптимизировать процессы, улучшить условия труда, сократить издержки и увеличить производительность. Методика универсальна для новых производств и модернизации существующих участков, обеспечивая баланс между стоимостью и технологическими возможностями оборудования.

Ключевые слова: состав оборудования, производственные участки, технико-экономические показатели, проектирование производственных участков, организация производств, машиностроение, технологическое оборудование.

Для цитирования: Краско А. С., Кружкова М. С., Пупукин С. А. Разработка методики выбора технологического оборудования в организационно-технологическом обеспечении производства // Омский научный вестник. 2026. № 1 (197). С. 38–45. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-38-45. EDN: PZGLUJ.



© Краско А. С., Кружкова М. С., Пупукин С. А., 2026.
Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

DEVELOPMENT OF A METHODOLOGY FOR SELECTING TECHNOLOGICAL EQUIPMENT IN ORGANIZATIONAL AND TECHNOLOGICAL SUPPORT OF PRODUCTION

A. S. Krasko^{1,2}, M. S. Kruzhkova², S. A. Pupukin²

¹Bauman Moscow State Technical University, Russia, Moscow, 2nd Baumanskaya St., 5/1, 105005

²MIREA — Russian Technological University, Russia, Moscow, Vernadskogo Ave., 78, 119454

The article discusses a methodology for selecting the optimal composition of technological equipment for production areas of machine-building enterprises. The methodology includes the development of an algorithm that takes into account technical and organizational aspects of production. Using the example of the "Fork" part, the article demonstrates the selection of milling equipment taking into account technological preparation, machine placement, and production organization. The methodology takes into account the flow of production, minimization of motions, efficient use of space, service support, and personnel qualifications. The algorithm provides a comprehensive assessment of production processes, including equipment utilization, economic indicators, and organizational requirements. The main focus is on optimizing capital

investments while maximizing productivity. The application of this methodology allows you to improve technical and economic indicators, optimize processes, improve working conditions, reduce costs, and increase productivity.

Keywords: equipment composition, production sites, technical and economic indicators, design of production sites, organization of production, mechanical engineering, technological equipment.

For citation: Krasko A. S., Kruzhkova M. S., Pupukin S. A. Development of a methodology for selecting technological equipment in organizational and technological support of production. *Omsk Scientific Bulletin*. 2026. No. 1 (197). P. 38–45. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-38-45. EDN: PZGLUJ.



© Krasko A. S., Kruzhkova M. S., Pupukin S. A., 2026.
The content is available under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Введение

Задача проектирования производственных участков машиностроительных предприятий включает определение оптимального парка технологического оборудования, особенно металлорежущих станков с числовым программным управлением, для минимизации затрат при соблюдении качества продукции и запланированных объемов выпуска. Несмотря на важность данной проблемы, формализованной методологии подбора оборудования на текущий момент не существует, что обуславливает необходимость разработки соответствующей методики [1–4].

Проблема выбора оптимального состава оборудования производственного участка и постановка задачи

Разработка формализованного метода выбора оптимального состава металлорежущих станков сталкивается с проблемой разнообразия моделей, различающихся техническими характеристиками и стоимостью. Необходимо минимизировать затраты и сроки окупаемости, обеспечивая требуемые качество, производительность и экономичность производства. Алгоритм должен учитывать специфику продукции, производственные условия, экономический расчет и реализуемость решений. Основные критерии включают программу выпуска, количество операций, размеры и точность деталей, максимальную загрузку и минимальное число единиц оборудования [5, 6].

С учетом этих требований методика будет представлять систематический подход к выбору металлорежущего оборудования, учитывая технологические и экономические вопросы.

Пример выбора оптимального состава оборудования производственного участка для изготовления детали «Вилка»

В качестве примера проиллюстрируем выбор состава технологического оборудования для механической обработки детали «Вилка» в условиях среднесерийного производства (объем выпуска $N = 45\,000$ шт./год).

1. Дифференциация поверхностей детали и определение их вида (модуля)

Для обеспечения формализации и создания структурированных таблиц необходимо систематизировать информацию о поверхностях детали. Для этого каждая поверхность нумеруется (рис. 1).

Далее необходимо определить модуль каждой поверхности (табл. 1). Данная таблица представляет собой систематизированный справочник, содержащий данные для определения модуля поверхности на основе анализа научно-технической литературы

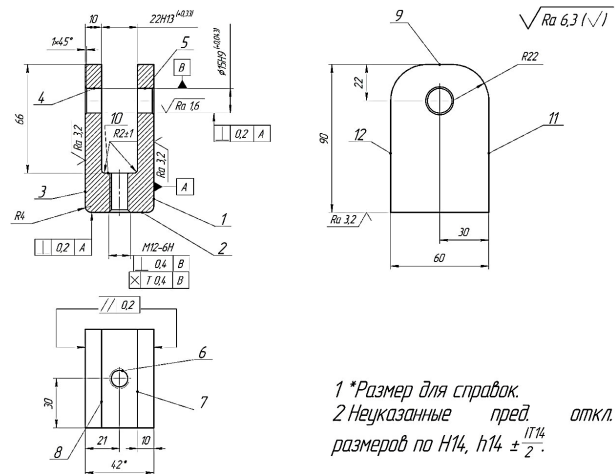


Рис. 1. Эскиз детали «Вилка» с номерами обрабатываемых поверхностей
Fig. 1. Sketch of the “Fork” part with the numbers of the machined surfaces

[7, с. 37] и использования специализированных онлайн-сервисов по выбору инструмента.

Назначение модулей поверхностей необходимо для определения нужной группы оборудования по числу управляемых осей (табл. 1), а также для возможности дальнейшей оптимизации процесса выбора инструмента, расчёта режимов резания и определения последовательности операций.

Были определены следующие группы оборудования по числу управляемых осей: Г1 — Токарный станок с двумя управляемыми осями (X и Z). Г2 — Токарный станок с тремя управляемыми осями (X, Y и C) и с приводным инструментом (П). Г3 — Токарный станок с четырьмя управляемыми осями (X, Y, Z и C) и с приводным инструментом (П). Г4 — Токарный обрабатывающий центр с пятью управляемыми осями (X, Y, Z, B и C) и с приводным инструментом (П). Г5 — Фрезерный станок с тремя управляемыми осями (X, Y и Z). Г6 — Фрезерный станок с четырьмя управляемыми осями (X, Y, Z и B). Г7 — Фрезерный обрабатывающий центр 3+2 управляемыми осями (X, Y, Z, C и A (или ось B)). Г8 — Фрезерный обрабатывающий центр с пятью управляемыми осями (X, Y, Z, C и A (или ось B)).

2. Определение количества технологических переходов для каждой поверхности

Количество технологических переходов, а также методы обработки для каждой поверхности определяются с помощью коэффициента уточнения [8]. Полученные результаты, а также модули поверхностей формируются в таблицу (табл. 2).

Таблица 1. Модули поверхностей
Table 1. Surface modules

Модули поверхностей		Группа оборудования							
№	Геометрическая характеристика	Токарная				Фрезерная			
		Г1	Г2	Г3	Г4	Г5	Г6	Г7	Г8
1	Внешняя цилиндрическая	+	+	+	+	+	+	+	+
2	Внутренняя цилиндрическая перпендикулярная к измерительной базе	+	+	+	+	+	+	+	+
3	Внешняя коническая	+	+	+	+	+	+	+	+
4	Внутренняя коническая перпендикулярная к измерительной базе	+	+	+	+	+	+	+	+
5	Шпоночный паз	–	+	+	+	+	+	+	+
6	Карман (паз)	–	–	+	+	+	+	+	+
7	Плоская, открытая	–	–	+	+	+	+	+	+
8	Уступ	–	–	+	+	+	+	+	+
9	Внутренняя цилиндрическая под углом к измерительной базе	–	–	–	+	–	+	+	+
10	Внутренняя коническая под углом к измерительной базе	–	–	–	+	–	+	+	+
11	Фасонная поверхность	–	–	–	–	–	–	–	+

Таблица 2. Количество переходов каждой поверхности
Table 2. Number of transitions of each surface

№ поверхности	Модуль поверхности	IT	Ra, мкм	№ перехода	Метод обработки
1	7	14	3,2	0	Заготовка
				1	Цилиндрическое фрезерование черновое
2	7	14	3,2	0	Заготовка
				1	Цилиндрическое фрезерование черновое
3	7	14	3,2	0	Заготовка
				1	Цилиндрическое фрезерование черновое
4	2	9	3,2	1	Сверление сборными сверлами
				2	Рассверливание цельным сверлом
5	2	9	3,2	1	Сверление сборными сверлами
				2	Рассверливание цельным сверлом
6	2	6H	0,63	1	Сверление сборными сверлами
				2	Нарезание резьбы внутренней метчиком
7	6	13	6,3	1	Дисковое фрезерование черновое
8	6	13	6,3	1	Дисковое фрезерование черновое
9	7	14	6,3	0	Заготовка
				1	Дисковое фрезерование черновое
10	6	13	6,3	1	Цилиндрическое фрезерование черновое
11	7	14	6,3	0	Заготовка
				1	Торцевое фрезерование черновое
12	7	14	6,3	0	Заготовка
				1	Торцевое фрезерование черновое

3. Определение вида технологической базы для каждой поверхности

Для составления маршрута обработки детали необходимо определить вид технологической базы для каждой поверхности детали.

Для приближенного определения базисующих поверхностей используются следующие выражения [9]:

$$l_x = 0,25(L_y + L_z), \quad (1)$$

$$l_y = 0,25(L_x + L_z), \quad (2)$$

$$l_z = 0,25(L_x + L_y), \quad (3)$$

где l_x, l_y, l_z — наименьшая допустимая протяженность выбранной поверхности вдоль осей OX, OY и OZ для возможности угловой ориентации заготовки; L_x, L_y и L_z — габаритные размеры детали вдоль осей OX, OY и OZ соответственно.

Для упрощения выражения (1)–(3) были записаны в столбец «Вид базы» при помощи логических формул в электронной таблице. После чего была сформирована табл. 3.

4. Выбор инструмента, расчёт режимов резания, необходимой мощности и коэффициентов загрузки оборудования для каждой поверхности

Выбор инструмента и расчёт режимов резания, таких как частота вращения шпинделя (n), мощность (P), минутная подача (S_m) и штучное время об-

Таблица 3. Определение вида технологической базы для каждой поверхности
Table 3. Determining the type of technological base for each surface

№ поверхности	Модуль поверхности	Размеры поверхностей			Вид базы
		42	60	90	
		OX, мм	OY, мм	OZ, мм	
1	7	—	60	90	Установочная
2	7	42	60	—	Установочная
3	7	—	60	90	Установочная
4	2	10	—	—	Двойная опорная
5	2	10	—	—	Двойная опорная
6	2	—	—	24	Двойная опорная
7	6	—	60	66	Установочная
8	6	—	60	66	Установочная
9	7	10	16	—	Опорная
10	6	22	60	—	Направляющая
11	7	42	—	90	Установочная
12	7	42	—	90	Установочная

Таблица 4. Расчёт режимов резания и коэффициентов загрузки оборудования
Table 4. Calculation of cutting modes and equipment utilization factors

№ поверхности	Метод обработки	n , об/мин	P , кВт	S_m , мм/мин	T , мин	K
1	Цилиндрическое фрезерование черновое	318	0,54	191	0,53	0,196
2	Цилиндрическое фрезерование черновое	318	0,54	191	0,45	0,168
3	Цилиндрическое фрезерование черновое	318	0,54	191	0,53	0,196
4	Сверление сборными сверлами	682	1,16	136	0,33	0,122
	Рассверливание цельным сверлом	1273	0,08	76	0,59	0,219
5	Сверление сборными сверлами	682	1,16	136	0,33	0,122
	Рассверливание цельным сверлом	1273	0,08	76	0,59	0,219
6	Сверление сборными сверлами	936	0,66	136	0,19	0,07
	Нарезание резьбы внутренней метчиком	265	0,31	464	0,15	0,055
7	Дисковое фрезерование черновое	159	6,37	143	1,28	0,474
8	Дисковое фрезерование черновое	159	6,37	143	1,28	0,474
9	Цилиндрическое фрезерование черновое	796	4,72	318	0,45	0,168
10	Дисковое фрезерование черновое	159	0,46	215	0,61	0,226
11	Торцевое фрезерование черновое	318	0,44	229	0,53	0,196
12	Торцевое фрезерование черновое	318	0,44	229	0,53	0,196

работки поверхности (T) осуществляются с использованием веб-систем подбора инструментов для каждой обрабатываемой поверхности для каждого технологического перехода.

Затем для каждого перехода рассчитывается коэффициент загрузки оборудования (K) по формуле (4) для всего годового объёма выпуска изделий (N). Все полученные данные заносятся в табл. 4.

$$K = \frac{T \cdot N}{E \cdot 60}, \quad (4)$$

где N — годовой объём выпуска детали, шт./год; T — штучное время обработки одной поверхности, мин.; E — эффективный годовой фонд времени, ч.

5. Составление графа взаимосвязи поверхностей
Для определения последовательности обработки поверхностей детали составляется граф взаимосвязи поверхностей каждой детали (рис. 2).

Правила составления графа:

1. Если поверхности связаны только размером, то поверхности соединяются основной линией.

2. Если поверхности связаны только допусками взаимного расположения, то поверхности соединяются стрелкой в направлении от поверхности, которая является базой.

3. Окружностями на графе обозначаются виды баз: утолщенной окружностью — установочная, утолщенной двойной окружностью — двойная направляющая, тонкой окружностью — направляющая, тонкой двойной окружностью — двойная опорная, штриховой окружностью — опорная база.

4. Если невозможно обработать поверхность, пока не будет обработана другая поверхность, то на графе данная взаимосвязь показывается при помощи штриховой стрелки от главной поверхности к той, которую необходимо обработать.

5. Основная конструкторская база обозначается буквой М.

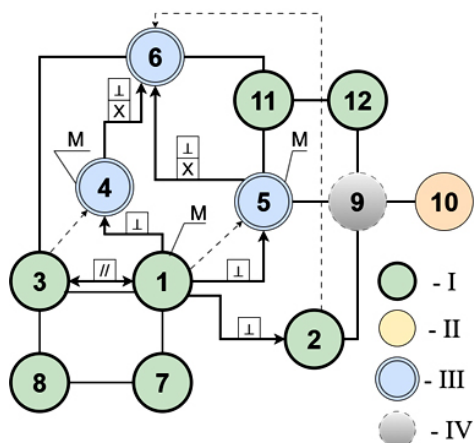


Рис. 2. Граф взаимосвязи поверхностей детали «Вилка»: I — установочная база, II — направляющая база, III — двойная опорная, IV — опорная база, M — основная конструкторская база

Fig. 2. Graph of the relationship between the surfaces of the "Fork" part: I — installation base, II — guide base, III — double support base, IV — support base, M — main design base

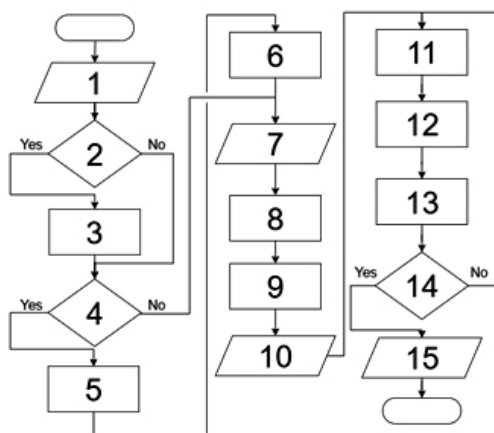


Рис. 3. Алгоритм составления графа маршрутов обработки
Fig. 3. Algorithm for drawing up a graph of processing routes

6. Составление вариантов маршрутов обработки

Составление вариантов маршрутов обработки можно описать с помощью алгоритма (рис. 3).

Каждый блок данного алгоритма представлен в виде графического элемента и отражает конкретный этап при формировании графа маршрута обработки. Состав блоков: Блок 1. Определение номера, модуля, вида базы и размеров всех поверхностей. Блок 2. Условие: «Есть двойные направляющие базы?». Блок 3. Выбор наибольшей из двойных направляющих $L_a = \max(L_d)$. Блок 4. Условие: «Есть установочные базы?». Блок 5. Выбор наибольшей из установочных $L_b = \max(L_w)$. Блок 6. Выбор поверхностей в качестве направляющей или двойной опорной базы. Блок 7. Сформированные комплекты баз вида [двойная направляющая] и/или [установочная + (двойная опорная или направляющая)], составляется таблица (табл. 5). Блок 8. Определение доступных для обработки поверхностей при базировании на каждый комплект баз на технологиче-

Таблица 5. Минимальные и максимальные коэффициенты загрузки фрезерного оборудования

Table 5. Minimum and maximum utilization rates of milling equipment

Количество управляемых координат	min K	max K
Г5	0,6	0,85
Г6	0,65	0,9
Г7/8	0,7	0,92

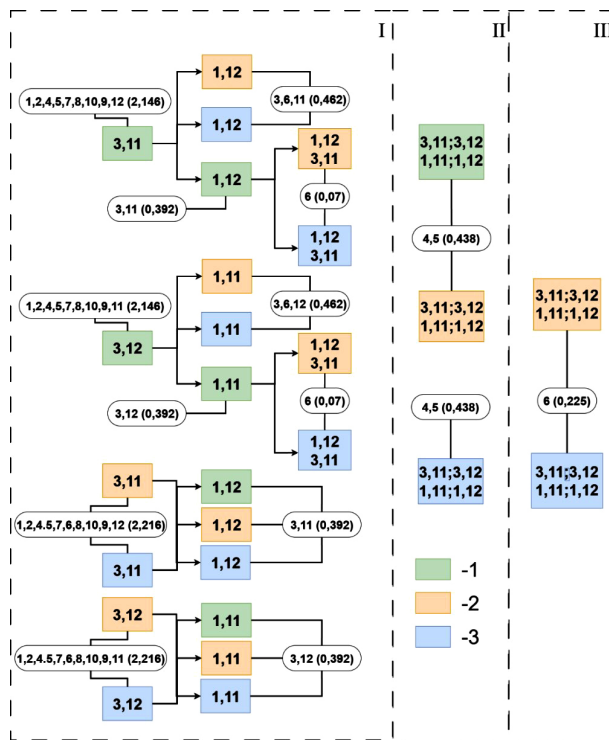


Рис. 4. Граф маршрутов обработки:
I — черновая обработка, II — полуфинишная обработка,
III — финишная обработка; 1 — Г5, 2 — Г6, 3 — Г7/8

Fig. 4. Graph of processing routes:
I — rough processing, II — semi-finishing processing,
III — finishing processing; 1 — G5, 2 — G6, 3 — G7/8

ском оборудовании с разным числом управляемых осей. Блок 9. Исключение невзаимосвязанных поверхностей с базирующими и обрабатываемыми. Блок 10. Составление таблицы [комплект баз / обрабатываемые поверхности]. Блок 11. Выбор столбца, в котором присутствует обработка основной конструкторской базы. Блок 12. Запись вариантов первого перехода при установке за комплект баз, соответствующем выбранному столбцу таблицы на технологическом оборудовании с разным числом управляемых осей. Блок 13. Формирование продолжения маршрута обработки с выбором следующего комплекта баз для обработки оставшихся поверхностей. Блок 14. Условие: «Завершены все этапы обработки?». Блок 15. Граф маршрутов обработки.

В конечном итоге получен граф (рис. 4), который представляет собой последовательность операций, представленную комбинацией базирующих и обрабатываемых поверхностей, записанных их номерами, а также получаемый коэффициент загрузки оборудования при выполнении указанной операции. Операции разделяются по этапам механической обработки на черновые, получистовые и чистовые.

Таблица 6. Часть вариантов объединённых маршрутов обработки
Table 6. Some options for combined processing routes

№ варианта маршрута	K по числу управляемых осей					
	Кол.	Г5	Кол.	Г6	Кол.	Г7/8
1.1.1	3	0,861	1	0,687	0	—
1.1.2	3	0,861	1	0,462	1	0,225
1.2.1	3	0,715	2	0,563	0	—
1.2.2	3	0,715	1	0,900	1	0,225
1.3.1	3	0,715	1	0,687	1	0,438
1.3.2	3	0,914	1	0,462	1	0,663
...						
4.3.1	3	0,846	1	0,225	1	0,508
4.3.2	3	0,846	0	—	1	0,733
...						
8.2.1	3	0,846	1	0,663	1	0,070
8.2.2	3	0,846	1	0,438	1	0,295
8.3.1	3	0,846	1	0,225	1	0,508
8.3.2	3	0,846	0	—	1	0,733
9.1.1	1	0,830	3	0,814	0	—
9.1.2	1	0,830	3	0,739	1	0,225
9.2.1	1	0,392	3	0,960	0	—
9.2.2	1	0,392	3	0,885	1	0,225
9.3.1	1	0,392	3	0,814	1	0,438
9.3.2	1	0,392	3	0,739	1	0,663
...						
10.2.1	0	—	4	0,818	0	—
10.2.2	0	—	4	0,762	1	0,225
...						

После составления маршрута обработки необходимо преобразовать граф в таблицу.

7. Объединение вариантов маршрутов обработки для разных деталей

Многообразие вариантов маршрутов обработки приводит к большому количеству их сочетаний. Для удобного рассмотрения всех вариантов представим их в виде таблицы, после чего рассмотрим их комбинации. Комбинации представляют собой сочетание выполнения черновых, получистовых и чистовых этапов обработки детали.

Основным критерием при сравнении полученных комбинаций является коэффициент загрузки оборудования. Его значение не должно превышать коэффициент использования, но должно быть больше минимального коэффициента загрузки, обеспечивающего экономически эффективное использование станка. Например, минимальными коэффициентами загрузки и коэффициентом использования (максимальным коэффициентом загрузки) фрезерных станков в зависимости от количества управляемых координат в первом приближении выбраны значения (табл. 5).

При применении электронных таблиц были выведены логические формулы, которые упрощают перебор всех возможных вариантов и выводят в таблицу варианты объединённых маршрутов обработки (табл. 6).

В соответствии с полученными данными по коэффициенту загрузки для каждого варианта маршрута обработки принимаем в качестве вариантов

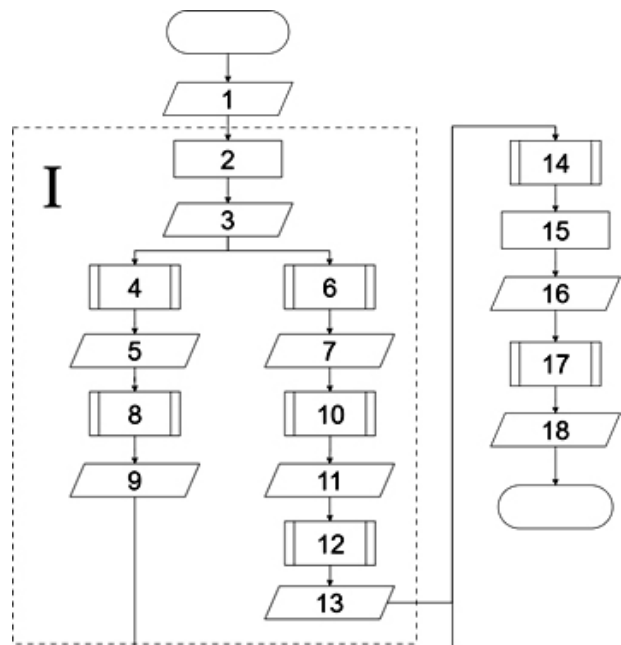


Рис. 5. Обобщённый алгоритм выбора оптимального состава технологического оборудования производственного участка:

I — блоки, выполняемые для каждой детали

Fig. 5. Generalized algorithm for selecting the optimal composition of technological equipment for a production site:

I — blocks performed for each part

для дальнейшего экономического сравнения маршруты номер 9.1.1, 10.2.1, 16.2.1 и другие.

Обобщенный алгоритм выбора оптимального состава технологического оборудования (рис. 5), представляет собой последовательность выполнения следующих действий:

Блок 1. Исходные данные: годовой объем выпуска (N), номенклатура деталей (H). Блок 2. Каждой детали каждой поверхности присваивается номер и определяется её модуль. Блок 3. Номер и модуль каждой поверхности. Блок 4. Для каждой обрабатываемой поверхности определяется метод обработки и количество технологических переходов по коэффициенту уточнения (ϵ). Блок 5. Методы обработки каждой поверхности. Блок 6. Рассматриваются возможности использования каждой поверхности детали в качестве технологической базы. Блок 7. Определение вида технологической базы для каждой поверхности. Блок 8. Выбор режущего инструмента, режимов резания, штучного времени обработки поверхности (T) и коэффициента загрузки (K) для каждой поверхности. Блок 9. Режущий инструмент, режимы резания, T и K для каждой поверхности. Блок 10. Составление графа, на котором показана размерная взаимосвязь поверхностей и взаимосвязь по допускам взаимного расположения. Блок 11. Граф взаимосвязей поверхностей. Блок 12. Составление графа возможных вариантов маршрутного технологического процесса. Блок 13. Граф маршрутов обработки детали. Блок 14. Объединение вариантов маршрутов всей номенклатуры деталей. Блок 15. Выбор вариантов маршрутных технологических процессов по критериям выбора оборудования. Блок 16. Варианты объединённых маршрутов обработки. Блок 17. Экономическое сравнение и окончательный выбор оборудования [10]. Блок 18. Модели технологического оборудования.

Заключение

Разработан алгоритм выбора оптимального состава оборудования производственного участка, учитывающий технические, экономические и организационные факторы. Инструмент значительно повышает эффективность планирования производственных участков.

Перспективное развитие включает внедрение методов машинного обучения для ускорения обработки данных и разработку критериев отбора оптимальных решений (актуально для двух корпусов — более 10 млн комбинаций).

Практическое применение алгоритма возможно при проектировании новых участков, модернизации существующих производств, оптимизации производственных процессов.

Внедрение алгоритма обеспечит существенное сокращение временных и финансовых затрат на принятие решений по оснащению производственных участков.

Список источников / References

1. Мазурин Э. Б., Савенко Е. В. Механизм выбора оборудования для различных типов производства // Омский научный вестник. 2022. № 1 (181). С. 19–24. DOI: 10.25206/1813-8225-2022-181-19-24. EDN: SFHKTL.

Mazurin E. B., Savenko E. V. Mekhanizm vybora oborudovaniya dlya razlichnykh tipov proizvodstva [Mechanism of equipment selection for different types of production]. Omskiy nauchnyy vestnik. Omsk Scientific Bulletin. 2022. No. 1 (181). P. 19–

24. DOI: 10.25206/1813-8225-2022-181-19-24. EDN: SFHKTL. (In Russ.).

2. Лазарь В. В. Возможности использования интегрального показателя качества при выборе технологического оборудования по производству гильз цилиндров // Чтения академика В. Н. Болтинского: Сборник статей семинара. Москва, 20–21 января 2021 г. Том Часть 2. Москва: ООО «Сам полиграфист». 2021. С. 63–68. EDN: HMIICD.

Lazar V. V. Vozmozhnosti ispol'zovaniya integral'nogo pokazatelya kachestva pri vybere tekhnologicheskogo oborudovaniya po proizvodstvu gil'z tsilindrov [Possibilities of using an integral quality indicator when selecting technological equipment for the production of cylinder sleeves]. Chteniya akademika V. N. Boltinskogo: Sbornik statey seminar. Readings of Academician V. N. Boltinsky: Collection of Seminar Papers. Moscow, 2021. Vol. Part 2. P. 63–68. EDN: HMIICD. (In Russ.).

3. Rubayet Karim, Karmaker C. L. Machine Selection by AHP and TOPSIS Methods. *American Journal of Industrial Engineering*. 2016. Vol. 4, no. 1. P. 7–13. DOI: 10.12691/ajie-4-1-2.

4. Вахитова Р. И., Думлер Е. Б., Булюкова Ф. З., Захарова Е. Ф. Повышение эффективности многономенклатурного производства на основе моделирования автоматизированного технологического оборудования: моногр. Альметьевск: Альметьевский государственный нефтяной институт, 2019. 92 с. ISBN 978-5-94454-039-3. EDN: CSRVTVQ.

Vakhitova R. I., Dumler E. B., Bulyukova F. Z., Zakharova E. F. Povysheniye effektivnosti mnogonomenklatur'nogo proizvodstva na osnove modelirovaniya avtomatizirovannogo tekhnologicheskogo oborudovaniya [Improving the efficiency of multi-product production based on modeling automated technological equipment]. Almet'yevsk, 2019. 92 p. ISBN 978-5-94454-039-3. EDN: CSRVTVQ. (In Russ.).

5. Мазурин Э. Б., Савенко Е. В. Методика выбора оборудования для предприятий с единичным типом производства // Инновации в менеджменте. 2021. № 4 (30). С. 24–29. EDN: NXSLAN.

Mazurin E. B., Savenko E. V. Metodika vybora oborudovaniya dlya predpriyatiy s edinichnym tipom proizvodstva [Methods of equipment selection for enterprises with a single type of production]. Innovatsii v menedzhmente. *Innovations in Management*. 2021. No. 4 (30). P. 24–29. EDN: NXSLAN. (In Russ.).

6. Лазаренко Г. П. Выбор модели металлорежущего станка: формализованный подход // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2013. № 12. С. 10–28. DOI: 10.7463/1213.0640867. EDN: QENFIS.

Lazarenko G. P. Vybora modeli metallorezhushchego stanka: formalizovanny podkhod [Selection of a metal-cutting machine model: a formalized approach]. Nauka i obrazovaniye: nauchnoye izdaniye MG TU im. N. E. Bauman. *Science and Education: A Scientific Periodical of the Bauman Moscow State Technical University*. 2013. No. 12. P. 10–28. DOI: 10.7463/1213.0640867. EDN: QENFIS. (In Russ.).

7. Базров Б. М. Модульная технология в машиностроении. Москва: Машиностроение, 2001. ISBN 5-217-03061-5. EDN: WWFEPV.

Bazrov B. M. Modul'naya tekhnologiya v mashinostroyenii [Modular technology in mechanical engineering]. Moscow, 2001. ISBN 5-217-03061-5. EDN: WWFEPV. (In Russ.).

8. Воронцов А. Л., Албагачиев А. Ю., Султан-Заде Н. М. Теоретические основы обработки металлов в машиностроении: моногр. Старый Оскол: Тонкие наукоемкие технологии, 2017. 556 с. ISBN 978-5-94178-384-7. EDN: JDOOZA.

Vorontsov A. L., Albagachiev A. Yu., Sultan-Zade N. M. Teoreticheskie osnovy obrabotki metallov v mashinostroyenii [Theoretical foundations of metal processing in mechanical engineering]. Stary Oskol, 2017. 556 p. ISBN 978-5-94178-384-7. EDN: JDOOZA. (In Russ.).

9. Старостин В. Г., Лелюхин В. Е. Формализация проектирования процессов обработки резанием. Москва: Машиностроение, 1986. 136 с.

Starostin V. G., Lelyukhin V. E. Formalizatsiya proyektirovaniya protsessov obrabotki rezaniyem [Formalizing the design of cutting processes]. Moscow, 1986. 136 p. (In Russ.).

10. Лазаренко Г. П. Сравнительный анализ металлорежущих станков при технологическом проектировании // Машиностроение и компьютерные технологии. 2013. № 3. С. 1–16. DOI: 10.7463/0313.0541242. EDN: QABSXV.

Lazarenko G. P. Sravnitel'nyy analiz metallovezhushchikh stankov pri tekhnologicheskoy projektirovani [Comparative analysis of metal-cutting equipment under production engineering]. *Mashinostroyeniye i komp'yuternyye tekhnologii. Science and Education: A Scientific Periodical of the Bauman Moscow State Technical University*. 2013. No. 3. P. 1–16. DOI: 10.7463/0313.0541242. EDN: QABSXV (In Russ.).

КРАСКО Александр Сергеевич, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры МТЗ «Технологии машиностроения» Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет), г. Москва; доцент кафедры цифровых и аддитивных технологий МИРЭА — Российского технологического университета, г. Москва.

SPIN-код: 3420-9013

AuthorID (РИНЦ): 730859

ORCID: 0000-0001-9556-9213

AuthorID (SCOPUS): 57204283028

Адрес для переписки: krasko_as@mail.ru

КРУЖКОВА Мариана Станиславовна, преподаватель кафедры цифровых и аддитивных технологий МИРЭА — Российского технологического университета, г. Москва.

Адрес для переписки: kruzhkova.m.s@yandex.ru

ПУПУКИН Сергей Андреевич, магистрант кафедры цифровых и аддитивных технологий МИРЭА — Российского технологического университета, г. Москва.

Адрес для переписки: psa0601@mail.ru

Прозрачность финансовой деятельности: авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.

Статья поступила в редакцию 15.10.2025; одобрена после рецензирования 09.12.2025; принята к публикации 16.12.2025.

KRASKO Aleksandr Sergeyevich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Mechanical Engineering Technologies Department, Bauman Moscow State Technical University (National Research University), Moscow; Associate Professor of the Digital and Additive Technologies Department, MIREA — Russian Technological University, Moscow. SPIN-code: 3420-9013

AuthorID (RSCI): 730859

ORCID: 0000-0001-9556-9213

AuthorID (SCOPUS): 57204283028

Correspondence address: krasko_as@mail.ru

KRUZHKOVA Mariana Stanislavovna, Lecturer of the Digital and Additive Technologies Department, MIREA — Russian Technological University, Moscow. Correspondence address: kruzhkova.m.s@yandex.ru

PUPUKIN Sergey Andreevich, Master's Student of the Digital and Additive Technologies Department, MIREA — Russian Technological University, Moscow. Correspondence address: psa0601@mail.ru

Financial transparency: the authors have no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.

The article was submitted 15.10.2025; approved after reviewing 09.12.2025; accepted for publication 16.12.2025.

ПЛАВНОЕ СОПРЯЖЕНИЕ СПЛАЙНОВЫХ КРИВЫХ С ОБЕСПЕЧЕНИЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ГЛАДКОСТИ

В. Г. Муфтеев¹, Ф. Т. Зиганшина², В. И. Гумеров

¹ООО «СЗД ЛАБС», Россия, 127106, г. Москва, Алтуфьевское шоссе, 1

²Уфимский государственный нефтяной технический университет,
Россия, 450044, г. Уфа, ул. Космонавтов, 8

Авторами разработан программно-методический комплекс C3D FairCurveModeler, как раздел геометрического ядра C3D, для моделирования кривых и поверхностей высокого качества по критериям плавности. Функционал C3D доступен для разработчиков систем автоматизированного проектирования и приложений через "C3D ToolKit".

Гладкое сопряжение двух кривых — одна из основных и сложных задач геометрического моделирования в системах автоматизированного проектирования. В данной статье предлагается способ построения кривой плавного сопряжения двух сплайновых кривых произвольного формата и произвольных степеней с обеспечением произвольного порядка гладкости.

Формула способа заключается в следующем: фиксируются точки сопряжения на исходных кривых, затем фиксируется сегмент сплайна первой кривой до точки сопряжения, который станет начальным сегментом сплайновой кривой сопряжения, а также сегмент сплайна второй кривой после точки сопряжения, который будет конечным сегментом этой кривой. Эти фиксированные сегменты участков сопряжения приводятся к формату рациональной кривой Безье, после чего степени этих кривых приводятся к единому заданному значению с помощью повышения степени, при этом геометрия кривых не меняется. Далее B -полигоны кривых Безье преобразуются в открытый S -полигон без изменения геометрии. На следующем этапе строится S -полигон кривой сопряжения, концевые участки которого совпадают с S -полигонами исходных участков. В конечном итоге на открытом S -полигоне определяется интегральная рациональная B -сплайновая кривая сопряжения.

Концевые сегменты интегральной сплайновой кривой сопряжения будут геометрически точно совпадать с сегментами сопряжения исходных кривых. Порядок гладкости участка сопряжения с сегментами сопряжения исходных кривых может быть выше порядка гладкости исходных кривых (в приложении C3D FairCurveModeler до G9 при степени сплайна 10). В общем случае порядок гладкости интегральной кривой имеет порядок гладкости, совпадающий с наименьшим порядком гладкости исходных кривых.

Предложенный метод построения сопряжения адаптируется для редактирования участка геометрической рациональной сплайновой кривой Безье.

Ключевые слова: геометрическое ядро C3D, FairCurveModeler, сплайн, сопряжение высокого порядка, сопряжение порядка G9, B -сплайновая кривая, кривая Безье, NURBS-кривая.

Для цитирования: Муфтеев В. Г., Зиганшина Ф. Т., Гумеров В. И. Плавное сопряжение сплайновых кривых с обеспечением высокого порядка гладкости // Омский научный вестник. 2026. № 1 (197). С. 46—59. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-46-59. EDN: FMINRZ.



© Муфтеев В. Г., Зиганшина Ф. Т., Гумеров В. И., 2026.
Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

SMOOTH JOINING OF SPLINE CURVES ENSURING A HIGH ORDER OF SMOOTHNESS

V. G. Mufteev¹, F. T. Ziganshina², V. I. Gumerov

¹LLC "C3D Labs", Russia, Moscow, Altufyevskoye Highway, 1, 127106

²Ufa State Petroleum Technological University, Russia, Ufa, Kosmonavtov St., 8, 450044

The authors have developed the C3D FairCurveModeler software and methodological suite, a subset of the C3D geometric kernel, for modeling high-quality curves and surfaces based on smoothness criteria. C3D functionality is available to CAD and application developers through the C3D ToolKit.

Smoothly blending two curves is one of the fundamental and complex problems of geometric modeling in computer-aided design systems. This article proposes a method for constructing a smoothly blended curve between two spline curves of arbitrary format and arbitrary degrees, ensuring an arbitrary degree of smoothness.

The formula of the method is as follows: the conjugation points on the original curves are fixed, then the spline segment of the first curve is fixed before the conjugation point, which will become the initial segment of the conjugation spline curve, as well as the spline segment of the second curve after the conjugation point, which will be the final segment of this curve. These fixed segments of the fillet areas are converted to the format of a rational Bezier curve, after which the degrees of these curves are converted to a single specified value by increasing the degree, while the geometry of the curves does not change. Next, the B -polygons of the Bezier curves are transformed into an open S -polygon without changing the geometry. In the next step, an S -polygon of the blend curve is constructed, the end sections of which coincide with the S -polygons of the original sections. Ultimately, an integral rational B -spline blend curve is defined on the open S -polygon.

The end segments of the integral spline blend curve will geometrically precisely match the blend segments of the original curves. The smoothness order of the blend segment with the blend segments of the original curves may be higher than that of the original curves (in the C3D FairCurveModeler application, up to G9 for spline degree 10). In general, the order of smoothness of the integral curve is the same as the lowest order of smoothness of the original curves.

The proposed method for constructing a conjugation is adapted for editing a section of a geometric rational Bezier spline curve.

Keywords: C3D geometric kernel, FairCurveModeler, spline, high-order conjugation, G9 conjugation, B -spline curve, Bezier curve, NURBS-curve.

For citation: Mufteev V. G., Ziganshina F. T., Gumerov V. I. Smooth joining of spline curves ensuring a high order of smoothness. *Omsk Scientific Bulletin*. 2026. No. 1 (197). P. 46–59. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-46-59. EDN: FMINRZ.



© Mufteev V. G., Ziganshina F. T., Gumerov V. I., 2026.
The content is available under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Введение

В работе [1] предложен многокритериальный подход к оценке качества функциональных и эстетических кривых. Функциональные и эстетические кривые должны обладать высоким качеством по критериям плавности. Эстетические кривые должны удовлетворять также законам технической эстетики.

Аналитические кривые, благодаря своим уникальным параметрам плавности, находят широкое применение в промышленном дизайне.

Особенное отношение дизайнеров к кривым с определенным законом изменения кривизны: к окружности, клотоиде и логарифмической спирали. Действительно, эти аналитические кривые обладают уникальными свойствами функции кривизны. С помощью сплайновых методов моделирования кривых свободной формы просто невозможно воспроизвести кривые с такими свойствами [2].

В Mathematica с помощью формулы суперспирали [3] можно вычислять все известные спирали и любые спиралевидные кривые с монотонным изменением кривизны и затем в программе C3D FairCurveModeler подготовить их NURBS-шаблоны. В работе [4] предлагается технология построения NURBS-шаблонов функциональных и эстетических кривых.

Дизайн не ограничивается одной спиральной кривой. В дизайне требуется моделировать кривые произвольной формы. Существуют методы построения сплайнов 2-го порядка гладкости, составленных из сегментов клотоидной спирали [2, 5] и log-эстетической спирали [6]. Однако интегральная кривая всего лишь 2-го порядка гладкости нивелирует высокое качество спиралей и абсолют-

но не соответствует требованиям к кривым класса F [1].

Не всегда оптимальная кривая определяется аналитической кривой, как, например, профиль зуба (эвольвента окружности), траектория транспортировки груза (линия наискорейшего спуска) или профиль купола (цепная линия). Чаще используются кривые свободной формы в виде сплайновых кривых

Независимо от конкретного изделия функциональные кривые должны быть плавными. Функциональные кривые должны удовлетворять следующим критериям плавности:

- высокий порядок гладкости (не ниже 4-го порядка);
- минимальное число вершин кривой (или минимальное количество экстремумов кривизны);
- малое значение вариации кривизны и скорости изменения кривизны;
- малое значение потенциальной энергии кривой.

Авторы используют программно-методический комплекс C3D FairCurveModeler для моделирования кривых высокого качества по критериям плавности.

Для доступа к функционалу C3D используется Toolkit — комплект разработки программного обеспечения (SDK), отвечающий за построение, редактирование, визуализацию и преобразование геометрических моделей (a software development kit (SDK) responsible for constructing, editing, visualizing, and converting geometric models) [7, 8].

Функционал C3D FairCurveModeler позволяет разрабатывать специализированные приложения для решения конкретных инженерных задач, на-

пример, для профилирования профиля плоского кулачка, без разработок новых опций.

Иногда участок сплайновой кривой должен геометрически точно совпадать с дугой окружности. Глобальный сплайн не позволяет сформировать участок с точной дугой окружности.

В то же время дуга окружности геометрически точно моделируется рациональной кубической сплайновой кривой Безье.

Эту проблему иногда можно свести к задаче построения кривой сопряжения двух кривых различного формата. Такая задача возникает при построении профиля плоского кулачка. Профиль плоского кулачка распредвала двигателя внутреннего сгорания должен иметь т. н. участки "выстоя", совпадающие с окружностью, на которых толкатель неподвижен. При этом сам профиль должен иметь высокий порядок гладкости (не ниже 3-го) [9, 10].

В статье предлагается метод построения участков сопряжения двух кривых с обеспечением высокого порядка гладкости интегральной кривой. Метод позволяет конструировать сколь угодно сложные формы путем сопряжения функциональных и эстетических кривых.

При реализации способа используются различные форматы представления NURBS-кривых (Non Uniform Rational Basis Spline): формат рациональной сплайновой кривой Безье (NURBzS кривой) различных степеней; формат рациональной *B*-сплайновой кривой (NURBS-кривой) кривой различных степеней с открытым (float) *S*-полигоном или закрытым (clamped) *S*-полигоном.

Метод адаптируется для целей локального редактирования NURBS-кривых любого формата и степени. Ниже представим некоторые теоретические основы.

Способ использует команды и опции веб-приложения, разработанного на основе функционала программно-методического комплекса C3D FairCurveModeler.

1. Теоретические основы

Геометрическая интерпретация коэффициентов в формуле российского математика Бернштейна позволила им создать новую парадигму моделирования кривых. Теперь параметрические уравнения Бернштейна [11, 12] называются кривыми Безье. Вычисление точек кривой Безье по алгоритму Кастельжо также имеет геометрически наглядную интерпретацию [13, 14].

Обобщение метода Безье на *B*-сплайновые кривые также является примером геометрически ориентированного подхода [15]. Карл де Бур [16] и независимо от него Кокс [17] установили связь между геометрической формой представления коэффициентов сплайна и формой параметрического сплайна Шенберга [18, 19].

Разработаны алгоритмы преобразований *B*-сплайновой кривой в формат сплайновой кривой Безье (SB-алгоритм) и наоборот (BS-алгоритм) [20, 21].

В C3D FairCurveModeler реализованы обобщенные алгоритмы преобразований NURBS-кривых общего вида (NSB-алгоритм преобразования NURBS в NURBzS, NBS-алгоритм преобразования NURBzS в NURBS). Реализованы опции разбиения (subdivide) NURBS-кривых, повышения степени NURBzS кривых, конвертирования закрытого (clamped) *S*-полигона NURBS-кривой в открытый (float) *S*-полигон (и наоборот) [8].

1.1. Рациональная кривая Безье

Вычислительные аспекты и геометрические приложения хорошо рассмотрены в работах [13, 14, 22–24].

Дуга рациональной параметрической кривой степени *n* на отрезке [0,1] в формате представления Безье – Бернштейна определяется векторной функцией [7, 8, 18–20]

$$r(u) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i^n(u) r_i}{\sum_{i=0}^n w_i b_i^n(u)}, \quad (1)$$

где r_i , $i = 0 \dots n$ — вершины управляющей ломаной (*B*-полигона); w_i , $i = 0, \dots, n$ — веса вершин управляющей ломаной; $b_i^n(u) = \frac{n!}{(n-i)!i!} u^i (1-u)^{n-i}$, $i = 0, \dots, n$ — базисные полиномы Бернштейна степени *n*.

Последовательность *B*-полигонов отдельных сегментов представляет собой обобщенный *B*-полигон (*GB*-полигон).

1.2. Рациональная *B*-сплайновая кривая

Рациональная *B*-сплайновая кривая степени *m* определяется выражением [25]

$$r(u) = \frac{\sum_{i=-k_1}^{n+k_2} w_i B_i^m(u) V_i}{\sum_{i=-k_1}^{n+k_2} w_i B_i^m(u)}, \quad (2)$$

где $B_i^m(u)$ — *B*-сплайны (базисные сплайны) степени *m*, определенные на сетке

$$\Delta u = \{u_i\}_{i=-m}^{n+m}, \quad u_{i-1} \leq u_i \leq u_{i+1}. \quad (3)$$

$V_i = [V_i^x, V_i^y, V_i^z]$ — вершины сплайнового полигона (*S*-полигона) $\{V_i\}_{i=-k_1}^{n+k_2}$ NURBS-кривой $r(u)$; w_i — весовые коэффициенты ($w_i > 0$); *n* — определяет число узловых точек сплайна $r(u_i)$, $i = 0, \dots, n$; k_1 , k_2 — определяют количество вершин *S*-полигона. Для сплайна четной степени

$$k_1 = \frac{m}{2}, \quad k_2 = \frac{m}{2} - 1.$$

Для сплайна нечетной степени

$$k_1 = k_2 = \frac{m-1}{2}.$$

Практически используются два вида *S*-полигона $\{V_i\}_{i=-k_1}^{n+k_2}$ в зависимости от сетки Δu (3):

1. Открытый (float) *S*-полигон на сетке (3).
2. Закрытый (clamped) *S*-полигон на сетке

$$\Delta u = \{u_i\}_{i=-m}^{n+m},$$

$$u_{-m} = u_{-m+1} = \dots = u_0 < u_1 < \dots < u_{i-1} < u_i < u_{i+1} < \dots < u_n = u_{n+1} = \dots = u_{n+m}. \quad (4)$$

При двух узловых точках сплайна $n = 2$ (сплайн с одной дугой) закрытый *S*-полигон совпадает с *B*-полигоном рациональной кривой Безье – Бернштейна (1).

1.3. Универсальное представление NURBS-кривых

В практических CAD системах (например, КОМПАС [26], ZWCAD [27], которые являются системами автоматизированного проектирования) используется единообразное представление NURBS-кривых.

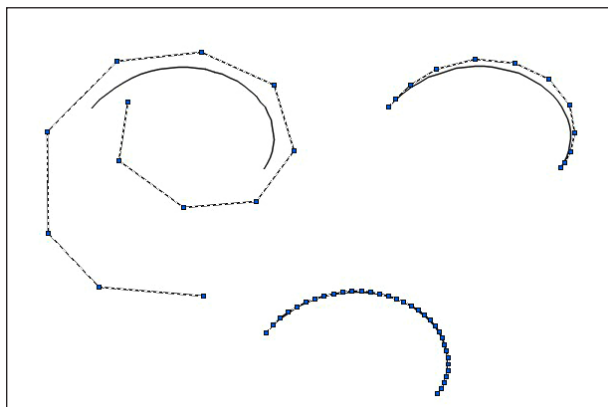


Рис. 1. Различные форматы управляющего сплайнового полигона

Fig. 1. Different formats of the control spline polygon

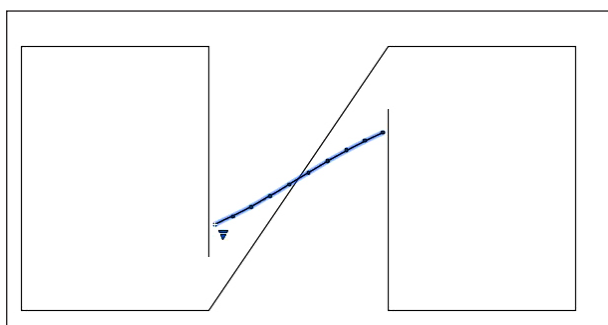


Рис. 2. Рациональная кривая Безье с B -полигоном (выделено) и с S -полигоном в открытом формате

Fig. 2. Rational Bezier curve with B -polygon (highlighted) and with S -polygon in open format

Рациональная сплайновая кривая Безье представляется как B -сплайновая кривая (2) с весовыми функциями (B -сплайнами), которые определяются на расширенной сетке с кратными узлами на границах сегментов сплайновой кривой.

После конвертирования S -полигона B -сплайновой кривой (2), определенной на сетке (3), в обобщенный B -полигон (GB -полигон) сплайновой кривой Безье – Бернштейна, новая сетка для представления сплайновой кривой Безье – Бернштейна в формате B -сплайновой кривой представляет следующую последовательность узлов исходной сетки (5):

$$u_0, \dots, u_0, u_1, \dots, u_1, u_2, \dots, u_2, \dots, u_{i-1}, \dots, u_{i-1}, u_i, \dots, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+1}, \dots, u_n, \dots, u_n = u_{n+1} = \dots u_{n+m} \quad (5)$$

с кратностью $m + 1$ узлов в начале и конце сетки и с кратностью m узлов между сегментами сплайна.

На рис. 1 одна и та же NURBS-кривая 8-й степени представлена с различными форматами управляющего сплайнового полигона: с S -полигоном в открытом формате (слева), с S -полигоном в закрытом формате (справа), с GB -полигоном (внизу).

Важное следствие: рациональная кривая Безье может быть представлена открытым S -полигоном. Действительно, в этом случае рациональная кривая Безье является частным случаем односегментной рациональной B -сплайновой кривой. На рис. 2 показана рациональная кривая Безье 9-й степени с B -полигоном и с S -полигоном в открытом формате.

Модель или уравнение сплайновой кривой (NURBS или NURBzS) однозначно определяется

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	
1													
2													
3	A - number NURBS curve												
4	B - degree of spline												
5	C - number of segments												
6	D - closeness (1 - closed, 2 - unclosed)												
7	E - format (2 -B-spline, 3 - NURBzS)												
8	F - numeration												
9	G - coordinate X												
10	H - coordinate Y												
11	I - coordinate Z												
12	J - weight												
13	K - numeration												
14	L - dots												
15													
16													
17	1	3	2	2	3	1	-7,30E-15	-40	0		1	1	0
18						2	-13,7244	-40	0	0,92045	2	0	
19						3	-25,8111	-33,4985	0	0,92045	3	0	
20						4	-33,3756	-22,047	0		1	4	0
21						5	-37,7278	-15,4585	0	0,971802	5	1	
22						6	-40	-7,89622	0	0,971802	6	1	
23						7	-40	5,02E-15	0		1	7	1
24											8	2	
25											9	2	
26											10	2	
27											11	2	
28													

Рис. 3. Модель NURBS-кривой в Excel

Fig. 3. NURBS curve model in Excel

множеством управляющих вершин S -полигона / GB -полигона (1), (2), множества весовых коэффициентов $\{W\}$ (1), (2) и вектора узлов (или параметрической сетки) (4), (5), (6).

1.4. Файлы NURBS-моделей в FairCurveModeler

На основе функционала C3D FairCurveModeler разработаны приложения CAD-систем, приложения математических систем и веб-приложение [28].

Для демонстрации техники построения сопряжения будем использовать Web FairCurveModeler [29] в интеграции с CAD-системой типа ZWCAD / BricsCAD / AutoCAD / nanoCAD [30 – 32].

Web FairCurveModeler — общедоступное приложение для инженеров-конструкторов. Приложение разработано для повышения качества моделирования функциональных кривых и поверхностей в инженерных проектах по всему миру. Доступ к приложению по ссылке Spliner.ru > Online Modeling.

В системе Web FairCurveModeler модель сплайновой кривой может храниться в Excel (рис. 3).

1.5. Базовые свойства NURBS-кривой

NURBS-кривая обладает следующими важными для предлагаемого метода свойствами:

1) умножение всех весовых коэффициентов на некоторое положительное число не меняет кривую (2);

2) масштабирование и перенос сеток (4), (5) не меняет кривую (2).

1.6. Конвертирование NURBS в NURBzS формат для расчетов

Существуют два эквивалентных основных формата представления NURBS-кривой (2): NURBS в формате рациональной B -сплайновой кривой на сетке (3) и в формате NURBzS в виде рациональной сплайновой кривой Безье на сетке (6). Рациональная B -сплайновая кривая редактируется с помощью управляющего S -полигона. Редактирование S -полигона не изменяет порядка гладкости кривой (2).

Рациональная B -сплайновая кривая всегда может быть преобразована в формат реально-сплайновой NURBzS кривой. В общем случае обратное

преобразование возможно только для реально-сплайновых NURBzS кривых. NURBzS кривая может редактироваться посредством GB-полигона. GB-полигон представляет последовательность локальных B-полигонов рациональных кривых Безье (1). Редактирование GB-полигона в общем случае нарушает порядок гладкости сплайновой кривой.

Для преобразования B-сплайновой кривой в формат сплайновой кривой Безье и обратно независимо друг от друга двумя авторами [20–21] были предложены алгоритмы: SB-алгоритм и BS-алгоритм.

Для взаимного преобразования NURBS-кривой и NURBzS-кривой в работе авторов [21] предложен NSB-алгоритм и NBS-алгоритм.

Применение NSB и NBS-алгоритмов освобождают от необходимости писать специальные алгоритмы для выполнения расчетов над рациональными B-сплайновыми кривыми. Для выполнения операций над B-сплайновой кривой ее необходимо преобразовать в NURBzS-кривую. Над NURBzS-кривой можно выполнять операции [33]:

- вычисления параметров кривой в текущей точке;
- подразбиения кривой (subdivide);
- повышение степени (elevate);
- вставка дополнительной узловой точки сплайна (insertknot);
- обрезка сплайна.

После выполнения этих операций над NURBzS-кривой NURBzS-кривую можно опять преобразовать в формат рациональной B-сплайновой кривой. При этом геометрия кривой не меняется, кроме операции повышения степени. В общем случае операции повышения степени будет менять геометрию сплайна после преобразования в B-сплайновую кривую. Но важным исключением является процедура повышения степени одиночного сегмента NURBzS-кривой (рациональной кривой Безье). Повышение степени и переход к формату B-сплайновой кривой (в частности, с S-полигоном в открытом формате) не меняет геометрии. Именно это свойство является ключевым при построении рациональной B-сплайновой кривой сопряжения.

1.7. Геометрическая составная рациональной кривая Безье

Геометрическая составная рациональная кривая Безье (GNURBzS) является частным случаем составных кривых, составленных из сегментов аналитических кривых различной природы. Сегменты объединяются в составную кривую по условиям со-

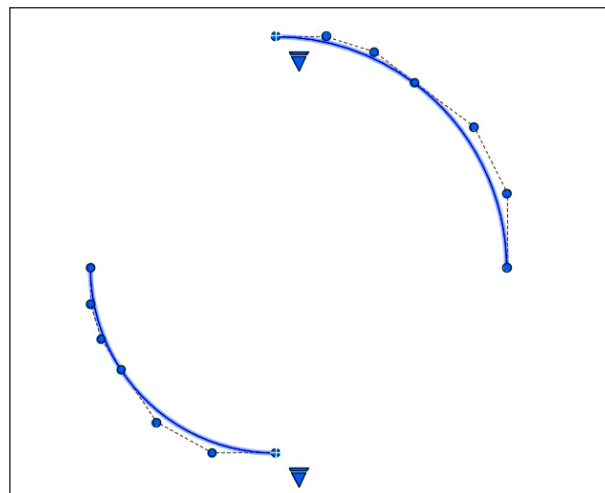


Рис. 4. Двухсегментные NURBzS-кривые
Fig. 4. Two-segment NURBzS curves

впадения касательных прямых и по условиям совпадения значений кривизны в точках стыка сегментов. GNURBzS-кривая состоит из сегментов рациональных кривых Безье (1).

GNURBzS-кривую невозможно преобразовать NBS-алгоритмом в рациональную B-сплайновую кривую с сохранением точной геометрии. Кроме одного важного случая, который является ключевым в предлагаемом методе построения сопряжения. Если из GNURBzS-кривой выделить сегмент и выполнить над сегментом операции разбиения кривой и повышения степени, то полученную реально-сплайновую NURBzS-кривую можно преобразовать в рациональную B-сплайновую кривую без изменения геометрии кривой и далее редактировать кривую на S-полигоне [29].

2. Метод сопряжения рациональных B-сплайновых кривых

2.1. Геометрическая составная рациональная кривая Безье

Разработан метод сопряжения двух кривых произвольных форматов. Интегральная кривая профиля будет плавной кривой с порядком гладкости до 9-го. Используется библиотека базового функционала C3D FairCurveModeler [7, 8].

Отметим важный момент, существенный для способа построения сопряжения двух кривых. Рациональная кривая Безье может рассматриваться

Таблица 1. Модель первой NURBzS-кривой степени 3
Table 1. Model of the first NURBzS-curve of the 3rd degree

1	3	2	2	3	1	-7,30E-15	-40	0	1	1	0
					2	-13,7244	-40	0	0,92045	2	0
					3	-25,8111	-33,4985	0	0,92045	3	0
					4	-33,3756	-22,047	0	1	4	0
					5	-37,7278	-15,4585	0	0,971802	5	1
					6	-40	-7,89622	0	0,971802	6	1
					7	-40	5,02E-15	0	1	7	1
										8	2
										9	2
										10	2
										11	2

Таблица 2. Модель второй NURBS-кривой степени 3
Table 2. Model of the second NURBS-curve of the 3rd degree

1	3	2	2	3	1	0	50	0	1	1	0
					2	10,9143	50	0	0,965789	2	0
					3	21,2685	46,5486	0	0,965789	3	0
					4	30	40	0	1	4	0
					5	42,8286	30,3786	0	0,929618	5	1
					6	50	16,0357	0	0,929618	6	1
					7	50	0	0	1	7	1
										8	2
										9	2
										10	2
										11	2

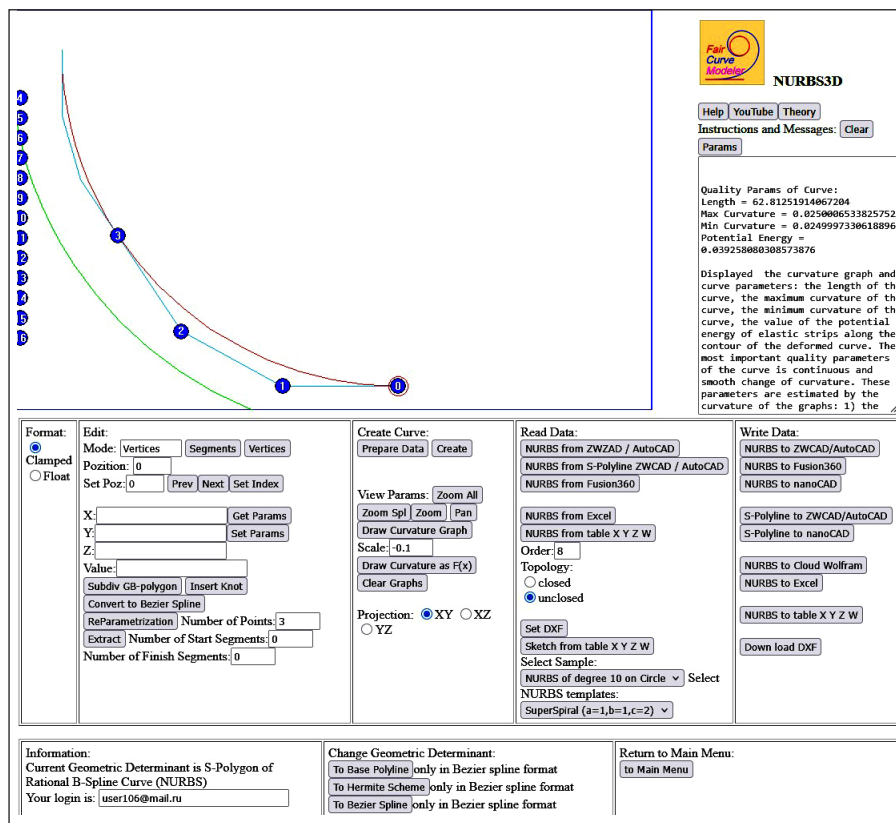


Рис. 5. Двухсегментная NURBS-кривая из табл. 1
Fig. 5. Two-segment NURBS curve from the Table 1

как односегментная рациональная B -сплайновая кривая в закрытом (clamped) формате. И может представляться также в открытом (float) формате. Именно это свойство, которое не афишируется в учебных материалах по NURBS, является основой предлагаемого метода.

В предлагаемом методе используются следующие опции функционала C3D FairCurveModeler [7]:

- преобразование формата представления реальной NURBS-кривой из формата представления рациональной B -сплайновой кривой в формат рациональной сплайновой кривой Безье и наоборот (кривая геометрически не меняется);
- повышение степени NURBS-кривой (кривая геометрически не меняется);
- выделение участка NURBS-кривой;
- преобразование формата NURBS-кривой с управляющим S -полигоном из закрытого (clamped) формата в открытый (float) и наоборот.

Алгоритм сопряжения двух кривых приводится ниже.

2.1.1. Преобразование форматов

Форматы исходных кривых приводятся посредством опции преобразования формата [8] к формату рациональной сплайновой кривой Безье.

Например, пусть исходные кривые в виде дуг кривых радиусов 40 и 50 даны в формате NURBS-кривых (рис. 4, табл. 1, 2).

Такая задача может возникнуть при профилировании плоских кулачков.

Отметим, что NURBS-модели геометрически точно представляют дуги окружностей.

В табл. 1–11 хранятся точные NURBS-модели кривых в виде таблиц Excel (рис. 3).

Данные таблиц читаются в программном комплексе Web FairCurveModeler, который предназначен для существенного улучшения сплайновых кривых и поверхностей.

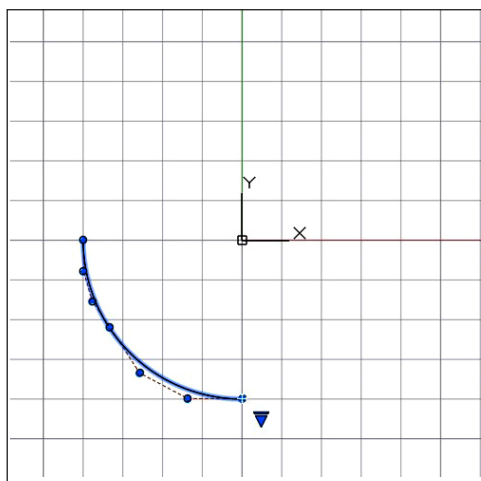


Рис. 6. Перенос NURBS-кривой в CAD
Fig. 6. Transferring a NURBS curve to CAD

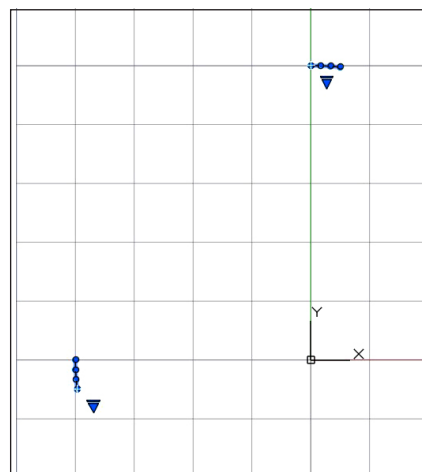


Рис. 8. NURBS сегменты кривых
Fig. 8. NURBS curve segments

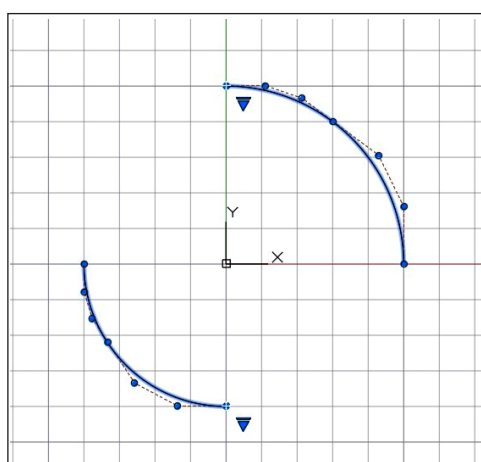


Рис. 7. Перенос NURBS-кривых в CAD
Fig. 7. Transferring NURBS curves to CAD

После перехода в Web FairCurveModeler на страницу NURBS3D необходимо выделить в табл. 1 с моделью NURBS-кривой и сохранить в буфер памяти. Перейдя в Web на страницу NURBS3D, необходимо очистить (I&M) и вставить текст из буфера памяти.

Далее используется ряд команд **NURBS from Excel** > **Zoom Spl** > **Create**. Система построит NURBS-кривую (рис. 5).

После переноса кривой в CAD-систему и нажатия **NURBS to ZWCAD/AutoCAD** необходимо выделить текст в (I&M) и сохранить в буфер памяти.

Следующим шагом является переход в CAD-систему и вставка текста из буфера памяти в командную строку.

CAD-система нарисует NURBS-кривую (рис. 6).

Таким же образом переносится NURBS-модель второй дуги из табл. 2 (рис. 7).

Далее необходимо сохранить чертеж с именем Curves.dxf.

Таблица 3. Модель NURBS сегмента первой кривой степени 3

Table 3. Model of the NURBS segment first curve of the 3rd degree

1	3	1	2	3	1	-39,6875	-4,99022	0	1	1	0
					2	-39,8957	-3,33443	0	0,998698	2	0
					3	-40	-1,66885	0	0,998695	3	0
					4	-40	4,90E-15	0	1	4	0
										5	1
										6	1
										7	1
										8	1

Таблица 4. Модель NURBS сегмента второй кривой степени 3

Table 4. Model of the NURBS segment second curve of the 3rd degree

1	3	1	2	3	1	0	50	0	1	1	0
					2	1,66806	50	0	0,999166	2	0
					3	3,33403	49,9166	0	0,999166	3	0
					4	4,99375	49,75	0	1	4	0
										5	1
										6	1
										7	1
										8	1

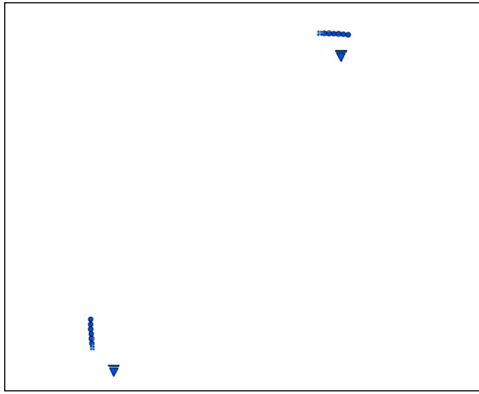


Рис. 9. NURBzS участки степени 6
Fig. 9. NURBzS patches of the 6th degree

2.1.2. Выделение участков

Выделяются небольшие сегменты на первой и второй NURBzS-кривых в Web FairCurveModeler на странице NURBzS3D, используя кнопки **Subdiv GB-polygon** и **Extract**. Далее сохраняются NURBzS сегменты в отдельном чертеже Excel-модели в приложениях (рис. 8, табл. 3, 4).

2.1.3. Повышение степени

Отметим важный момент, существенный для способа построения сопряжения двух кривых. Можно повышать степень рациональной кривой Безье без изменения геометрии кривой [8].

Степени NURBzS сегментов из табл. 3, 4 приводятся к единому заданному значению путем повышения степени (геометрия кривых не меняется). Повысим степени односегментных кубических NURBzS в Web FairCurveModeler кривых до 6, используя кнопку **Elevate Spline Degree** (рис. 9, табл. 5, 6).

2.1.4. Преобразование в NURBS-формат

NURBzS сегменты кривых посредством опции преобразования [8] приводятся к формату NURBS-кривых (рациональных B-сплайновых кривых) с открытым S-полигоном. В Web FairCurveModeler используется опция

Format:

- ☐ Clamped
☒ Float

и далее кнопка **Create**.

Таблица 5. Модель NURBzS сегмента первой кривой степени 6
Table 5. Model of the NURBzS segment first curve of the 6th degree

1	6	1	2	3	1	-39,6875	-4,99022	0	1	1	0
					2	-39,7915	-4,16286	0	0,999349	2	0
					3	-39,8749	-3,3329	0	0,998958	3	0
					4	-39,9374	-2,50098	0	0,998827	4	0
					5	-39,9791	-1,66776	0	0,998957	5	0
					6	-40	-0,833878	0	0,999347	6	0
					7	-40	4,90E-15	0	1	7	0
										8	1
										9	1
										10	1
										11	1
										12	1
										13	1
										14	1

Таблица 6. Модель NURBzS сегмента второй кривой степени 6
Table 6. Model of the NURBzS segment second curve of the 6th degree

1	6	1	2	3	1	0	50	0	1	1	0
					2	0,833681	50	0	0,999583	2	0
					3	1,66736	49,9833	0	0,999333	3	0
					4	2,50063	49,95	0	0,99925	4	0
					5	3,33305	49,8999	0	0,999333	5	0
					6	4,16423	49,8333	0	0,999583	6	0
					7	4,99375	49,75	0	1	7	0
										8	1
										9	1
										10	1
										11	1
										12	1
										13	1
										14	1

Таблица 7. Модель сегмента первой кривой в формате *B*-сплайновой кривой степени 6 в открытом формате

Table 7. Model of the segment of the first curve in the format *B*-spline of 6th degree in open format

1	6	1	2	1	1	− 36,67834763	− 16,849859	0	1,032499	1	− 6
					2	− 38,2350089	− 12,292297	0	1,012261	2	− 5
					3	− 39,48346376	− 7,4790702	0	1,000693	3	− 4
					4	− 40,10258047	− 2,5111076	0	0,996715	4	− 3
					5	− 40,10540553	2,49443289	0	1,000687	5	− 2
					6	− 39,4861718	7,42720886	0	1,012249	6	− 1
					7	− 38,22613596	12,1162197	0	1,034641	7	0
										8	1
										9	2
										10	3
										11	4
										12	5
										13	6

Таблица 8. Модель сегмента второй кривой в формате *B*-сплайновой кривой степени 6 в открытом формате

Table 8. Model of the segment of the second curve in the format *B*-spline of 6th degree in open format

1	6	1	2	1	1	− 12,31540073	48,4069867	0	1,019816	1	− 6
					2	− 7,447665333	49,6117428	0	1,008026	2	− 5
					3	− 2,498062645	50,0741206	0	1,000376	3	− 4
					4	2,508042234	50,0903946	0	0,997946	4	− 3
					5	7,485631096	49,5735435	0	1,000376	5	− 2
					6	12,36844874	48,6251217	0	1,008026	6	− 1
					7	17,06879805	46,8201593	0	1,019816	7	0
										8	1
										9	2
										10	3
										11	4
										12	5
										13	6
										14	7

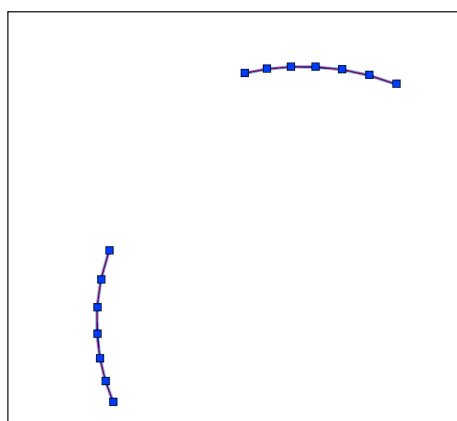


Рис. 10. NURBS сегменты кривых приведены к формату NURBS-кривых в открытом формате *S*-полигона

Fig. 10. NURBS curve segments are converted to NURBS curves in the open *S*-polygon format

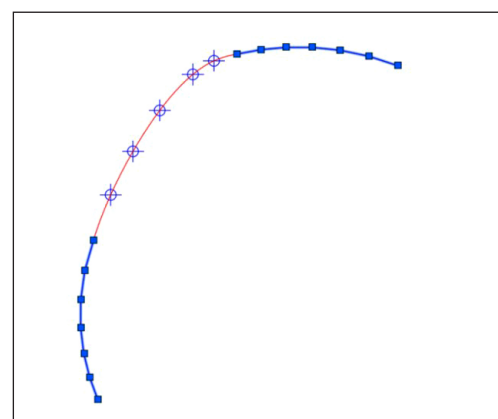


Рис. 11. Вершины промежуточного *S*-полигона на плавной кривой
Fig. 11. Vertices of the intermediate *S*-polygon on a smooth curve

2.1.5. Построение сопряжения

участков сопряжения исходных кривых. Для построения плавного промежуточного S -полигона вершины S -полигона можно брать на вспомогательной плавной кривой (рис. 11). Можно управлять длинами S -полигонов в п. 2.1.4, для достижения благоприятной конфигурации взаимного положения S -полигонов.

2.1.6. Построение B -сплайновой кривой сопряжения

S -полигон NURBS участка первой кривой, промежуточный S -полигон и S -полигон NURBS сегмента второй кривой объединяются в один общий открытый S -полигон.

На основе S -полигона в открытом формате в Web FairCurveModeler можно сформировать B -сплайновую кривую заданной степени (рис. 12, табл. 9).

2.1.7. Построение NURBS модели кривой сопряжения

На основе B -сплайновой кривой в открытом формате с единичными весовыми коэффициентами (табл. 9) формируется модель NURBS-кривой сопряжения с общим открытым S -полигоном. Модель кривой сопряжения формируется на основе NURBS моделей конечных сегментов исходных кривых. Весовые коэффициенты S -полигона на конечных участках устанавливаются равными весовым коэффициентам S -полигонов конечных сегментов кривых (табл. 7, 8). А промежуточные весовые коэффициенты вычисляются с плавным изменением

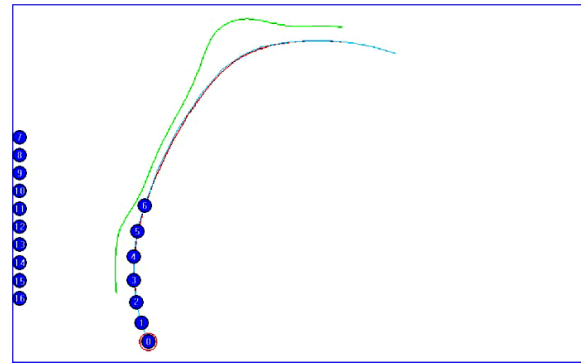


Рис. 12. B -сплайновая кривая в открытом формате с единичными весовыми коэффициентами (табл. 9)
Fig. 12. B -spline curve in open format with single weight coefficients (Table 9)

от значения коэффициента конечной вершины S -полигона сегмента первой кривой до значения первой вершины S -полигона сегмента второй кривой. В данном примере значения весовых коэффициентов меняются линейно. Вектор узлов — равномерный (табл. 10).

Затем формат интегральной кривой приводится к закрытому (clamped) формату (табл. 11).

На рис. 13 построена рациональная B -сплайновая кривая 6-й степени, сопрягающая участки дуг окружностей с порядком гладкости 5.

Таблица 9. Модель интегральной B -сплайновой кривой в открытом формате единичными коэффициентами

Table 9. Integral B -spline curve model in open format with unit coefficients

1	6	13	2	1	1	-36,9353	-15,6522	0	1	1	0
					2	-38,4306	-11,5973	0	1	2	1
					3	-39,5247	-7,13277	0	1	3	2
					4	-40,1189	-2,28214	0	1	4	3
					5	-40,102	2,913232	0	1	5	4
					6	-39,3513	8,3827	0	1	6	5
					7	-37,7431	14,0197	0	1	7	6
					8	-34,5572	22,5466	0	1	8	7
					9	-30,4406	30,6694	0	1	9	8
					10	-25,4933	38,3124	0	1	10	9
					11	-20,7536	43,7404	0	1	11	10
					12	-16,5685	46,7772	0	1	12	11
					13	-12,2847	48,6117	0	1	13	12
					14	-7,44767	49,6117	0	1	14	13
					15	-2,49807	50,07418	0	1	15	14
					16	2,508045	50,09037	0	1	16	15
					17	7,48564	49,57344	0	1	17	16
					18	12,36841	48,6258	0	1	18	17
					19	17,07543	47,17061	0	1	19	18
										20	19
										21	20
										22	21
										23	22
										24	23
										25	24
										26	25

Таблица 10. Модель интегральной кривой, составленной из сегментов кривых и кривой сопряжения (открытый формат NURBS-кривой)

Table 10. Integral curve model from segments of curves and the intersection curve (open format NURBS-curve)

1	6	13	2	1	1	-36,93533333	-15,652238	0	1,032499	1	0
					2	-38,43061333	-11,59732	0	1,012261	2	1
					3	-39,52473083	-7,1327723	0	1,000693	3	2
					4	-40,1189025	-2,282141	0	0,996715	4	3
					5	-40,10202	2,913232	0	1,000687	5	4
					6	-39,3513	8,3827	0	1,012249	6	5
					7	-37,7431	14,0197	0	1,034641	7	6
					8	-34,5572	22,5466	0	1,034641	8	7
					9	-30,4406	30,6694	0	1,034641	9	8
					10	-25,4933	38,3124	0	1,034641	10	9
					11	-20,7536	43,7404	0	1,034641	11	10
					12	-16,5685	46,7772	0	1,034641	12	11
					13	-12,2847	48,6117	0	1,019816	13	12
					14	-7,44767	49,6117	0	1,008026	14	13
					15	-2,498066	50,07418	0	1,000376	15	14
					16	2,50804525	50,0903725	0	0,997946	16	15
					17	7,485640306	49,5734386	0	1,000376	17	16
					18	12,36840989	48,6257978	0	1,008026	18	17
					19	17,07543056	47,1706111	0	1,019816	19	18
										20	19
										21	20
										22	21
										23	22
										24	23
										25	24
										26	25

Концевые сегменты интегральной B -сплайновой кривой сопряжения будут геометрически точно совпадать с сегментами сопряжения исходных кривых. Порядок гладкости участка сопряжения с сегментами сопряжения исходных кривых может быть выше порядка гладкости исходных кривых.

В общем случае интегральная кривая будет иметь порядок гладкости, совпадающий с наименьшим порядком гладкости исходных кривых.

Но в данном примере исходные кривые представляют дуги окружностей, которые геометрически точно аппроксимированы NURBzS-кривыми.

Параметры концевых сегментов рациональной B -сплайновой кривой в открытом формате (табл. 10) совпадают с параметрами исходных концевых сегментов исходных дуг окружностей (табл. 7, 8). Это и доказывает непрерывность 5-го порядка построенной рациональной B -сплайновой кривой сопряжения с исходными дугами окружностей.

2.2. Редактирование участка NURBzS-кривой

Важное следствие метода. Одним из серьезных недостатков геометрических рациональных сплайновых кривых Безье (GNURBzS-кривых) является трудность редактирования кривой на GB -полигоне. Предложенный метод высококачественного построения сопряжения легко обобщается на редактирование участка GNURBzS-кривой.

Действительно, достаточно удалить участок редактирования GNURBzS-кривой, и задача редактирования участка сводится к задаче построения

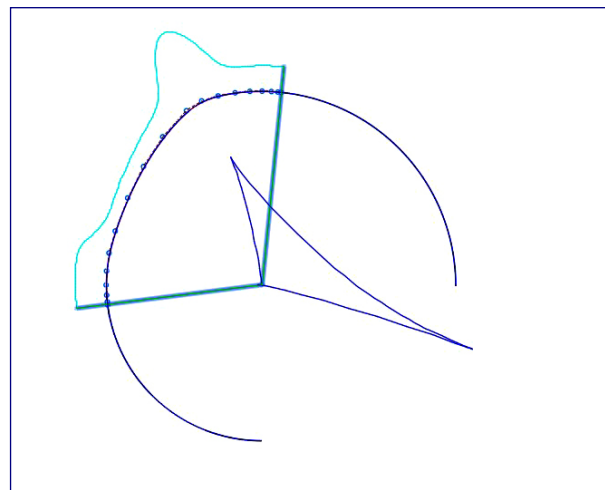


Рис. 13. Пример плавного сопряжения 5-го порядка гладкости. B -сплайновая кривая 6-й степени.

Показаны графики кривизны и эволюты
Fig. 13. Example of the smooth 5th order spline.
The 6-degree B -spline curve.
Curvature and evolute graphs are shown

и редактирования сопряжения двух частей одной GNURBzS-кривой. Причем редактирование участка NURBzS-кривой может вестись на S -полигоне B -сплайновой кривой произвольной степени.

Таблица 11. Модель интегральной кривой, составленной из сегментов кривых и кривой сопряжения (закрытый формат NURBS-кривой)
Table 11. Integral curve model from segments of curves and the curve conjugation (closed format NURBS-curve)

1	6	13	2	2	1	-39,6875	-4,99022	0	1	1	6
					2	-39,7905	-4,17119	0	0,979667	2	6
					3	-39,9602	-2,48667	0	0,939992	3	6
					4	-40,0908	0,126806	0	0,883389	4	6
					5	-39,989	3,73652	0	0,813469	5	6
					6	-39,3513	8,3827	0	0,734681	6	6
					7	-37,7431	14,0197	0	0,651857	7	6
					8	-34,5572	22,5466	0	0,755474	8	7
					9	-30,4406	30,6694	0	0,859091	9	8
					10	-25,4933	38,3124	0	0,962708	10	9
					11	-19,3757	45,0353	0	1,06632	11	10
					12	-15,4759	47,5703	0	1,16994	12	11
					13	-11,2279	48,835	0	1,27356	13	12
					14	-6,85911	49,6489	0	1,15509	14	13
					15	-3,05157	50,0055	0	1,06527	15	14
					16	0,095168	50,0624	0	0,998732	16	15
					17	2,51338	49,9654	0	0,951652	17	16
					18	4,15741	49,8339	0	0,921476	18	17
					19	4,99375	49,75	0	0,906686	19	18
										20	19
										21	19
										22	19
										23	19
										24	19
										25	19
										26	19

Выводы

1. Предложен метод плавного сопряжения двух NURBS / NURBS-кривых. Показана реализация метода на основе функционала C3D FairCurveModeler. Метод обеспечивает требуемый высокий порядок гладкости, а также позволяет обеспечить более высокий порядок гладкости сопряжения, чем сами исходные кривые. Этот парадокс раскрывается просто. Отметим, что более высокий порядок гладкости обеспечивается только на участке сопряжения к отдельным сегментам исходных сплайновых кривых.

2. Метод позволяет легко редактировать участок кривой произвольного формата. Для редактирования участка используется B-сплайновая кривая с открытым S-полигоном.

3. Для реализации метода предлагается использовать общедоступное веб-приложение, доступное по ссылке Spliner.ru > Online Modeling. Надеемся, что инженеры будут использовать WEB FairCurveModeler для моделирования функциональных кривых и поверхностей в своих проектах.

Список источников / References

1. Muftejev V., Ziatdinov R., Nabiyev R. Multi-criteria assessment of shape quality in cad systems of the future. *The 30th International Conference on Computer Graphics and Machine Vision (GraphiCon 2020)*, At: Saint Petersburg, Russia, September. 2020. P. 22–25.

2. Levien R. L. From spiral to spline: optimal techniques in interactive curve design: dissertation. University of California, Berkeley, 2009. 175 p.

3. Ziatdinov R. Family of superspirals with completely monotonic curvature given in terms of Gauss hypergeometric function. *Computer Aided Geometric Design*. 2012. Vol. 29 (7). P. 510–518. DOI: 10.1016/j.cagd.2012.03.006.

4. Муфтеев В. Г., Марданов А. Р., Семенов А. С., Урманов В. Г. Подготовка NURBS шаблонов аналитических кривых в Mathematica + FairCurveModeler для CAD-систем // Трактор и автомобили: материалы науч.-практ. конф. Уфа: Изд-во БГАУ, 2013. С. 275–282.

Mufteyev V. G., Mardanov A. R., Semenov A. S., Uрманov V. G. Podgotovka NURBS shablonov analiticheskikh krivyykh v Mathematica + FairCurveModeler dlya CAD-cistem [Preparing NURBS templates of analytical curves in Mathematica + FairCurveModeler for CAD systems]. *Traktora i Avtomobili*. Ufa, 2013. P. 275–282. (In Russ.).

5. Печенкина Т. В., Головкина Н. С., Федоров П. А., Абдуллин М. М. [и др.]. Исторические этапы построения спирали. Способы и средства // История науки и техники. 2013. № 11. С. 11–17. EDN: YTZFAV.

Pechenkina T. V., Golovkina N. S., Fedorov P. A., Abdullin M. M. [et al.]. Istoricheskiye etapy postroyeniya spirali. Spособы i sredstva [Historical stages of construction filched. Ways and means]. *Istoriya nauki i tekhniki. History of Science and Engineering*. 2013. No. 11. P. 11–17. EDN: YTZFAV. (In Russ.).

6. Miura K. T., Shibuya D., Gobithaasan R. U., Usuki Sh. Designing log-aesthetic splines with G2 continuity. *Computer*

- Aided Design and Applications*. 2013. Vol. 10 (6). P. 1021–1032. DOI: 10.3722/cadaps.2013.1021-1032.
7. C3D Labs. URL: <https://c3dlabs.com/> (accessed: 19.08.2025).
8. C3D Toolkit. URL: <https://c3dlabs.com/products/c3d-toolkit/> (accessed: 19.08.2025).
9. Пат. 1237778 СССР, МПК F 01 L 1/08. Кулачок привода клапана / Рожков А. П. № 3639955.25-06; заявл.05.09.1983; опубл. 15.06.1986. Бюл. № 22.
- Patent 1237778 USSR, IPC F 01 L 1/08. Kulachok privoda klapana [Valve drive cam] / Rozhkov A. P. No. 3639955.25-06. (In Russ.).
10. Neamtu M., Pottmann H., Schumaker L. L. Designing NURBS cam profiles using trigonometric splines. *Journal of Mechanical Design*. 1998. Vol. 120 (2). P. 175–180. DOI: 10.1115/1.2826956.
11. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. В. 4 т. Москва: Изд-во Академии наук СССР, 1952. Т. 1. С. 105–106.
- Bernshteyn S. N. Sobraniye sochineniy. V. 4 t. [Collected works. In 4 vols.]. Moscow, 1952. Vol. 1. P. 105–106. (In Russ.).
12. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. В. 4 т. Москва: Изд-во Академии наук СССР, 1954. Т. 3. С. 310–348.
- Bernshteyn S. N. Sobraniye sochineniy. V. 4 t. [Collected works. In 4 vols.]. Moscow, 1954. Vol. 3. P. 310–348. (In Russ.).
13. Шенен П., Коснар М., Гардан И. [и др.]. Математика и САПР. В 2 кн. / пер. с фр. С. Д. Чигиря; под ред. Н. Г. Волкова. Москва: Мир, 1988. Кн. 1. 208 с. ISBN 5-03-000417-3.
- Shenen P., Kosnar M., Gardan I. [et al.]. Matematika i SAPR [Mathematics and CAD]. In 2 bks. / trans. from Fr. S. D. Chigir; ed. by N. G. Volkov. Moscow, 1988. Bk. 1. 208 p. ISBN 5-03-000417-3. (In Russ.).
14. Шенен П., Коснар М., Гардан И. [и др.]. Математика и САПР. В 2 кн. / пер. с фр. С. Д. Чигиря; под ред. Н. Г. Волкова. Москва: Мир, 1988. Кн. 2. 264 с. ISBN 5-03-000417-3.
- Shenen P., Kosnar M., Gardan I. [et al.]. Matematika i SAPR [Mathematics and CAD]. In 2 bks. / trans. from Fr. S. D. Chigir; ed. by N. G. Volkov. Moscow, 1988. Bk. 2. 264 p. ISBN 5-03-000417-3. (In Russ.).
15. Gordon W. J., Riesenfeld R. F. B-spline curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*. 1974. P. 95–126.
16. К. де Бор. Практическое руководство по сплайнам / пер. с англ.; под ред. В. И. Скурихина. Москва: Радио и связь, 1985. 304 с.
- C. De Boor. Prakticheskoye rukovodstvo po splaynam [A Practical guide to Splines] / trans. from Engl; ed. by V. I. Skurikhin. Moscow, 1985. 304 p. (In Russ.).
17. Cox M. G. The numerical evaluation of B-Splines. *Journal of Applied Mathematics*. 1972. Vol. 10. P. 134–149. DOI: 10.1093/imamat/10.2.134.
18. Schoenberg I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A. On the problem of smoothing or graduation. A first class of analytic approximation formulae. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1946. Vol. 4, no. 1. P. 45–99. DOI: 10.1007/978-1-4899-0433-1_1.
19. Schoenberg I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part B. On the problem of osculatory interpolation. a second class of analytic approximation formulae. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1946. Vol. 4, no. 2. P. 112–141. DOI: 10.1007/978-1-4899-0433-1_2.
20. Sabloniere P. Spline and Bezier polygons associated with a polynomial spline curve. *Computer-Aided Design*. 1978. Vol. 10, no. 4. P. 257–261. DOI: 10.1016/0010-4485(78)90061-1.
21. Böhm W. Cubic B-spline curves and surfaces in computer-aided geometric design. *Computing*. 1977. Vol. 19. P. 29–34. DOI: 10.1007/BF02260739.
22. Фок А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве: моногр. / пер. с англ. Москва: Мир, 1982. 304 с.
- Faux I., Pratt M. Vychislitel'naya geometriya. Primeneniye v proyektirovanii i na proizvodstve [Computational geometry for design and manufacture] / trans. from Engl. Moscow, 1982. 304 p. (In Russ.).
23. Piegel L., Tiller W. The NURBS Book: Monographs in visual communication. 2nd ed. Springer Verlag, 1997. 660 p.
24. Farin G., Class A. Bézier curves. *Computer Aided Geometric Design*. 2006. Vol. 23 (7). P. 573–581. DOI: 10.1016/j.cagd.2006.03.004.
25. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. Москва: Наука, 1976. 248 с.
- Stechkin S. B., Subbotin Yu. N. Splayny v vychislitel'noy matematike [Splines in computational mathematics]. Moscow, 1976. 248 p. (In Russ.).
26. КОМПАС МАСТЕР. Встроенная справочная система КОМПАС 3D. URL: https://kompas.ru/source/info_materials/2020/Азбука%20КОМПАС-3D.pdf (дата обращения: 19.08.2025). (In Russ.).
27. ZWCAD. URL: <https://sapr-soft.ru/> (accessed: 19.08.2025). (In Russ.).
28. Муфтеев В. Г., Максименко А., Ахметшин Р. И. [и др.]. Прикладные САПР и приложения на основе геометрического ядра C3D для проектирования изделий с функциональными кривыми // Труды международной конференции по компьютерной графике и зрению «Графикон». 2021. № 31. С. 75–87. DOI: 10.20948/graphicon-2021-1-75-87. EDN: NWTYDG.
- Muftejev V. G., Maximenko A., Akhmetshin R. I. [et al.]. Prikladnyye SAPR i prilozheniya na osnove geometricheskogo yadra C3D dlya proyektirovaniya izdeliy s funktsional'nymi krivymi [Applied CAD systems and applications Based on the C3D geometric modeling Kernel, used for the design of products with functional curves]. *Proceedings of the International Conference on Computer Graphics and Vision "Graphicon"*. 2021. No. 31. P. 75–87. DOI: 10.20948/graphicon-2021-1-75-87. EDN: NWTYDG. (In Russ.).
29. Муфтеев В. Г., Марданов А. Р., Романюк А. Н. [и др.]. Программа изogeометрического моделирования кривых линий высокого качества. WEB-приложение CAD-систем // Компьютерная графика и распознавание изображений: материалы междунар. науч.-техн. интернет-конф. Винница. 2012. С. 127–139.
- Mufteev V. G., Mardanov A. R., Romanyuk A. N. [et al.]. Programma izogeometricheskogo modelirovaniya krivyykh liniy vysokogo kachestva. WEB-prilozheniye CAD-sistem [Program for isogeometric modeling of high-quality curved lines. CAD systems WEB application]. *Komp'yuternaya Grafika i Raspoznavaniye Izobrazheniy*. Vinnitsa. 2012. P. 127–139. (In Russ.).
30. Программа ZWCAD. Официальный сайт. URL: <https://sapr-soft.ru/?ysclid=mh6boy50il336770214> (дата обращения: 19.08.2025).
31. BricsCAD V26 Launch | Digital Event | Bricsys. URL: <https://www.bricsys.com/ru-ru/bricscad-download?srsltid=AfmBOoqWJkHipuWOPexZS-XPG6Or6Golsi6JfVbA5lmr76UD3s3q6bsl> (дата обращения: 19.08.2025).
32. Российское инженерное ПО. САПР. ТИМ. СОД // Нанософт. URL: <https://www.nanocad.ru/> (дата обращения: 19.08.2025).
- Rossiyskoye inzhenernoye PO. SAPR. TIM. SOD [Russian engineering software. CAD. TIM. SOD]. *Nanosoft*. URL: <https://www.nanocad.ru/> (accessed: 19.08.2025). (In Russ.).
33. Муфтеев В. Г., Романюк А. Н., Марданов А. Р., Фархутдинов И. М. Геометрически устойчивое моделирование NURBS кривых и поверхностей произвольных степеней // Прикладная геометрия. 2009. № 22, вып. 11. С. 19–77. EDN: ZWVHIV.
- Mufteev V. G., Romanyuk A. N., Mardanov A. R., Farkhutdinov I. M. Geometricheski ustoychivoye modelirovaniye NURBS krivyykh i poverkhnostey proizvol'nykh stepeney [Geometrically stable modeling of NURBS curves and surfaces of arbitrary degrees]. *Prikladnaya geometriya. Applied Geometry*. 2009. No. 22, Issue. 11. P. 19–77. EDN: ZWVHIV. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 12.09.2025; одобрена после рецензирования 17.11.2025; принята к публикации 29.12.2025.

МУФТЕЕВ Валериан Гайнизаманович, кандидат технических наук, ведущий математик-программист ООО «СЗД ЛАБС», г. Москва.

SPIN-код: 7361-8032

AuthorID (РИНЦ): 1006623

ORCID: 0000-0003-4352-3381

Адрес для переписки: muftejev@mail.ru

ЗИГАНШИНА Файруза Тахваловна, кандидат физико-математических наук, доцент (Россия), и.о. заведующего кафедрой «Комплексный инжиниринг и компьютерная графика» Уфимского государственного нефтяного технического университета (УГНТУ), г. Уфа.

SPIN-код: 6326-3600

AuthorID (РИНЦ): 866017

AuthorID (SCOPUS): 57215302498

Адрес для переписки: fairusa85@mail.ru

ГУМЕРОВ Вадим Ильдарович, независимый исследователь, г. Уфа.

Адрес для переписки: gumerov2008@mail.ru

Прозрачность финансовой деятельности: авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.

MUFTEEV Valeriy Gajnzamanovich, Candidate of Technical Sciences, Leading Mathematician Programmer, LLC "C3D Labs", Moscow.

SPIN-code: 7361-8032

AuthorID (RSCI): 1006623

ORCID: 0000-0003-4352-3381

Correspondence address: muftejev@mail.ru

ZIGANSHINA Fairuza Takhvalovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Acting Head of the Integrated Engineering and Computer Graphics Department, Ufa State Petroleum Technological University, Ufa.

SPIN-code: 6326-3600

AuthorID (RSCI): 866017

AuthorID (SCOPUS): 57215302498

Correspondence address: fairusa85@mail.ru

GUMEROV Vadim Ildarovich, Independent Researcher, Ufa.

Correspondence address: gumerov2008@mail.ru

Financial transparency: the authors have no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.

The article was submitted 12.09.2025; approved after reviewing 17.11.2025; accepted for publication 29.12.2025.

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ СИСТЕМА ГЕНЕРАЦИИ ОТЧЕТОВ ПО КАЧЕСТВУ НА ОСНОВЕ СИНЕРГИИ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ И БОЛЬШИХ ЯЗЫКОВЫХ МОДЕЛЕЙ: ПРЕОДОЛЕНИЕ РАЗРЫВА МЕЖДУ ДИАГНОСТИКОЙ И СИСТЕМОЙ МЕНЕДЖМЕНТА КАЧЕСТВА

М. В. Гвинтовкин

Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д. Ф. Устинова,
Россия, 190005, г. Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, 1

В статье рассматривается проблема разрыва между детализированными результатами машинного обучения в задачах диагностики качества в машиностроении и потребностями систем менеджмента качества в комплексной, интерпретируемой и стандартизированной отчетности. Предлагается интеллектуальная система, основанная на синергетической интеграции распределенных модулей машинного обучения для локальной диагностики и больших языковых моделей для автоматической генерации контекстно-зависимых отчетов системы менеджмента качества. Описаны методология, архитектура системы, алгоритмы агрегации диагностической информации, методы инженерии промптов для большой языковой модели и механизмы верификации генерируемых отчетов, включая факт-чекинг для минимизации «галлюцинаций».

Результаты экспериментальной апробации на типовых задачах контроля качества подтверждают работоспособность системы, высокую точность модулей машинного обучения компонентов и способность генерировать фактологически точные, релевантные и соответствующие требованиям системы менеджмента качества отчеты. Предложенный подход позволяет эффективно преодолеть разрыв между технической диагностикой и управленческими потребностями системы менеджмента качества, автоматизируя процесс формирования интеллектуальной отчетности по качеству.

Ключевые слова: машинное обучение, большие языковые модели, система менеджмента качества, машиностроение, автоматизация отчетности, агрегация данных, контроль качества.

Для цитирования: Гвинтовкин М. В. Интеллектуальная система генерации отчетов по качеству на основе синергии машинного обучения и больших языковых моделей: преодоление разрыва между диагностикой и системой менеджмента качества // Омский научный вестник. 2026. № 1 (197). С. 60–68. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-60-68. EDN: HQPDLJ.



© Гвинтовкин М. В., 2026.
Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

INTELLIGENT SYSTEM FOR GENERATING QUALITY REPORTS BASED ON THE SYNERGY OF MACHINE LEARNING AND LARGE LANGUAGE MODELS: OVERLAPPING THE GAP BETWEEN DIAGNOSTICS AND THE QUALITY MANAGEMENT SYSTEM

M. V. Gvintovkin

Baltic State Technical University "VOENMEH" named after D. F. Ustinov,
Russia, Saint Petersburg, 1st Krasnoarmeyskaya St., 1, 190005

The article examines the problem of the gap between the detailed results of machine learning in the tasks of quality diagnostics in mechanical engineering and the needs of quality management systems in complex, interpretable and standardized reporting. An intelligent system based on synergistic integration of distributed machine learning modules for local diagnostics and large language models for automatic generation of context-dependent reports of the quality management system is proposed. The methodology, system architecture, algorithms of aggregation of diagnostic information, techniques of engineering of proxies for

large language model and mechanisms of verification of generated reports are described, including fact-checking for minimization of «hallucinations».

The results of the pilot testing on typical quality control tasks confirm system performance, high accuracy of machine learning modules components and ability to generate factually accurate, relevant and compliant quality management system reports. The proposed approach allows to effectively bridge the gap between technical diagnosis and management needs of quality management system, automating the process of forming intellectual reporting on quality.

Keywords: machine learning, large language models, quality management system, mechanical engineering, reporting automation, data aggregation, quality control.

For citation: Gvintovkin M. V. Intelligent system for generating quality reports based on the synergy of machine learning and large language models: Overlapping the gap between diagnostics and the quality management system. *Omsk Scientific Bulletin*. 2026. No. 1 (197). P. 60–68. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-60-68. EDN: HQPDLJ.



© Gvintovkin M. V., 2026.
The content is available under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Введение

Цифровая трансформация машиностроительных производств, основанная на концепциях Индустрии 4.0 и промышленного интернета вещей (IIoT), сопряжена с генерацией значительных объемов данных, что формирует предпосылки для развития систем менеджмента качества (СМК) согласно требованиям ISO 9001 [1]. Массивы данных от автоматизированных систем управления технологическими процессами (АСУ ТП), координатно-измерительных машин и систем машинного зрения создают основу для применения методов машинного обучения (Machine Learning — ML) в задачах контроля [2]. ML-алгоритмы эффективны при решении задач локальной диагностики, таких как обнаружение дефектов и выявление аномалий, за счет идентификации нелинейных зависимостей, недоступных для традиционных статистических методов [3].

Несмотря на эффективность ML-диагностики, существует фундаментальный разрыв между характером генерируемых ею данных и информационными потребностями СМК.

Выходные данные ML-модулей, представленные набором низкоуровневых технических индикаторов (классификационные метки, вероятностные оценки), не являются достаточными для выполнения процедур СМК.

Данные процедуры требуют комплексного, интерпретируемого и контекстуализированного представления о состоянии объекта контроля для анализа причин несоответствий и планирования корректирующих действий.

Функционал существующих информационных систем уровня Manufacturing Execution System (MES) и Enterprise Resource Planning (ERP), как правило, ограничен обработкой простых числовых или бинарных статусов контроля и не включает механизмов агрегации и семантического обогащения сложных диагностических выводов. Данное ограничение обуславливает ручную обработку разрозненных данных для формирования отчетности, снижая оперативность и объективность управленческих решений. Возникает научно-техническая задача разработки подходов и инструментов для автоматического преобразования детализированных результатов ML-диагностики в целостную, семантически обогащенную информацию, релевантную для систем менеджмента качества [4].

Методология исследования

Концепция автоматизации формирования отчетности по качеству основана на интеграции ML и больших языковых моделей (Large Language Model — LLM). Подход предполагает функциональное разделение: специализированные ML-модули выполняют анализ исходных данных для локальной диагностики, в то время как LLM осуществляют агрегацию, семантическую интерпретацию и контекстуализацию диагностических выводов с последующей генерацией структурированных отчетов для СМК. Данный принцип позволяет использовать высокую точность ML в анализе данных и способности LLM к обработке и генерации текстовой информации в заданном контексте.

Научная новизна предлагаемой методологии заключается в переходе от простой передачи текстовых меток классов к формированию семантических векторных карт дефектов. В отличие от традиционных подходов, методология предполагает использование архитектур сегментации для извлечения морфологических признаков брака, которые в сочетании с механизмом генерации, дополненной поиском (Retrieval-Augmented Generation — RAG) позволяют языковой модели сопоставлять параметры реального объекта с векторными эмбедами нормативно-справочной документации (ГОСТ, ТУ) в режиме реального времени.

Разработана концептуальная модель интегрированной системы, описывающая многоуровневую обработку. Исходные данные после предварительной подготовки поступают в блок распределенных ML-модулей, каждый из которых генерирует стандартизированную локальную диагностическую информацию.

Модуль агрегации объединяет данные выводы в единый структурированный объект, который совместно с контекстной информацией (тип отчета, процедуры СМК) используется для формирования запроса (промпта) к LLM. Модуль взаимодействия с LLM управляет генерацией и верификацией текстового отчета, который представляется персоналу СМК. Моделью предусмотрен контур обратной связи для дообучения ML-модулей и адаптации промптов. На рис. 1 представлена блок-схема концептуальной модели системы.

Практическая реализация концептуальной модели осуществляется посредством многокомпо-

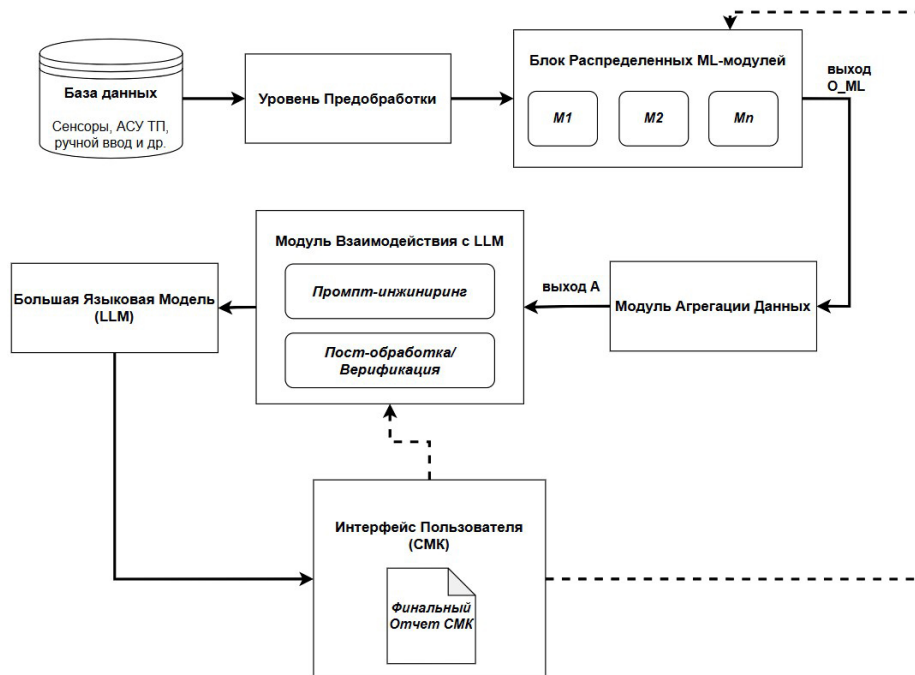


Рис. 1. Блок-схема концептуальной модели системы
Fig. 1. Block diagram of the conceptual model of the system

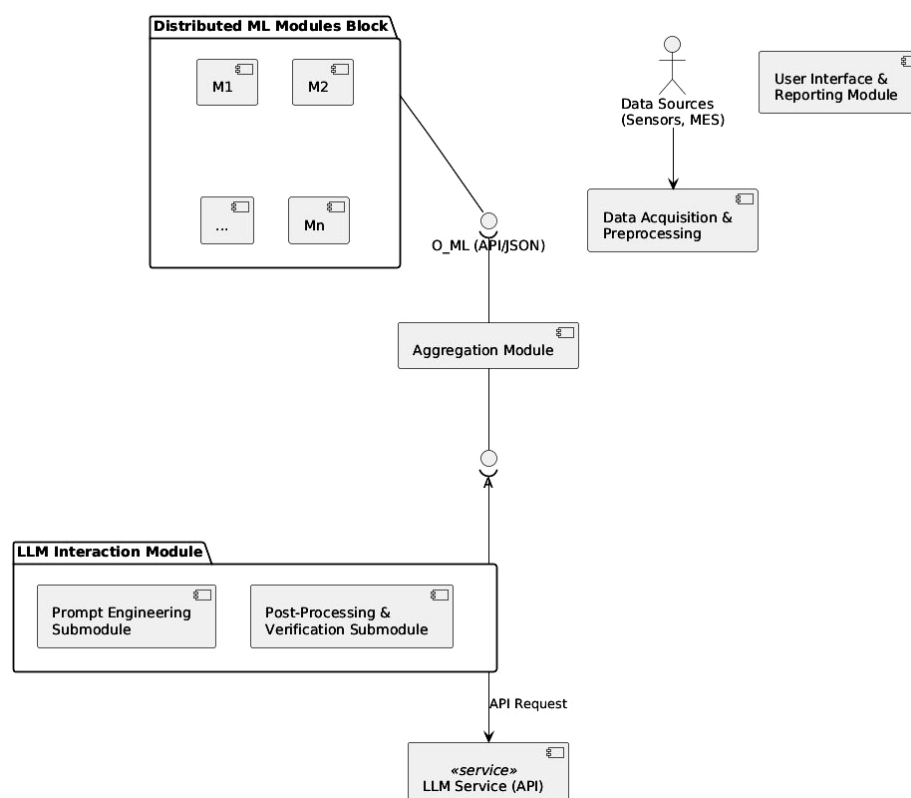


Рис. 2. Архитектурная диаграмма программного комплекса
Fig. 2. Architectural diagram of the software suite

нентной программной архитектуры, схема которой приведена на рис. 2. Ключевыми компонентами являются: модуль сбора и предварительной обработки данных, ответственный за получение и подготовку сырых данных; блок распределенных специализированных ML-модулей, представляющий собой набор независимо функционирующих модулей для

локальной диагностики; модуль агрегации диагностической информации, реализующий алгоритмы объединения локальных выводов в объект А; модуль взаимодействия с LLM, инкапсулирующий логику формирования промптов и верификации ответов LLM; модуль пользовательского интерфейса и представления отчетов [5].

```

{
  "examples": {
    "a_0_ML_mj_structure": {
      "module_id": "vibro_podshipniki",
      "timestamp": "2023-10-26T12:34:56.789Z",
      "status": "Warning_BPF0",
      "confidence": 0.85,
      "defects": [
        {
          "type": "BPF0",
          "severity_param": 1.2
        }
      ],
      "feature_vector": [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5]
    },
    "b_A_object_structure": {
      "itemID": "SN12345",
      "timeInterval": [
        "2023-10-26T00:00:00.000Z",
        "2023-10-26T23:59:59.999Z"
      ],
      "overallStatus": "critical",
      "modulesData": [
        {
          "module_id": "vibro_podshipniki",
          "timestamp": "2023-10-26T12:30:00.000Z",
          "status": "Warning_BPF0",
          "confidence": 0.85,
          "defects": [
            {
              "type": "BPF0",
              "severity_param": 1.2
            }
          ],
          "feature_vector": [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5]
        },
        {
          "module_id": "temp_sensor_unit2",
          "timestamp": "2023-10-26T12:32:00.000Z",
          "status": "OK",
          "confidence": 0.99,
          "defects": [],
          "feature_vector": [0.01, 0.02, 0.03]
        }
      ],
      "aggregatedMetrics": {
        "totalDefects": 3,
        "averageConfidence": 0.88,
        "statusTrend": "stable"
      }
    }
  }
}

```

Рис. 3. Пример стандартизированной структуры данных в формате JSON

Fig. 3. Example of a standardized data structure in JSON format

Выбор архитектуры с распределенными ML-модулями обоснован гетерогенностью задач контроля качества в машиностроении (разные объекты, дефекты, типы данных), что позволяет использовать наиболее адекватные и точные ML-алгоритмы для каждой конкретной задачи, а также обеспечивает гибкость и масштабируемость системы при добавлении новых точек контроля или обновлении моделей. Взаимодействие между компонентами архитектуры предполагается через стандартизованные интерфейсы, например, с использованием Representational State Transfer Application Programming Interface (REST API) и формата данных JavaScript Object Notation (JSON) для обмена структурированной информацией или через очереди сообщений (Kafka, RabbitMQ) для асинхронной обработки потоков данных.

Для обеспечения совместимости и возможности агрегации данных от различных ML-модулей их выходная информация $O_{ML}(m_j)$ для j -го модуля должна иметь стандартизованную структуру. Аналогично, результат работы модуля агрегации — объект (A) — также должен иметь четко определенную и расширяемую структуру, удобную для последующей сериализации в текстовый формат для LLM [6].

Примеры таких структур в формате JSON представлены на рис. 3.

Выход ML-модуля включает идентификатор модуля, временную метку, оценку общего состояния, список обнаруженных дефектов с их характеристиками и уровнем уверенности, а также, опционально, вектор ключевых признаков. Агрегированный объект A содержит идентификатор контролируемого объекта (изделия/партии), временной интервал агрегации, общую оценку статуса качества, массив данных от всех активных ML-модулей за этот интервал (modulesData) и набор обобщенных метрик (aggregatedMetrics), таких как общее количество дефектов, средняя уверенность и т. д.

Важной особенностью структуры объекта A является его расширяемость: помимо классификационных признаков, он инкапсулирует в себе результаты инференса моделей сегментации в виде тензоров метаданных. Это превращает объект A в высокоуровневое описание сцены, которое передается в LLM-модуль не как сырой текст, а как структурированный запрос, дополненный релевантным контекстом из базы знаний предприятия.

Модуль агрегации выполняет преобразование потока локальных технических данных $O_{ML}(m_j)$ в целостную структуру A. Процесс начинается с темпоральной агрегации для определения актуальности данных от каждого модуля в рамках заданного интервала или события. Далее производится агрегация статуса и критичности для вычисления итогового показателя OverallStatus объекта A. Данный этап использует формализованные правила: принцип «наихудшего случая», логические комбинации состояний или взвешенную оценку на основе значимости дефектов, определенной, например, посредством FMEA-анализа.

Формально взвешенная критичность рассчитывается как

$$\text{AggregatedSeverity} = \sum_j w_j \cdot \text{Severity}(\text{status_mj}),$$

где w_j — весовой коэффициент значимости j -го модуля.

Обработка неопределенности, присущей выводам ML-моделей, теоретически основывается на методах байесовского вывода или теории свидетельств Демпстера — Шефера для формального объединения противоречивых данных.

Параллельно выполняется агрегация уверенности диагностических выводов, например, через усреднение или с применением методов комбинирования свидетельств, таких как теория Демпстера — Шефера, для обработки противоречивой информации. Завершающий этап включает агрегацию информации о дефектах: подсчет их количества и частоты, выявление паттернов совместного появления. На рис. 4 представлен алгоритм агрегации данных.

Модуль взаимодействия с LLM реализует алгоритм преобразования структурированного объекта A в финальный отчет СМК (Report_final). Процесс включает два этапа: инженерную промт- и верификацию. На первом этапе на основе агрегированных данных A и контекстной информации (тип отчета, требования СМК) формируется текстовый запрос (промт). Указанный промт содержит четкие инструкции и «заземляющие» указания, направленные на минимизацию генерации неподтвержденной информации.

На втором этапе полученный от LLM ответ (Report_raw) подвергается многоступенчатой ве-



Рис. 4. Визуализация алгоритма агрегации статусов
Fig. 4. Visualization of the status aggregation algorithm

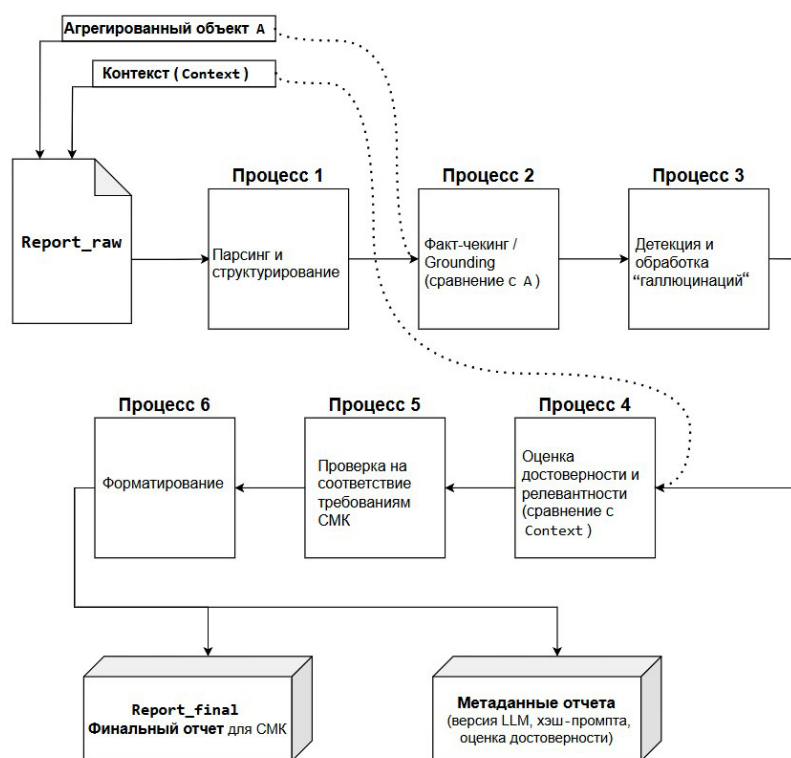


Рис. 5. Блок-схема алгоритма взаимодействия с LLM
Fig. 5. Block diagram of the algorithm for interaction with the LLM

рификации. Данный этап включает сопоставление утверждений отчета с исходными данными в объекте A (факт-чекинг), маркировку неподтвержденных данных и форматирование согласно шаблону СМК [7, 8]. Результатом является верифицированный отчет (Report_final), фактологическая точность которого обеспечивает надежность системы для задач управления качеством. На рис. 5 представлен алгоритм взаимодействия с LLM.

Экспериментальная апробация методологии предполагает использование размеченных производственных или имитационных наборов данных, характерных для машиностроения (изображения дефектов, временные ряды вибраций). Реализа-

ция системы планируется на Python с применением стандартных библиотек для машинного обучения (TensorFlow, PyTorch) и фреймворков для взаимодействия с LLM (API GPT-5, Hugging Face Transformers).

Оценка производительности будет носить комплексный характер. Для ML-модулей будут рассчитываться стандартные метрики классификации и обнаружения (F1-мера, mAP). Качество генерируемых LLM отчетов будет оцениваться по фактологической точности, соответствию форматам СМК и на основе экспертного анализа. Дополнительно будет измеряться общее время выполнения цикла «данные → отчет».

Теоретические основы

Теоретический базис предлагаемого подхода образует синергетическая интеграция методов машинного обучения (ML), агрегации данных и больших языковых моделей (LLM) для преобразования технических диагностических данных в управленческую отчетность СМК [9].

Первичная диагностика основывается на ML-моделях, выбор которых теоретически обусловлен характером данных. Для анализа изображений применяются сверточные нейронные сети (CNN), архитектура которых обеспечивает иерархическое извлечение инвариантных пространственных признаков [10]. Модели обнаружения объектов (например, YOLO) решают задачу локализации и классификации дефектов путем минимизации комбинированной функции потерь [11]:

$$L_{total} = \lambda_{loc} L_{loc} + \lambda_{cls} L_{cls} + \lambda_{obj} L_{obj},$$

где L_{loc} , L_{cls} , L_{obj} — компоненты потерь для локализации, классификации и уверенности в обнаружении соответственно.

Для анализа временных рядов (вибрационных сигналов) теоретически обосновано применение рекуррентных сетей (LSTM, GRU), чьи вентильные механизмы моделируют сложные временные зависимости, критичные для диагностики зарождающихся дефектов.

Агрегация диагностических выводов в единый структурированный объект А опирается на теорию слияния данных (data fusion) и инженерию знаний. Формализация правил агрегации, таких как взвешенная оценка критичности, позволяет алгоритмически реализовать экспертную логику:

Использование LLM для генерации отчетов базируется на архитектуре Transformer, чей механизм Self-attention позволяет моделировать контекстуальные зависимости в рамках структурированного промпта. Однако вероятностная природа LLM обуславливает риск генерации фактически некорректной информации. Следовательно, теоретически необходимым элементом подхода является механизм верификации, обеспечивающий «заземление» (grounding) генерируемого текста на фактологические данные из агрегированного объекта А. Данный шаг гарантирует фактологическую точность отчетов, что является обязательным требованием для систем управления качеством.

Результаты и их обсуждение

Верификация предложенной методологии в упрощенном варианте (только с детектором дефектов и алгоритмом сегментации) и оценка технической реализуемости системы проводились

на основе анализа эффективности современных ML-алгоритмов при обработке специализированных производственных выборок. В качестве эталонных наборов данных использовались верифицированные датасеты из репозитория Roboflow Universe [12–15]. Особое внимание было уделено анализу поверхностных дефектов. Для этой задачи была разработана и использована форк-версия датасета Defects (оригинал mai-ldivt) [13], адаптированная под специфику бинарной классификации и дополненная примерами реального производственного брака.

Важно подчеркнуть, что для повышения робастности алгоритмов и компенсации естественного дисбаланса классов (в частности, для редких видов критических дефектов сварки), часть обучающей выборки была расширена за счет синтетических данных, полученных методами глубокой аугментации и имитационного моделирования дефектов. Кроме того, в целях объективной оценки обобщающей способности системы для финального тестирования привлекались изображения из открытых источников сети Интернет, характеризующиеся нетипичными условиями освещенности, зашумленностью и сложными ракурсами съемки. Это позволило подтвердить инвариантность разработанных ML-модулей к внешним факторам, неизбежным в условиях реального цехового производства, а также исключить риск переобучения моделей на ограниченных лабораторных выборках.

В качестве базового стека локальной диагностики использовалась связка нейросетевой архитектуры YOLOv8 [14] и модели сегментации Segment Anything Model (SAM) [15, 16]. Обучение проводилось по классам "Good_Welding" (соответствие нормативам) и "Bad_Welding" (наличие критических несоответствий). На тестовых выборках модели продемонстрировали уверенность (confidence score) в диапазоне 85–92 %. Сводные данные представлены в табл. 1.

Процесс формирования интеллектуальной отчетности инициируется после генерации ML-модулем векторной карты дефектов [17]. Карта представляет собой тензор метаданных, включающий нормализованные координаты центроидов, маски сегментации и расчетную площадь повреждения. На рис. 6 представлена работа системы на тестовом изображении из открытых источников сети Интернет (не входящем в обучающие датасеты), что подтверждает высокую обобщающую способность моделей.

Для обеспечения нормативной точности отчета задействована технология Retrieval-Augmented Generation (RAG). При обнаружении класса "Bad_Welding" система формирует поисковый запрос к векторной базе данных (ChromaDB), где хранят-

Таблица 1. Характеристики обученных ML-модулей детекции дефектов
Table 1. Features of trained ML defect detection modules

Объект контроля	Источник данных (Roboflow)	Объем выборки	Классы	Средняя уверенность (Conf)
Сварочные швы (трубы)	Welding Defect (kswbt) [14]	980	Bad/ Good	0,89
Поверхности металла	Fork of Defects (mai-ldivt) [13]	1350	Bad/ Good	0,85
Механические узлы	Machine Defects (j-component-ml) [12]	1054	Bad/ Good	0,87
Инструментальный контроль	Calipertop (imageai) [15]	976	Bad/ Good	0,92



Рис. 6. Тестовая детекция и сегментация дефекта (YOLOv8+SAM).

Изображение из открытых источников

Fig. 6. Test defect detection and segmentation (YOLOv8+SAM).

Image from open sources

ся эмбединги ГОСТ Р ИСО 5817—2009. Релевантные фрагменты стандарта (например, требования к сплошности шва) автоматически подмешиваются в контекст LLM (GPT-5), что исключает «галлюцинации» и обеспечивает юридическую достоверность формулировок.

Взаимодействие с языковой моделью осуществляется через структурированный API-запрос. Ниже приведен пример CURL-запроса, инкапсулирующего технические данные и RAG-контекст:

```
curl https://api.openai.com/v1/chat/completions \
  -H "Content-Type: application/json" \
  -H "Authorization: Bearer $API_KEY" \
  -d '{
    "model": "gpt-5",
    "messages": [
      {
        "role": "system",
        "content": "Ты – эксперт СМК. Генерируй отчет строго по ГОСТ Р ИСО 5817-2009 на основе JSON-данных и RAG-контекста."
      },
      {
        "role": "user",
        "content": "Данные ML: {class: Bad_Welding, conf: 0.89, area_px: 4520}. Контекст RAG: [ГОСТ_5817_Sec_7]. Сформируй JSON-отчет."
      }
    ],
    "response_format": {
      "type": "json_object"
    }
  }'
```

Результатом работы системы является валидный JSON-объект, готовый к импорту в ERP/MES-систему предприятия. Объект содержит не только вердикт, но и обоснование со ссылкой на конкретные пункты ГОСТ, а также перечень корректирующих действий:

```
{
  "report_metadata": {
    "report_id": "QA-2025-0042-B",
    "timestamp": "2025-10-27T14:30:05Z",
    "status": "NON-CONFORMING"
  },
  "inspection_analysis": {
    "detected_defect": "Bad_Welding",
    "confidence_score": 0.89,
    "compliance": {
      "standard": "ГОСТ Р ИСО 5817-2009",
      "verdict": "Нарушение требований по сплошности (п. 7.1)",

```

```
"rag_grounding": "Превышение площади пор относительно проекции шва (расчет: 5.2% > 4.0%)"
    }
  },
  "corrective_actions": [
    "Механическая зачистка дефектного участка",
    "Повторный контроль параметров газовой защиты",
    "Переварка соединения согласно техкарте №12"
  ]
}
```

Апробация показала, что использование RAG и векторных карт обеспечивает 98 % фактологической точности. К ограничениям относится зависимость от стабильности облачного API и вычислительная емкость SAM. Дальнейшие исследования будут направлены на переход к моделям семейства Llama для обеспечения полной автономности и безопасности данных предприятия [18].

К ограничениям текущей реализации следует отнести существенную зависимость от стабильности и доступности облачного API используемой языковой модели, а также высокие требования к вычислительным мощностям при инференсе модели SAM.

Дальнейшие исследования будут направлены на разработку методов автоматической верификации выводов LLM и переход к локально развернутым (on-premise) моделям класса Llama 3 для обеспечения полной информационной безопасности и автономности производственного предприятия [17–19].

Предложенный подход, основанный на синергии ML и LLM, успешно преодолевает разрыв между технической диагностикой и управленческими потребностями СМК, обеспечивая объективность и стандартизацию отчетности согласно требованиям ISO 9001.

Заключение

В рамках исследования была решена актуальная научно-практическая проблема, заключающаяся в преодолении семантического разрыва между низкоуровневыми данными систем машинного обучения и высокоуровневыми аналитическими по-

требностями СМК. Показано, что традиционные методы автоматизации не обеспечивают эффективной трансформации технических индикаторов в интерпретируемые знания, пригодные для принятия управленческих решений согласно стандартам ISO 9001.

Для решения указанной проблемы разработана и обоснована интеллектуальная система нового поколения, основанная на синергии современных архитектур компьютерного зрения (YOLOv8+SAM) и больших языковых моделей с поддержкой технологии RAG.

Основные выводы и результаты исследования:

1. Подтверждена техническая реализуемость синергетического подхода ML+LLM. Показано, что использование локальных модулей сегментации в связке с генеративными моделями позволяет полностью автоматизировать цикл формирования отчетности по качеству, исключая человеческий фактор на этапе первичной интерпретации данных.

2. Разработана модульная архитектура, ключевой особенностью которой является формирование семантических векторных карт дефектов. Это позволило перейти от простой детекции к глубокому морфологическому анализу несоответствий, результаты которого транслируются в LLM в виде структурированных тензоров метаданных.

3. Реализован механизм «заземления» (grounding) на основе технологии RAG. Интеграция векторной базы данных нормативной документации (включая ГОСТ Р ИСО 5817—2009) обеспечила достижение высокой фактологической точности генерируемых отчетов, исключая риск «галлюцинаций» языковой модели и гарантируя соответствие выводов требованиям стандартов.

4. Экспериментально доказана эффективность системы на базе верифицированных промышленных датасетов (включая форк-версии наборов данных Roboflow Universe). Обученные модели продемонстрировали высокую робастность и уверенность в диапазоне 85—92 % при классификации дефектов сварки и механических повреждений, в том числе на изображениях из открытых источников, не входящих в обучающую выборку.

5. Верифицирован формат интеллектуального вывода в виде валидных JSON-объектов, инкапсулирующих технический вердикт, ссылки на пункты ГОСТ и конкретные корректирующие действия. Это обеспечивает бесшовную интеграцию системы в существующие цифровые экосистемы предприятий (MES/ERP).

Предложенная система представляет собой готовую научно-методологическую базу для перехода к концепции Smart Quality Control в рамках Индустрии 4.0. Ее внедрение на машиностроительных предприятиях способно существенно повысить оперативность реагирования на отклонения, снизить трудоемкость подготовки отчетности и обеспечить объективность анализа, недоступную при традиционных методах контроля.

Работа вносит значимый вклад в теорию интеллектуальных систем управления, демонстрируя эффективность гибридных ИИ-технологий на стыке технической диагностики и менеджмента качества.

Список источников / References

1. Бекетова О. Н., Арифиллин М. В., Фролов А. Л. Инновационные технологии управления качеством продукции на предприятиях машиностроения // Вестник Алтайской акаде-

мии экономики и права. 2023. № 4-1. С. 18—22. DOI: 10.17513/vaael.2756. EDN: FWPCGA.

Beketova O. N., Arifullin M. V., Frolov A. L. Innovatsionnyye tekhnologii upravleniya kachestvom produktsii na predpriyatiyakh mashinostroyeniya [Innovative technologies of product quality management at mechanical engineering enterprises]. Vestnik Altayskoy akademii ekonomiki i prava. Bulletin of the Altai Academy of Economics and Law. 2023. No. 4-1. P. 18—22. DOI: 10.17513/vaael.2756. EDN: FWPCGA. (In Russ.).

2. Wang S., Zhao J., Ta N. [et al.]. A real-time deep learning forest fire monitoring algorithm based on an improved Pruned + KD model. Journal of Real-Time Image Processing. 2021. Vol. 18. P. 2319—2329. DOI: 10.1007/s11554-021-01124-9.

3. Благородов А. А., Прохоров В. Т., Кораблина С. Ю. [и др.]. Об особенностях обеспечения качества системы менеджмента для производства востребованной и приоритетной продукции // Фундаментальные и прикладные научные исследования в области инклюзивного дизайна и технологий: опыт, практика и перспективы: сб. науч. трудов XI Междунар. науч.-практ. конф. (25—27 марта 2025 г.). Ч. 3. Москва: РГУ им. А. Н. Косыгина, 2025. С. 191—198. EDN: EULQLN.

Blagorodov A. A., Prokhorov V. T., Korablina S. Y. [et al.]. Ob osobennostyakh obespecheniya kachestva sistemy menedzhmenta dlya proizvodstva vstrebovannoy i prioritetnoy produktsii [On the features of quality assurance of the management system for the production of in-demand and priority products]. Fundamental'nyye i Prikladnyye Nauchnyye Issledovaniya v Oblasti Inklyuzivnogo Dizayna i Tekhnologii: Opyt, Praktika i Perspektivy. Vol. 3. Moscow, 2025. P. 191—198. EDN: EULQLN. (In Russ.).

4. Боргардт Е. А., Бобель Д. Н. Технологии искусственного интеллекта в системе управления качеством // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. 2021. № 8-1 (59). С. 178—180. DOI: 10.24412/2500-1000-2021-8-1-178-180. EDN: JHAFSD.

Borgardt E. A., Bobel' D. N. Tekhnologii iskusstvennogo intellekta v sisteme upravleniya kachestvom [Using artificial intelligence technologies in the quality management system]. Mezhdunarodnyy zhurnal gumanitarnykh i estestvennykh nauk. International Journal of Humanities and Natural Sciences. 2021. No. 8-1 (59). P. 178—180. DOI: 10.24412/2500-1000-2021-8-1-178-180. EDN: JHAFSD. (In Russ.).

5. Зубков В. И. Инноватика процессов управления качеством в сложных технических системах // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2012. Т. 16, № 6 (51). С. 242—251.

Zubkov V. I. Innovatika protsessov upravleniya kachestvom v slozhnykh tekhnicheskikh sistemakh [Innovation of quality management processes in complex technical systems]. Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviatsionnogo tekhnicheskogo universiteta. Vestnik USATU. 2012. Vol. 16, no. 6 (51). P. 242—251. (In Russ.).

6. Кузнецов М. С., Калмыкова С. В. Искусственный интеллект в управлении качеством // Диалог. 2024. № 3. С. 37—39.

Kuznetsov M. S., Kalmykova S. V. Iskustvennyy intellekt v upravlenii kachestvom [Artificial intelligence in quality management]. Dialog. Dialogue. 2024. No. 3. P. 37—39. (In Russ.).

7. Малкина И. В. Автоматизация контроля качества геометрических параметров деталей в машиностроении // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2022. Т. 24, № 3. С. 34—41. DOI: 10.37313/1990-5378-2022-24-3-34-41. EDN: DDURMC.

Malkina I. V. Avtomatizatsiya kontrolya kachestva geometricheskikh parametrov detaley v mashinostroyenii [Automation of quality control of geometric parameters of parts in mechanical engineering]. Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiyskoy akademii nauk. Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2022. Vol. 24, no. 3. P. 34—41. DOI: 10.37313/1990-5378-2022-24-3-34-41. EDN: DDURMC. (In Russ.).

8. Попенко И. И. Автоматические системы контроля в машиностроении // Россия молодая: сб. материалов VIII Всерос. науч.-практ. конф. молодых ученых с междунар. участием, Кемерово, 19–22 апреля 2016 г. Кемерово: Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева, 2016. С. 234. EDN: WKJZRV.
- Popenko I. I. Avtomaticheskiye sistemy kontrolya v mashinostroyenii [Automatic control systems in mechanical engineering]. *Rossiya Molodaya*. Kemerovo, 2016. P. 234. EDN: WKJZRV. (In Russ.).
9. Сунцов А. П. Современные средства контроля изделий в машиностроении // Студенческий научный форум: X Междунар. студен. науч. конф. Екатеринбург: Российский государственный профессионально-педагогический университет, 2018. С. 1–6.
- Suntsov A. P. Sovremennyye sredstva kontrolya izdeliy v mashinostroyenii [State-of-the-art tools for product control in mechanical engineering]. *Studencheskiy Nauchnyy Forum*. Ekaterinburg, 2018. P. 1–6. (In Russ.).
10. Xie T., Cheng X., Wang X. [et al.]. Cut-Thumbnail: A Novel Data Augmentation for Convolutional Neural Network. *Proc. of the 29th ACM Intern. Conf. on Multimedia, Virtual Event*. 2021. P. 1627–1635. DOI: 10.1145/3474085.3475302.
11. Terven J., Cordova-Esparza D.-M., Romero-González J.-A. A comprehensive review of YOLO architectures in computer vision: From YOLOv1 to YOLOv8 and YOLO-NAS. *Machine Learning and Knowledge Extraction*. 2023. No. 5. P. 1680–1716. DOI: 10.3390/make5040083.
12. Machine defects computer vision model. URL: <https://universe.roboflow.com/j-component-ml/machine-defects> (accessed: 27.10.2025).
13. Defects computer vision model. URL: <https://universe.roboflow.com/mai-ldivt/defects-lavkc> (accessed: 27.10.2025).
14. Welding defect detection computer vision model. URL: <https://universe.roboflow.com/final-year-project-kswbt/welding-defect-detection> (accessed: 27.10.2025).
15. CaliperTop_backup computer vision dataset. URL: https://universe.roboflow.com/imagineai/calipertop_backup (accessed: 27.10.2025).
16. Jocher G. Ultralytics YOLOv8. URL: <https://github.com/ultralytics/ultralytics> (accessed: 27.10.2025).
17. Kirillov A., Mintun E., Ravi N. [et al.]. Segment Anything. 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2304.02643.
18. Lewis P., Perez E., Piktus A. [et al.]. Retrieval-augmented generation for knowledge-intensive NLP tasks. *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2020. Vol. 33. P. 9459–9474. DOI: 10.48550/arXiv.2005.11401.
19. ГОСТ Р ИСО 5817–2009. Сварка. Сварные соединения из стали, никеля, титана и их сплавов, полученные сваркой плавлением. Уровни качества в зависимости от дефектов. Введ. 01.01.2011. Москва: Стандартинформ, 2010. 31 с.
- GOST R ISO 5817–2009. Svarka. Svarnyye soyedineniya iz stali, nikelya, titana i ikh spлавov, poluchennyye svarkoy plavleniyem. Urovni kachestva v zavisimosti ot defektov [Welding. Fusion-welded joints in steel, nickel, titanium and their alloys (beam welding excluded). Quality levels for imperfections]. Moscow, 2010. 31 p. (In Russ.).
-
- ГВИНТОВКИН Михаил Владимирович**, аспирант кафедры Н1 «Системы приводов, мехатроника и робототехника» Балтийского государственного технического университета «ВОЕНМЕХ» им. Д. Ф. Устинова, г. Санкт-Петербург. Адрес для переписки: gvn.mi.vl@gmail.com
- Прозрачность финансовой деятельности:** автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.
- Статья поступила в редакцию 10.09.2025; одобрена после рецензирования 12.12.2025; принята к публикации 26.01.2026.
- GVINTOVKIN Mikhail Vladimirovich**, Postgraduate at the H1 Drive Systems, Mechatronics and Robotics Department, Baltic State Technical University "VOENMEH" named after D. F. Ustinov, Saint Petersburg. Correspondence address: gvn.mi.vl@gmail.com
- Financial transparency:** the author has no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.
- The article was submitted 10.09.2025; approved after reviewing 12.12.2025; accepted for publication 26.01.2026.

УДК/UDC 621.311

DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-69-78

EDN: MTOHEG

Научная статья / Original article

РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ВЫЯВЛЕНИЯ И ПОДАВЛЕНИЯ ФЕРРОРЕЗОНАНСНЫХ ПРОЦЕССОВ В ИЗОЛИРОВАННЫХ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСАХ И СИСТЕМАХ

Б. А. Косарев

Омский государственный технический университет,
Россия, 644050, г. Омск, пр. Мира, 11

Статья посвящена разработке методики выявления и подавления феррорезонансных процессов в изолированных электротехнических комплексах и системах. Развитие распределительных сетей по принципу распределенной генерации позволяет уменьшить потери на передачу и организовывать изолированные от Единой энергетической системы электротехнические комплексы и системы. Одним из недостатков таких систем является более низкая динамическая устойчивость по сравнению с централизованным электроснабжением. Отклонения напряжения и частоты в изолированных комплексах и системах могут привести к насыщению магнитопроводов силовых трансформаторов, возникновению феррорезонанса. Данный вопрос представляется проблемным и малоизученным. Поэтому целью работы является разработка методики выявления и подавления феррорезонансных контуров в изолированных электротехнических комплексах и системах, которая учитывает режим насыщения силовых трансформаторов и отклонения напряжения и частоты от номинальных значений.

В работе приведен вывод выражений для расчета сопротивления намагничивающей ветви силового трансформатора в режиме насыщения и при отклонении напряжения частоты от номинальных значений. Описана методика выявления феррорезонансных процессов и оценки, направленных на их подавление управляющих воздействий по амплитудно-частотной характеристике сети.

Методика апробирована на примере электротехнического комплекса нефтегазодобывающего предприятия. Согласно расчетам, загрузка трансформатора 35/6 кВ на 12 % в режиме насыщения его магнитной системы соответствует возникновению параллельного феррорезонанса на частоте 47,3 Гц и последовательного феррорезонанса на частоте 72,2 Гц. Феррорезонансный процесс демпфируется при увеличении загрузки трансформатора. Расстройка феррорезонансного контура путем увеличения емкости установки поперечной емкостной компенсации с 13 мкФ до 26 мкФ соответствует смещению параллельного феррорезонанса на частоту 36,4 Гц, последовательного феррорезонанса — на частоту 55,7 Гц.

Ключевые слова: электротехнический комплекс, электротехническая система, распределенная генерация, феррорезонансный контур, феррорезонансный процесс, комплексное сопротивление намагничивающей ветви трансформатора.

Для цитирования: Косарев Б. А. Разработка методики выявления и подавления феррорезонансных процессов в изолированных электротехнических комплексах и системах // Омский научный вестник. 2026. № 1 (197). С. 69–78. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-69-78. EDN: MTOHEG.



© Косарев Б. А., 2026.
Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

DEVELOPMENT OF METHODOLOGY FOR IDENTIFYING AND SUPPRESSING FERRORESONANCE PROCESSES IN ISOLATED ELECTRICAL COMPLEXES AND SYSTEMS

B. A. Kosarev

Omsk State Technical University, Russia, Omsk, Mira Ave., 11, 644050

This article is devoted to the development of a methodology for identifying and suppressing ferroresonance processes in isolated electrical complexes and systems. The development of distribution networks based on the principle of distributed generation allows for the reduction of transmission losses and the organization of electrical complexes and systems isolated from the Unified Energy System. One of the disadvantages of such systems is their lower dynamic stability compared to centralized power supply. Voltage and frequency deviations in isolated complexes and systems can lead to saturation of the magnetic cores of power transformers, resulting in ferroresonance. This issue remains challenging and poorly understood. Therefore, the objective of this work is to develop a methodology for identifying and suppressing ferroresonance circuits in isolated electrical complexes and systems, taking into account the saturation mode of power transformers and deviations in voltage and frequency from their nominal values.

This paper presents the derivation of expressions for calculating the resistance of the magnetizing branch of a power transformer in saturation mode and when voltage and frequency deviate from their nominal values. A method for identifying ferroresonance processes and evaluating control actions aimed at suppressing them based on the amplitude-frequency characteristic of the network is described.

The method is tested using the example of an oil and gas production enterprise's electrical transformer substation. According to calculations, a 12 % load on a 35/6 kV transformer in saturation mode of its magnetic system corresponds to the formation of parallel ferroresonance at a frequency of 47.3 Hz and series ferroresonance at a frequency of 72.2 Hz. The ferroresonant process is damped as the transformer load increases. Detuning the ferroresonant circuit by increasing the capacitance from 13 μF to 26 μF corresponds to a shift of parallel ferroresonance to a frequency 36.4 Hz and series ferroresonance to a frequency of 55.7 Hz.

Keywords: distributed generation, electro technical complex, electro technical system, ferroresonant circuit, ferroresonant process, complex impedance of transformers magnetizing branch.

For citation: Kosarev B. A. Development of a methodology for identifying and suppressing ferroresonance processes in isolated electrical complexes and systems. *Omsk Scientific Bulletin*. 2026. No. 1 (197). P. 69–78. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-69-78. EDN: MTOHEG.



© Kosarev B. A., 2026.

The content is available under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Введение

Феррорезонансный процесс (ФП) возникает при равенстве индуктивного и емкостного сопротивлений участка распределительной сети электро-технического комплекса или системы (ЭТК и С). Процесс является аварийным, так как сопровождается перенапряжениями, перегревом и выходом из строя элементов сети. В условиях централизованного электроснабжения вопрос выявления и подавления феррорезонанса с участием измерительных трансформаторов достаточно полно исследован [1]. В исследованиях к характерным причинам возникновения такого аварийного процесса относят повреждение элементов сети с формированием несимметричного режима работы электрооборудования, низкие потери в магнитной системе измерительного трансформатора, одностороннее отключение элементов сети [2, 3]. Как правило, в качестве индуктивного элемента феррорезонансного контура выступает измерительный трансформатор. Эквивалентная емкость формируется из распределенной емкости сети, шунтирующих конденсаторов высоковольтных выключателей, средств компенсации реактивной мощности.

Перспективным направлением развития зарубежной и отечественной энергетики является

распределенная генерация (РГ) [4–7]. РГ — это принцип развития распределительных сетей, при котором генерирующие установки располагаются в непосредственной близости от потребителя [8].

Изолированные ЭТК и С соответствуют принципу РГ и обладают преимуществом автономности. Среди недостатков изолированных ЭТК и С следует отметить низкую динамическую устойчивость по сравнению с системой централизованного электроснабжения [9, 10]. Низкая динамическая устойчивость увеличивает вероятность выхода параметров режима сети ЭТК и С за предельно допустимые значения. К таким параметрам относятся частота и напряжение в точке подключения силового трансформатора. Их соотношение определяет величину магнитной индукции в магнитопроводе силового трансформатора, согласно [11] используется как индикатор насыщения. При насыщении магнитопровода равенство эквивалентных индуктивного и емкостного сопротивлений участка сети будет соответствовать возникновению ФП с участием не измерительного, а силового трансформатора [12]. Таким образом, именно в изолированных ЭТК и С существует вероятность возникновения ФП с участием силового трансформатора при отсутствии повреждений элементов сети с формирова-

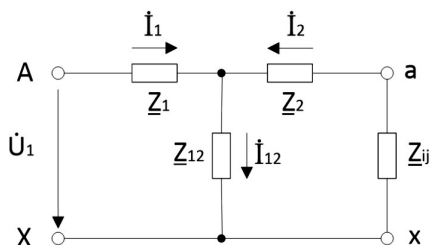


Рис. 1. Т-образная схема замещения трансформатора

Fig. 1. T-shaped equivalent circuit of a transformer

нием несимметричного режима работы или некорректных оперативных переключений [13]. Данный вопрос представляется проблемным и малоизученным. Следовательно, целью работы является разработка методики выявления и подавления феррорезонансных контуров в изолированных ЭТК и С, которая учитывает режим насыщения силовых трансформаторов и отклонения напряжения и частоты от номинальных значений.

Поправки и допущения для расчета ФП с участием силового трансформатора

Для участка сети при отсутствии режима насыщения силового трансформатора резонанс соответствует минимальному или максимальному значениям модуля комплексного сопротивления, и его расчет символьным методом (комплексным методом) не представляет сложности. При насыщении трансформатора и возникновении феррорезонанса синусоидальная форма кривых напряжения и тока искажается, поэтому комплексный метод расчета применим только для отдельных гармоник. Согласно исследованиям в зависимости от глубины насыщения трансформатора максимальные амплитуды третьей и пятой гармоник от основной составляют соответственно около 40 и 10 %. Гармоники более высокого порядка имеют амплитуду, составляющую десятые и сотые доли процента. Поэтому наибольшую опасность для сетевого электрооборудования представляет феррорезонанс на основной гармонике.

Общепринятый расчет параметров схемы замещения трансформатора выполняется комплексным методом для номинальных значений напряжения и частоты, при отсутствии режима насыщения. В условиях ФП за счет насыщения магнитопровода уменьшается индуктивное сопротивление намагничивающей ветви, а его активная составляющая (потери) зависит от отклонений напряжения и частоты. Покажем вывод формул для расчета сопротивления намагничивающей ветви, которые позволяют вносить поправки на отклонения напряжения и частоты, изменение степени насыщения магнитной системы силового трансформатора.

Рассмотрим Т-образную схему замещения силового трансформатора (рис. 1).

Эквивалентное сопротивление схемы замещения трансформатора относительно внешней сети:

$$\underline{Z}_{\Sigma} = \frac{\underline{Z}_{12} \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{lj})}{\underline{Z}_{12} + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{lj})} + \underline{Z}_1, \quad (1)$$

где $\underline{Z}_{\Sigma}$ — эквивалентное комплексное сопротивление схемы замещения трансформатора относительно внешней сети; $\underline{Z}_{12}$ — комплексное сопро-

тивление намагничивающей ветви трансформатора; $\underline{Z}_2$ — комплексное сопротивление вторичной обмотки трансформатора; $\underline{Z}_1$ — комплексное сопротивление первичной обмотки трансформатора; $\underline{Z}_{lj}$ — эквивалентное комплексное сопротивление N присоединений узла $(x_i; y_j)^U$.

Основываясь на втором законе Кирхгофа (рис. 1), выразим ток во вторичной обмотке трансформатора:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 - \underline{U}_1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{lj}}, \quad (2)$$

где $\underline{I}_2$ — комплексный ток вторичной обмотки трансформатора; $\underline{Z}_1$ — комплексное сопротивление первичной обмотки трансформатора; $\underline{Z}_2$ — комплексное сопротивление вторичной обмотки трансформатора; $\underline{Z}_{lj}$ — эквивалентное комплексное сопротивление N присоединений узла $(x_i; y_j)^U$; $\underline{U}_1$ и $\underline{I}_1$ — комплексные напряжение и ток первичной обмотки.

Исходя из первого закона Кирхгофа, выразим намагничивающий ток через токи в первичной и вторичной обмотках трансформатора:

$$\underline{I}_{12} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2, \quad (3)$$

где $\underline{I}_{12}$ — комплексный намагничивающий ток; $\underline{I}_1$ и $\underline{I}_2$ — комплексные токи в первичной и вторичной обмотках трансформатора.

Подставив (2) в (3), получим

$$\underline{I}_{12} = \underline{I}_1 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 - \underline{U}_1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{lj}}. \quad (4)$$

Магнитная проницаемость магнитопровода трансформатора может быть выражена через магнитную индукцию и напряженность магнитного поля:

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 \cdot H}, \quad (5)$$

где μ — магнитная проницаемость материала магнитопровода трансформатора; μ_0 — магнитная проницаемость вакуума; B — магнитная индукция; H — напряженность магнитного поля.

Напряженность магнитного поля в сердечнике трансформатора прямо пропорциональна намагничивающему току, числу витков обмотки и обратно пропорциональна длине магнитной линии в обмотке:

$$H = \frac{|\underline{I}_{12}| \cdot w_1}{l \cdot \sqrt{2}}, \quad (6)$$

где $|\underline{I}_{12}|$ — амплитуда комплексного намагничивающего тока; w_1 — число витков обмотки; l — длина магнитной линии в обмотке.

Подставив (6) в (5), получим

$$\mu = \frac{B \cdot l \cdot \sqrt{2}}{\mu_0 \cdot |\underline{I}_{12}| \cdot w_1}, \quad (7)$$

где μ — магнитная проницаемость материала магнитопровода трансформатора; μ_0 — магнитная проницаемость вакуума; B — магнитная индукция; l — длина магнитной линии в обмотке; w_1 — чис-

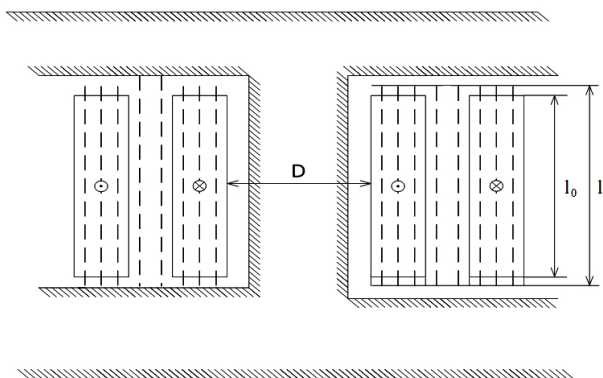


Рис. 2. Распределение магнитного поля рассеяния в трансформаторе с концентрическими обмотками:
 D — диаметр обмотки низкого напряжения;
 l — длина магнитной линии; l_0 — высота обмотки
Fig. 2. Distribution of the magnetic leakage field in a transformer with concentric windings:
 D — diameter of the low-voltage winding;
 l — length of the magnetic line; l_0 — height of the winding

ло витков обмотки; $|i_{12}|$ — амплитуда комплексного намагничивающего тока.

Индуктивную составляющую сопротивления намагничивающей ветви трансформатора можно представить как

$$X_{12} = 2\pi f \cdot L, \quad (8)$$

где L — индуктивность обмотки трансформатора; f — частота сети.

Индуктивность обмотки трансформатора может быть выражена через сечение магнитопровода:

$$L = \frac{\mu \mu_0 \cdot w_1^2 \cdot S}{l}, \quad (9)$$

где L — индуктивность обмотки трансформатора; μ — магнитная проницаемость материала магнитопровода трансформатора; μ_0 — магнитная проницаемость вакуума; S — площадь сечения магнитопровода; l — длина магнитной линии в обмотке; w_1 — число витков обмотки.

Для трансформатора с концентрическими обмотками площадь сечения магнитопровода можно приблизительно рассчитать через диаметр обмоток низкого напряжения (рис. 2).

Выражение (9) примет следующий вид:

$$L = \frac{\pi \mu \mu_0 \cdot w_1^2 \cdot D^2}{4 \cdot l}, \quad (10)$$

где D — средний диаметр обмоток низкого напряжения трансформатора.

Подставив (9) в (8), выразим индуктивную составляющую сопротивления намагничивающей ветви трансформатора через магнитную проницаемость материала магнитопровода, частоту сети и конструктивные параметры трансформатора:

$$X_{12} = \frac{2\pi f \cdot \mu \mu_0 \cdot w_1^2 \cdot S}{l}, \quad (11)$$

где X_{12} — индуктивная составляющая сопротивления намагничивающей ветви трансформатора; f — частота сети; μ — магнитная проницаемость

материала магнитопровода трансформатора; μ_0 — магнитная проницаемость вакуума; S — площадь сечения магнитопровода; l — длина магнитной линии в обмотке; w_1 — число витков обмотки. Так как значение магнитной проницаемости магнитопровода в условиях феррорезонанса изменяется нелинейно и в расчетах с практической точки зрения удобнее использовать кривую намагничивания $B(H)$, выразим X_{12} через магнитную индукцию и намагничивающий ток:

$$X_{12} = \frac{2\sqrt{2}\pi f \cdot B \cdot w_1 \cdot S}{|i_{12}|}, \quad (12)$$

где X_{12} — индуктивная составляющая сопротивления намагничивающей ветви трансформатора; f — частота сети; B — магнитная индукция в сердечнике трансформатора; S — площадь сечения магнитопровода; w_1 — число витков обмотки; $|i_{12}|$ — амплитуда комплексного намагничивающего тока.

Заменим в (12) намагничивающий ток согласно (4):

$$X_{12} = \frac{2\sqrt{2}\pi f \cdot B \cdot w_1 \cdot S}{\left| i_1 + \frac{Z_1 \cdot i_1 - \dot{U}_1}{Z_2 + Z_{ij}} \right|}, \quad (13)$$

где X_{12} — индуктивная составляющая сопротивления намагничивающей ветви трансформатора; f — частота сети; B — магнитная индукция в сердечнике трансформатора; S — площадь сечения магнитопровода; w_1 — число витков обмотки; i_2 — ток вторичной обмотки трансформатора; Z_1 — комплексное сопротивление первичной обмотки трансформатора; Z_2 — комплексное сопротивление вторичной обмотки трансформатора; Z_{ij} — эквивалентное комплексное сопротивление N присоединений узла $(x_i; y_j)^U$; $\dot{U}_1$ и i_1 — комплексные напряжение и ток первичной обмотки. Выразив $|i_{12}|$ из (6) и подставив в (13), получим формулу для расчета X_{12} по кривой намагничивания:

$$X_{12} = \frac{2\pi f \cdot w_1^2 \cdot S}{l} \cdot \frac{B}{H}, \quad (14)$$

где X_{12} — индуктивная составляющая сопротивления намагничивающей ветви трансформатора; f — частота сети; B — магнитная индукция в магнитопроводе; H — напряженность магнитного поля в магнитопроводе; S — площадь сечения магнитопровода; w_1 — число витков обмотки; l — длина магнитной линии.

В (14) для расчетного определения индуктивного сопротивления взаимной индукции обмоток трансформатора принято, что все магнитные линии направлены параллельно оси стержней магнитопровода.

Их длина l принимается несколько больше высоты обмотки (рис. 2):

$$l = \frac{l_0}{k_R}, \quad (15)$$

где $k_R = 0,93-0,98$ — коэффициент Роговского.

Следует отметить, что при расчете феррорезонансных контуров в распределительной сети ЭТК и С нужно учитывать зависимость действительной

части комплексного сопротивления намагничивающей ветви трансформатора от напряжения и частоты сети:

$$R_{12} = \frac{P_0}{3 \cdot \left| \dot{I}_1 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \dot{I}_1 - \dot{U}_1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{ij}} \right|^2}, \quad (16)$$

где R_{12} — активная составляющая сопротивления намагничивающей ветви трансформатора; P_0 — мощность потерь в материале магнитопровода при номинальных значениях частоты и напряжения (потери холостого хода трансформатора); $\underline{Z}_1$ — комплексное сопротивление первичной обмотки трансформатора; $\underline{Z}_2$ — комплексное сопротивление вторичной обмотки трансформатора; $\underline{Z}_{ij}$ — эквивалентное комплексное сопротивление N присоединений узла (x_i ; y_j); $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ — комплексные напряжение и ток первичной обмотки.

Известно, что при увеличении степени насыщения магнитопровода трансформатора потери на вихревые токи и гистерезис возрастают. Таким образом, мощность холостого хода P_0 , полученная при номинальных значениях напряжения и частоты сети, будет вносить дополнительную погрешность в расчеты R_{12} . Для более корректного расчета значения R_{12} нужно учитывать изменение потерь в магнитной системе трансформатора.

Обусловленная такими потерями мощность нагрева массы магнитопровода при номинальных значениях частоты и напряжения может быть вычислена через удельную мощность потерь:

$$P_0 = p_x \cdot m, \quad (17)$$

где p_x — удельная мощность потерь в материале магнитопровода; m — масса магнитопровода; P_0 — мощность потерь в материале магнитопровода при номинальных значениях частоты и напряжения (потери холостого хода трансформатора).

Согласно [11] удельная мощность потерь в материале магнитопровода может быть рассчитана при приближенных расчетах по следующей формуле:

$$p_x \approx B^m \cdot f^n, \quad (18)$$

где p_x — удельная мощность потерь в материале магнитопровода; B — действующее значение магнитной индукции; f — частота сети; m и n — коэффициенты.

Коэффициенты m и n определяют по табл. 1 [14].

Выразив отклонение значений U_1 и f в относительных единицах, можно рассчитать изменение удельных потерь.

Отклонение напряжения:

$$a = \frac{U_1}{U_{ном}}, \quad (19)$$

где U_1 — напряжение сети для рассматриваемых схемно-режимных условий; $U_{ном}$ — номинальное напряжение сети (номинальное напряжение первичной обмотки трансформатора).

Отклонение частоты:

$$b = \frac{f}{f_{ном}}, \quad (20)$$

Таблица 1. Коэффициенты для расчета удельной мощности потерь в магнитной системе трансформатора
Table 1. Coefficients for calculating the specific power loss in the transformer magnetic system

	m		n	
Горячекатаная сталь	2	—	1,3	—
Холоднокатаная сталь	2	3	1,25	1,25
Диапазон В, Тл	1–1,5	1,5–1,8	1–1,5	1,5–1,8

где f — частота изолированного ЭТК или изолированной ЭТС для рассматриваемых схемно-режимных условий; $f_{ном}$ — номинальная частота изолированного ЭТК или изолированной ЭТС.

Амплитуда магнитной индукции главного потока трансформатора рассчитывается согласно выражению:

$$B_m = \frac{E_1}{4,44 \cdot S \cdot w_1 \cdot f}, \quad (21)$$

где B_m — амплитуда магнитной индукции главного потока трансформатора; E_1 — наводимая главным потоком трансформатора в первичной обмотке электродвижущая сила (ЭДС); w_1 — число витков первичной обмотки; f — частота сети.

Исходя из того, что падение напряжения на сопротивлении первичной обмотки трансформатора составляет 2–4 % от наводимой в ней главным потоком ЭДС, можно принять $U_1 \approx E_1$. Тогда, учитывая (19) и (20), выражение для расчета амплитуды магнитной индукции примет вид

$$B_m \approx \frac{a \cdot U_{ном}}{4,44 \cdot S \cdot w_1 \cdot b \cdot f_{ном}}, \quad (22)$$

где B_m — амплитуда магнитной индукции главного потока трансформатора; E_1 — наводимая главным потоком трансформатора в первичной обмотке ЭДС; w_1 — число витков первичной обмотки; f — частота сети; a и b — относительные отклонения напряжения и частоты сети.

Если принять, что магнитная индукция изменяется по синусоидальному закону, то ее действующее значение будет соответствовать выражению

$$B \approx \frac{a}{b} \cdot \frac{U_{ном}}{4,44 \cdot \sqrt{2} \cdot S \cdot w_1 \cdot f_{ном}}. \quad (23)$$

Подставив в (19) выражения (23) и (20), найдем изменение удельной мощности потерь в материале магнитопровода при отклонениях U_1 и f :

$$p_x \approx \left(\frac{a}{b} \right)^m \cdot b^n \cdot B_{ном}^m \cdot f_{ном}^n, \quad (24)$$

где p_x — удельная мощность потерь в материале магнитопровода; $f_{ном}$ — номинальное значение частоты сети; $B_{ном}$ — значение магнитной индукции при номинальных частоте и напряжении; m и n — коэффициенты.

Из (24) и (18) следует, что при отклонении параметров режима ЭТК или ЭТС потери в стали трансформатора составят

$$P_t \approx \left(\frac{a}{b} \right)^m \cdot b^n \cdot P_0, \quad (25)$$

где P_t — мощность потерь в материале магнитопровода при относительном отклонении напряжения a и относительном отклонении частоты b ; P_0 — мощность потерь в материале магнитопровода при номинальных значениях частоты и напряжения (потери холостого хода трансформатора); m и n — коэффициенты.

Выполнив замену P_0 в (16) на правую часть выражения (25), получим зависимость действительной части комплексного сопротивления намагничивающей ветви трансформатора от напряжения и частоты сети:

$$R_{12} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot b^n \cdot P_0}{3 \cdot \left| \dot{I}_1 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \dot{I}_1 - \dot{U}_1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{ij}} \right|^2}, \quad (26)$$

где R_{12} — активная составляющая сопротивления намагничивающей ветви трансформатора; a и b — коэффициенты относительного отклонения напряжения и частоты; P_0 — мощность потерь в материале магнитопровода при номинальных значениях частоты и напряжения (потери холостого хода трансформатора); $\underline{Z}_1$ — комплексное сопротивление первичной обмотки трансформатора; $\underline{Z}_2$ — комплексное сопротивление вторичной обмотки трансформатора; $\underline{Z}_{ij}$ — эквивалентное комплексное сопротивление N присоединений узла (x_i ; y_j); $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ — комплексные напряжение и ток первичной обмотки.

Выявление и подавление феррорезонанса по амплитудно-частотной характеристике сети

Возможность формирования феррорезонансного контура в ЭТК и С с участием силового трансформатора можно оценить по амплитудно-частотной характеристике (АЧХ) участка сети:

$$|\underline{Z}_\Sigma| = F(f). \quad (27)$$

Для построения АЧХ найдем аналитическое выражение для $\underline{Z}_\Sigma$ в комплексной форме. Пусть

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1; \quad (28)$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2; \quad (29)$$

$$\underline{Z}_{12} = R_{12} + jX_{12}; \quad (30)$$

$$\underline{Z}_{ij} = R + jX. \quad (31)$$

Подставим в (1) выражения (28) — (31) и выделим действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_\Sigma &= R_1 + jX_1 + \\ &+ \frac{(R_{12} + jX_{12}) \cdot (R + jX + R_2 + jX_2)}{(R_{12} + R + R_2) + j(X_{12} + X + X_2)} = \\ &= R_1 + jX_1 + \frac{R_{12}R + jR_{12}X + R_{12}R_2 + jR_{12}X_2 + \\ &+ jX_{12}R - X_{12}X + jX_{12}R_2 - X_{12}X_2}{(R_{12} + R + R_2) + j(X_{12} + X + X_2)} = \\ &= R_1 + jX_1 + \frac{(R_{12}R + R_{12}R_2 - X_{12}X - X_{12}X_2) + \\ &+ j(R_{12}X + R_{12}X_2 + X_{12}R + X_{12}R_2)}{(R_{12} + R + R_2) + j(X_{12} + X + X_2)}. \end{aligned}$$

Пусть

$$a = R_{12}R + R_{12}R_2 - X_{12}X - X_{12}X_2; \quad (32)$$

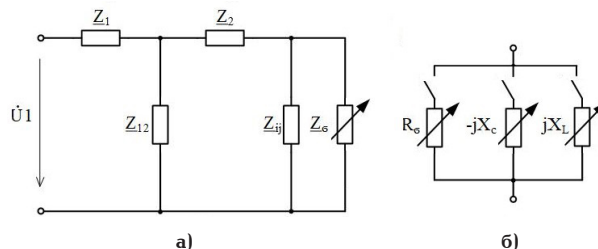


Рис. 3. Подключение балластной нагрузки для подавления феррорезонанса: а — схема замещения силового трансформатора; б — балластная нагрузка

Fig. 3. Connection of ballast load to suppress ferroresonance: а — equivalent circuit of a power transformer; б — ballast load

$$b = R_{12}X + R_{12}X_2 + X_{12}R + X_{12}R_2; \quad (33)$$

$$e = R_{12} + R + R_2; \quad (34)$$

$$q = X_{12} + X + X_2. \quad (35)$$

Тогда $\underline{Z}_\Sigma$ можно представить как

$$\underline{Z}_\Sigma = R_1 + jX_1 + \frac{a + jb}{e + jq}. \quad (36)$$

Выделим в (36) действительную и мнимую части:

$$\underline{Z}_\Sigma = \left(R_1 + \frac{ae + bq}{e^2 + q^2} \right) + j \left(X_1 + \frac{be - aq}{e^2 + q^2} \right). \quad (37)$$

Выражение для построения АЧХ модуля комплексного сопротивления участка сети ЭТК и С будет иметь вид

$$|\underline{Z}_\Sigma| = \sqrt{\left(R_1 + \frac{ae + bq}{e^2 + q^2} \right)^2 + \left(X_1 + \frac{be - aq}{e^2 + q^2} \right)^2}. \quad (38)$$

Для (38) частотно-зависимыми являются X , X_1 , X_2 , X_{12} и R_{12} . Соответствующее потерям в магнитопроводе силового трансформатора сопротивление R_{12} рассчитывается согласно (26) для значений напряжения и (или) частоты, отличных от номинальных.

Отдельно рассмотрим расчет X_{12} . Для номинальных значений напряжения и частоты:

$$X_{12}^{ном} = \frac{2\pi f_{ном} w_1^2 S}{l} \cdot \frac{B_{ном}}{H_{ном}}. \quad (39)$$

Из выражения (39) получим:

$$\frac{w_1^2 S}{l} = X_{12}^{ном} \cdot \frac{1}{2\pi f_{ном}} \cdot \frac{H_{ном}}{B_{ном}}. \quad (40)$$

Пусть $A = \frac{w_1^2 S}{l} = \text{const}$. Тогда мнимая часть комплексного сопротивления ветви намагничивания трансформатора для напряжения и частоты сети, отличных от номинальных, может быть рассчитана по формуле:

$$X_{12} = 2\pi f \cdot A \cdot \frac{B}{H}. \quad (41)$$

В выражении (41) множитель V/H рассчитывается при помощи кривых намагничивания $B(H)$ для разных значений частоты при фиксированном для построения АЧХ уровне напряжения сети.

АЧХ участка сети ЭТК и С, содержащего силовой трансформатор, рассчитывается для полосы частот $[f_{\min}; f_{\max}]$. Диапазон частот определяется уставовками противоаварийной автоматики. Граничные частоты соответствуют отключению генерирующих установок ЭТК и С или участка сети с силовым трансформатором, вовлеченным в феррорезонансный процесс.

Феррорезонанс является аварийным режимом работы для электрооборудования ЭТК и С. Следовательно, целесообразно привести расчеты для подавления феррорезонансных процессов. Прямым способом прерывания таких процессов является двухстороннее отключение силового трансформатора, что соответствует прерыванию электроснабжения потребителей. Рациональным, с точки зрения надежности электроснабжения, является расстройка феррорезонансного колебательного контура.

Расстройка может быть выполнена подключением параллельно нагрузке трансформатора $\underline{Z}_{ij}$ балластного сопротивления $\underline{Z}_6$ (рис. 3).

Такое сопротивление в общем случае соответствует параллельному соединению переменных активного, индуктивного и емкостного сопротивлений. Балластное сопротивление $\underline{Z}_6$, при котором резонанс возникает за полосой частот $[f_{\min}; f_{\max}]$, соответствует подавлению аварийного процесса.

Для построения АЧХ участка сети с балластным сопротивлением в $|\underline{Z}_6|$ должны быть включены действительная и (или) мнимая составляющие балластного сопротивления.

Приведем расчеты для случая, когда балластное сопротивление является параллельным соединением активного, индуктивного и емкостного сопротивлений.

Найдем $\underline{Z}_6$ как параллельное соединение индуктивного, емкостного и активного сопротивлений:

$$\underline{Z}_6 = \frac{R_6 \cdot X_L \cdot X_C}{X_L X_C + jR_6(X_L - X_C)}. \quad (42)$$

Пусть

$$d = R_6 \cdot X_L \cdot X_C; \quad (43)$$

$$k = X_L \cdot X_C; \quad (44)$$

$$h = R_6(X_L - X_C). \quad (45)$$

После подстановки (43) – (45) в (42) получим

$$\underline{Z}_6 = \frac{dk}{k^2 + h^2} - \frac{jdh}{k^2 + h^2}. \quad (46)$$

Пусть

$$l = \frac{dk}{k^2 + h^2}; \quad (47)$$

$$g = \frac{-dh}{k^2 + h^2}. \quad (48)$$

После подстановки (47) и (48) в (46) получим

$$\underline{Z}_6 = l + jg. \quad (49)$$

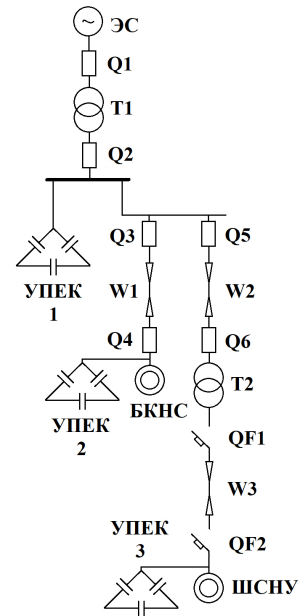


Рис. 4. Однолинейная схема ЭТК нефтегазодобывающего предприятия: ЭС — электростанция; T1 — трансформатор 35/6 кВ; T2 — трансформатор 6/0,4 кВ; УПЕК 1, 2, 3 — установки поперечной емкостной компенсации; БКНС — блочная кустовая насосная станция; ШСНУ — штанговая скважная насосная установка; Q1–Q6 и QF1, QF2 — выключатели; W1–W3 — кабельные линии
Fig. 4. Single-line diagram of the electrical and technical complex of an oil and gas producing enterprise: ЭС — power station; T1 — 35/6 kV transformer; T2 — 6/0.4 kV transformer; УПЕК 1, 2, 3 — transverse capacitive compensation units; БКНС — modular cluster pumping station; ШСНУ — sucker rod pumping unit; Q1–Q6 and QF1, QF2 — switches; W1–W3 — cable lines

Выразим $\underline{Z}$ как параллельное соединение $\underline{Z}_6 = l + jg$ и $\underline{Z}_{ij} = R + jX$:

$$\underline{Z} = \frac{(Rl - Xg) \cdot (l + R) + (gR + Xl) \cdot (g + X)}{(l + R)^2 + (g + X)^2} + j \frac{(gR + Xl) \cdot (l + R) - (g + X) \cdot (Rl - Xg)}{(l + R)^2 + (g + X)^2}. \quad (50)$$

Пусть

$$\alpha = \frac{(Rl - Xg) \cdot (l + R) + (gR + Xl) \cdot (g + X)}{(l + R)^2 + (g + X)^2}; \quad (51)$$

$$\beta = \frac{(gR + Xl) \cdot (l + R) - (g + X) \cdot (Rl - Xg)}{(l + R)^2 + (g + X)^2}. \quad (52)$$

После замены в выражениях (32) – (35) R и X соответственно на α и β выражение (38) может быть использовано для определения $\underline{Z}_6$ по (49), соответ-

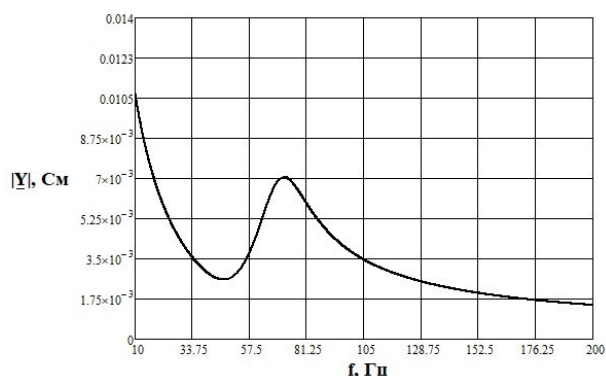


Рис. 5. Зависимость модуля проводимости сети от частоты при загрузке T1 на 12 %

Fig. 5. Network admittance versus frequency with T1 loaded at 12 %

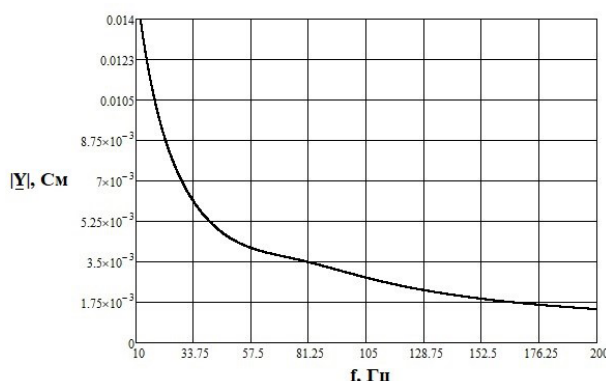


Рис. 6. Зависимость модуля проводимости сети от частоты при загрузке T1 на 70 %

Fig. 6. Network admittance versus frequency with T1 loaded at 70 %

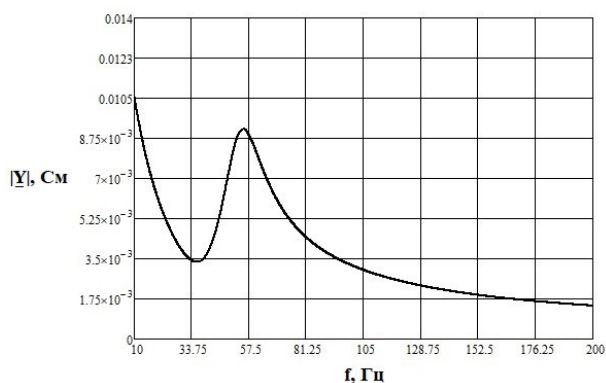


Рис. 7. Зависимость модуля проводимости сети от частоты при загрузке T1 на 12 % и емкости УПЕК 1 26 мкФ

Fig. 7. Network admittance versus frequency with T1 loaded at 12 % and the UPEK 1 capacitor bank 26 μ F

ствующего смещению феррорезонанса за полосу частот $[f_{\min}; f_{\max}]$.

Апробация разработанной методики

Методика была апробирована на примере ЭТК отходящей линии нефтегазодобывающего предприятия с собственной электростанцией (рис. 4).

Для показанной на рис. 4 ЭТК используется групповая и индивидуальная компенсация реактив-

ной мощности в связи со значительной мощностью двигательной нагрузки. Мощность блочной кустовой насосной станции (БКНС) составляет 400 кВт, мощность штанговой скважной насосной установки (ШСНУ) составляет 30 кВт.

Технологические аварии при нефтедобыче, некорректный пуск установок могут привести к значительным отклонениям напряжения и частоты в сети автономного ЭТК, насыщению магнитных систем силовых трансформаторов и возникновению феррорезонанса. Определим по модулю полной комплексной проводимости частоты феррорезонанса.

На рис. 5 показана зависимость модуля полной комплексной проводимости сети ЭТК от частоты при отключенной БКНС (загрузка T1 12 %).

Загрузка трансформатора на 12 % в режиме насыщения его магнитной системы соответствует возникновению параллельного феррорезонанса на частоте 47,3 Гц и последовательного феррорезонанса на частоте 72,2 Гц.

На рис. 6 показана зависимость модуля полной комплексной проводимости сети ЭТК от частоты при включенной БКНС.

Согласно графику феррорезонанс демпфируется за счет увеличения загрузки T1 до 70 %.

При помощи изменения емкостной составляющей эквивалентного сопротивления сети ЭТК можно добиться смещения частоты феррорезонанса (рис. 7).

Расстройка феррорезонансного контура путем увеличения емкости батареи статических конденсаторов с 13 мкФ до 26 мкФ соответствует смещению параллельного феррорезонанса на частоту 36,4 Гц, последовательного феррорезонанса — на частоту 55,7 Гц.

Выводы

В работе приведены расчеты параметров схемы замещения силового трансформатора в режиме насыщения, при отклонении сетевого напряжения и частоты в ЭТК и С. Описана методика подавления ФП и расчета феррорезонансных контуров по импедансной характеристике сети.

Отличительной особенностью разработанной методики является коррекция действительной и мнимой составляющих комплексного сопротивления ветви намагничивания силового трансформатора в зависимости от параметров режима работы сети ЭТК и С, степени насыщения магнитопровода.

Полученные в ходе исследований результаты могут быть использованы при проектировании распределительной сети ЭТК и С, разработке плана мероприятий по предотвращению возникновения и развития ФП.

Методика апробирована на примере ЭТК нефтегазодобывающего предприятия. Согласно расчетам, загрузка трансформатора 35/6 кВ на 12 % в режиме насыщения его магнитной системы соответствует возникновению параллельного феррорезонанса на частоте 47,3 Гц и последовательного феррорезонанса на частоте 72,2 Гц. Феррорезонансный процесс демпфируется при увеличении загрузки трансформатора. Расстройка феррорезонансного контура путем увеличения емкости батареи статических конденсаторов с 13 мкФ до 26 мкФ соответствует смещению параллельного феррорезонанса на частоту 36,4 Гц, последовательного феррорезонанса — на частоту 55,7 Гц.

Работа выполнена по государственному заданию Омского научного центра СО РАН (номер государственной регистрации проекта — 125013101211-4).

The work is carried out according to the State task of the Omsk Scientific Center SB RAS (project registration number — 125013101211-4).

Список источников / References

1. Valverde V., Mazon A. J., Zamora I., Buigues G. Ferroresonance in Voltage Transformers: Analysis and Simulations. *Renewable Energy and Power Quality Journal*. 2011. Vol. 1. P. 465–471. DOI: 10.24084/repqj05.317.

2. El-shafhy M. M., Abdel-hamed A. M., Badran E. A. Ferroresonance in Distribution Systems — State of the Art. *Przegląd Elektrotechniczny*. 2022. Vol. 1. P. 3–17. DOI: 10.15199/48.2022.11.01.

3. Косарев Б. А. Феррорезонансные перенапряжения в электроустановках 6-220 кВ: теория и результаты экспериментальных исследований // Электротехнические и информационные комплексы и системы. 2022. Т. 18, № 3–4. С. 45–55. DOI: 10.17122/1999-5458-2022-18-3-4-45-55. EDN: NLKJXJ.

Kosarev B. A. Ferrorazonansnyye perenapryazheniya v elektroustanovkakh 6-220 kV: teoriya i rezul'taty eksperimental'nykh issledovaniy [Ferroresonance overvoltages in electrical installations 6-220 Kv: theory and results of experimental studies]. *Elektrotekhnicheskiye i informatsionnyye komplekсы i sistemy. Electrical and Data Processing Facilities and Systems*. 2022. Vol. 18, no. 3–4. P. 45–55. DOI: 10.17122/1999-5458-2022-18-3-4-45-55. EDN: NLKJXJ. (In Russ.).

4. Молодюк В. В., Илюшин П. В., Исамухамедов Я. Ш. [и др.]. Обзор трендов развития и опыта использования распределённых энергетических ресурсов по состоянию на 2024 г. // Энергетик. 2025. № 6. С. 59–62. EDN: BXUSUV.

Molodyuk V. V., Ilyushin P. V., Isamukhamedov Ya. Sh. [et al.]. Obzor trendov razvitiya i opyta ispol'zovaniya raspredelennykh energeticheskikh resursov po sostoyaniyu na 2024 g. [Overview of development trends and experience in the use of distributed energy resources in 2024]. *Energetik*. 2025. No. 6. P. 59–62. EDN: BXUSUV. (In Russ.).

5. Пат. 2811559 С1 Российская Федерация, МПК H02H 3/06. Способ защиты линий электропередачи и противоаварийного управления в электрических сетях с распределенной генерацией / Фишов А. Г., Осинцев А. А. № 2023114653; заявл. 05.06.2023; опублик. 15.01.2024, Бюл. № 2.

Patent No. 2811559 C1 Russian Federation, IPC H02H 3/06. Spособ zashchity liniy elektroperechachi i protivooavariynogo upravleniya v elektricheskikh setyakh s raspredelennoy generatsiyey [Method for protecting power lines and emergency control in electrical networks with distributed generation] / Fyshov A. G., Osintsev A. A. No. 2023114653. (In Russ.).

6. Колесников А. А., Куликов А. Л., Старшов И. С. Исследование возможности применения направленной логической защиты шин 6–10 кВ на подстанциях с распределенными источниками энергии // Релейная защита и автоматизация. 2025. № 2 (59). С. 10–17. EDN: QAXAYQ.

Kolesnikov A. A., Kulikov A. L., Starshov I. S. Issledovaniye vozmozhnosti primeneniya napravlennoy logicheskoy zashchity shin 6–10 kV na podstantsiyakh s raspredelennymi istochnikami energii [Research the applicability of directional logic bus protection 6–10 Kv in substations with distributed energy sources]. *Releynaya zashchita i avtomatizatsiya. Relay Protection and Automation*. 2025. No. 2 (59). P. 10–17. EDN: QAXAYQ. (In Russ.).

7. Falbo L., Algieri A. Experimental investigation on the performance of a micro-ORC system for different operating conditions. *Journal of Physics: Conference Series*. 2023. Vol. 2648. P. 012025. DOI: 10.1088/1742-6596/2648/1/012025.

8. Косарев Б. А., Кривальцевич С. В. Применение распределенной генерации электроэнергии для снижения нагрузки на системы электропитания радиостанций в периоды пиковой нагрузки // Радиотехника. 2021. Т. 85, № 10. С. 137–148. DOI: 10.18127/j00338486-202110-13. EDN: MOHHIH.

Kosarev B. A., Krival'tsevich S. V. Primeneniye raspredelennoy generatsii elektroenergii dlya snizheniya nagruzki na sistemy elektropitaniya radiostantsiy v periody pikovoy nagruzki [Application of distributed power generation to reduce the load on power supply systems of radio stations during peak periods]. *Radiotekhnika. Radioengineering*. 2021. Vol. 85, no. 10. P. 137–148. DOI: 10.18127/j00338486-202110-13. EDN: MOHHIH. (In Russ.).

9. Jamil A., Tu W., Tahir M. [et al.]. A decentralized control strategy for optimal operation of multi-sources in shipboard power systems. *Electrical Engineering*. 2025. Vol. 107. P. 9591–9609. DOI: 10.1007/s00202-025-02990-3.

10. Yu Y., Guan Y., Kang W. [et al.]. A generic inertial-response preserved active-damping control for grid-forming inverters emulating synchronous machines. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2024. Vol. 72 (6). P. 5897–5905. DOI: 10.1109/TIE.2024.3481992.

11. IEEE guide for protecting power transformers. IEEE Std C37.91™-2021 (Revision of IEEE Std C37.91-2008). URL: <https://www.standards-global.com/wp-content/uploads/pdfs/preview/2086851> (accessed: 05.11.2025).

12. Eduful G., Fan Y., Abu-Siada A. Investigating ferroresonance susceptibility in various transformer configurations: A simulation based study. *International Transactions on Electrical Energy Systems*. 2025. DOI: 10.1155/etep/2736382.

13. Кажекин И. Е. Моделирование феррорезонансного контура в низковольтной судовой электросети с компенсированной нейтралью // Балтийский морской форум: материалы X Междунар. Балтийского морского форума. В 7 т. Калининград, 2022. Т. 2. С. 142–148. EDN: GPHUIP.

Kazhekin I. E. Modelirovaniye ferrozonansnogo kontura v nizkovol'tnoy sudovoy elektroseti s kompensirovannoy neytral'yu [Modeling of a ferroresonance circuit in a low-voltage ship power network with compensated neutral]. *Baltiyskiy morskoy forum. Baltic Sea Forum*. In 7 vols. Kaliningrad, 2022. Vol. 2. P. 142–148. EDN: GPHUIP. (In Russ.).

14. Тихомиров П. М. Расчет трансформаторов. 5-е изд., перераб. и доп. Москва: Альянс, 2013. 528 с. ISBN 9785903034604.

Tikhomirov P. M. Raschet transformatorov [Calculation of transformers]. 5th ed., revised and additional. Moscow, 2013. 528 p. ISBN 9785903034604. (In Russ.).

КОСАРЕВ Борис Андреевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Электрическая техника» Омского государственного технического университета, г. Омск; старший научный сотрудник института радиопизики и физической электроники Омского научного центра СО РАН, г. Омск.
SPIN-код: 6549-8139
AuthorID (РИНЦ): 1097279
ORCID: 0000-0003-4690-1552
ResearcherID: GLS-4596-2022
Адрес для переписки: BorisK_88@mail.ru

Прозрачность финансовой деятельности: автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.

Статья поступила в редакцию 12.11.2025; одобрена после рецензирования 15.12.2025; принята к публикации 23.12.2025.

KOSAREV Boris Andreyevich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Electrical Engineering Department, Omsk State Technical University, Omsk; Senior Researcher at the Institute of Radiophysics and Physical Electronics, Scientific Center SB RAS, Omsk.

SPIN-code: 6549-8139

AuthorID (RSCI): 1097279

ORCID: 0000-0003-4690-1552

ResearcherID: GLS-4596-2022

Correspondence address: BorisK_88@mail.ru

Financial transparency: the author has no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.

The article was submitted 12.11.2025; approved after reviewing 15.12.2025; accepted for publication 23.12.2025.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ ВОЗОБНОВЛЯЕМОЙ ЭНЕРГИИ В РЕЖИМЕ ПОДКЛЮЧЕНИЯ К СЕТИ НА ПРИМЕРЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОМЫШЛЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

О. В. Косарева-Володько, Аббас Майтхам Худайр Аббас

Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»,
Россия, 119049, г. Москва, Ленинский пр., д. 4, стр. 1

В статье были рассмотрены возобновляемые источники энергии с высоким энергетическим потенциалом, которые в ближайшем будущем станут самым быстрорастущим источником электроэнергии. Источники генерации включают в себя солнечные, ветровые и биомассовые ресурсы, которые способствуют экономическому росту и уменьшают загрязнение. Оптимизация проекта возобновляемой и устойчивой энергетики является ключевым фактором в качестве надежной альтернативы обычным углеводородам, а также в качестве источника энергии. Она может сыграть значительную роль в будущем возобновляемой и устойчивой энергетики Ирака. В работе для создания небольшой модели, подключенной к сети, и для оценки потребления энергии в целях оптимизации использовались программные обеспечения Helioscope и HOMER Pro. Результаты показали внутреннюю норму доходности в 12 %, а также около 8,5 % рентабельности инвестиций, а доля компонента возобновляемой энергии составила почти 99,7 %. Предложенный метод оказался эффективным с точки зрения использования возобновляемой энергии. Исследование может быть применено в любой стране, особенно в соседствующих с Ираком странах.

Ключевые слова: возобновляемая и устойчивая энергия, гибридная система, фотоэлектрические системы, электрические системы, проектирование микросетей, гибридные системы, методы оптимизации, промышленные предприятия.

Для цитирования: Косарева-Володько О. В., Аббас Майтхам Худайр Аббас. Оптимальное проектирование гибридной системы возобновляемой энергии в режиме подключения к сети на примере исследования промышленного предприятия // Омский научный вестник. 2026. № 1 (197). С. 79–87. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-79-87. EDN: UVWDOO.



© Косарева-Володько О. В., Аббас Майтхам Худайр Аббас, 2026.
Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

OPTIMAL DESIGN OF A GRID-CONNECTED HYBRID RENEWABLE ENERGY SYSTEM: A CASE STUDY OF AN INDUSTRIAL ENTERPRISE

O. V. Kosareva-Volodko, Abbas Maitham Khudair Abbas

National University of Science and Technology "MISIS",
Russia, Moscow, Leninskiy Ave., 4, bld. 1, 119049

The article has considered renewable energy sources with high energy potential, which in the near future will become the fastest growing source of electricity. Generation sources include solar, wind, and biomass resources, which contribute to economic growth and reduce pollution. Optimizing the renewable and sustainable energy project is a key factor as a reliable alternative to conventional hydrocarbons, as well as as an energy source. It can play a significant role in the future of renewable and sustainable energy in Iraq. In the work, Helioscope and HOMER Pro software are used to create a small model connected to a network and to estimate energy consumption for optimization purposes. The results have showed an internal rate of return of 12 %, as well as about 8.5 % return on investment, and the share of the renewable energy

component is almost 99.7 %. The proposed method proved to be effective in terms of using renewable energy. The research can be applied in any country, especially in the neighboring countries of Iraq.

Keywords: renewable and sustainable energy hybrid system, photovoltaic systems, power grid outages, microgrid design, energy management in hybrid system, optimization methods, industrial plants.

For citation: Kosareva-Volodko O. V., Abbas Maitham Khudair Abbas. Optimal design of a grid-connected hybrid renewable energy system: a case study of an industrial enterprise. *Omsk Scientific Bulletin*. 2026. No. 1 (197). P. 79–87. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-79-87. EDN: UVWDOO.



© Kosareva-Volodko O. V., Abbas Maitham Khudair Abbas, 2026.
The content is available under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Введение

Очевидно, что возобновляемая энергия является ключевым элементом устойчивого развития. Ее использование стремительно растет, что обусловлено увеличением спроса, развитием технологий, снижением затрат, проблемами обеспечения безопасности поставок и экологическими проблемами. Государства по всему миру поддерживают эту концепцию. В подтверждение этого 149 стран основали Международное агентство по возобновляемой энергии (IRENA) — новую межправительственную организацию. Страны согласовали разработку дорожной карты для возобновляемой энергии в промышленном секторе [1, 2]. Недавние значительные снижения затрат на солнечные фотоэлектрические системы и ветровую энергию могут способствовать переходу к экологически чистой промышленности как непосредственно через электричество, так и через производство химикатов и топлива, богатых водородом (H). В то же время электрификация предлагает новые варианты развития для лучшей интеграции значительных долей переменной возобновляемой энергии в электросети.

Технологический и промышленный прогресс в индустриальных предприятиях привел к росту спроса на электричество, которое в этих странах в основном обеспечивается за счет национальных электростанций [3–5]. Проблемы потребления энергии в настоящее время волнуют весь мир, особенно в развивающихся странах, где наблюдается самый быстрый рост. Промышленные предприятия испытывают значительные изменения в потреблении энергии, что в первую очередь связано с увеличением объемов производства и технического оборудования [6, 7]. Согласно исследованиям университета Schneider Energy, методы энергосбережения в промышленных условиях имеют первостепенное значение, поскольку сохранение одной единицы энергии может позволить сэкономить три единицы продукции. Для решения указанной проблемы были внедрены источники возобновляемой энергии. К таким источникам относятся солнечная, ветровая, биотопливная, геотермальная, океаническая, водородная и гидроэнергия [8]. Множество ученых исследовали использование возобновляемых источников энергии (renewable and sustainable energy (RnSE)) в промышленных предприятиях. В частности, работа [9] исследует возможности для промышленных организаций достичь энергетической независимости с помощью возобновляемых источников энергии. Исследование [10] предлагает стратегию управления энергетической гибкостью в промышленных компаниях. Результаты показывают, что интеграция RnSE в этих компаниях может способствовать развитию сектора энергетической гибкости. Однако первоначальные затраты на стро-

ительство, связанные с RnSE, увеличивают общую стоимость [11]. В связи с этим требуются различные решения для управления несколькими источниками энергии экономичным, малоотходным и надежным способом [12]. Считается, что модель оптимизации возобновляемых источников энергии (renewable energy system (RnSE)) является наиболее подходящим программным обеспечением, так как она позволяет определить размер любой системы с помощью простой формулы. Данный инструмент способен проектировать, планировать и моделировать оптимальные микросетевые системы. Гибридная система возобновляемой энергии (hybrid renewable energy systems (HRES)) состоит из одного или нескольких источников возобновляемой энергии и классифицируется как электрическая система. Эти источники могут быть традиционными, устойчивыми или смешанными, а система может использоваться как в сетевом, так и в автономном режиме, что значительно упрощает работу операторов энергетических систем [13, 14]. Кроме того, инструмент помогает определить точное географическое местоположение, оптимальные мощности ресурсов, электрические нагрузки и другие факторы, что позволяет осуществлять планирование, строительство и моделирование микросетевой модели в реальном времени [15]. Сектор аквакультуры характеризуется высоким потреблением энергии. Нхут Тиен Нгуен и Рюдзи Матсукиси предлагают использовать гибридную систему возобновляемой энергии для покрытия энергетических потребностей с помощью ветряных турбин, солнечных фотогальванических систем и топливных элементов для удовлетворения потребности в электричестве и кислороде.

Оптимальные результаты и анализ чувствительности показали, что гибридная система возобновляемой энергии, подключенная к сети, обладает такими необходимыми характеристиками, как производство чистого кислорода на месте и использование водорода для обеспечения резервного питания, что может дать значительные преимущества потребителям благодаря очевидному снижению затрат на систему [16]. Для достижения максимальной эффективности возобновляемые источники энергии должны точно соответствовать нагрузочной кривой [17]. В источнике [18] китайские исследователи предложили гибридную систему электрообеспечения, совмещающую ветровую и солнечную энергетику с насосной гидроаккумулирующей электростанцией (НГАЭ). Она обеспечивает резервное питание в безветренные дни или периоды сильного затенения, что способствует стабильности системы. Китайские исследователи рекомендовали использовать заброшенные подземные угольные шахты в Нинся-Хуэйском автономном районе Китая в качестве резервуаров для хранения воды. Анало-

гично, испанские исследователи [19] предложили использовать истощенные угольные шахты в Астурийском угольном бассейне Испании. Статья [20] рассматривает текущее состояние и тенденции применения RnSE австралийскими горнодобывающими компаниями. В работе акцентируется внимание на мотивах, побуждающих эти компании использовать RnSE, а также исследуются препятствия, мешающие широкому внедрению указанных технологий. В аналогичном исследовании Чжан, Абу Яхья и др. используют программное обеспечение HOMER Pro для проектирования и оптимизации гибридной системы, основанной на солнечных фотоэлектрических панелях, ветряных турбинах, электросети, дизельном генераторе и батарее, чтобы покрыть потребности образовательного учреждения в Иордании. Авторы сравнивают три комбинации гибридных систем для нахождения оптимальной технической и экономической системы. Результаты показывают, что система PV/сеть является лучшей с инвестиционными затратами в 10,5 млн долл. и уровнем затрат в 0,0331 долл. за кВт·ч. Эта система снижает выбросы CO₂ на 66 % по сравнению с другими традиционными системами [21]. Банеши и др. используют HOMER Pro для проектирования гибридной системы, основанной на дизельном генераторе, фотоэлектрическом генераторе и ветряной турбине с накопительной системой (батареей) в Ширазе (Иран).

Цель исследования состоит в том, чтобы использовать гибридную систему с минимальными затратами и меньшими выбросами углекислого газа. После моделирования лучший экономический результат показал уровень дисконтированных затрат системы от 12,6 до 9,3 % за кВт·ч, с 43,9 % от глобального производства и возобновляемых ресурсов [22]. Данное исследование подчеркивает связь между чистыми источниками энергии и ограниченными ресурсами, основанными на ископаемом топливе, снижая зависимость от них и увеличивая использование возобновляемых источников энергии [23, 24]. С учетом вышеизложенного, а также с точки зрения охраны окружающей среды и экономики, целесообразно применять возобновляемые источники энергии для устранения энергетического дефицита на предприятиях и обеспечения резервного питания самых важных потребителей электроэнергии [25–27].

В исследовании была разработана гибридная система, ориентированная на потребление энергии на определенном объекте. Рассчитаны такие показатели, как общая чистая приведенная стоимость, начальные и эксплуатационные затраты, а также уровень стоимости энергии. Оптимальное проектирование было смоделировано с целью минимизации затрат и обеспечения высокой надежности, что также помогло сократить выбросы углекислого газа.

Моделирование

Работа была разделена на два этапа, как показано на блок-схеме на рис. 1. Первый этап включал выбор местоположения, оценку области сегмента и сбор статистики по солнечным панелям с использованием программного обеспечения Helioscope. На втором этапе была загружена HRES для оптимизации настроек с помощью программы HOMER Pro.

Место исследования

Исследование проводилось на нефтяном месторождении Аль-Ахдаб в Ираке, где нестабильная

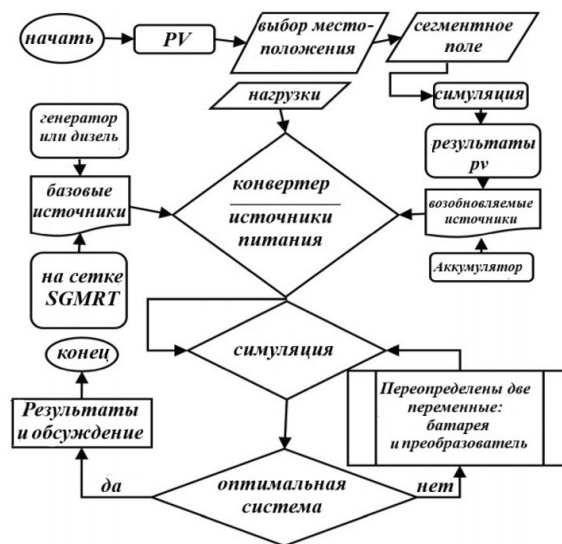


Рис. 1. Блок-схема

Fig. 1. Flow chart of methodology

национальная сеть и возросший спрос на электроэнергию из-за введения в эксплуатацию новых скважин вынудили установить дизельные генераторы для замещения перебоев в электричестве в часы пик. Для устранения дефицита были изучены дополнительные источники возобновляемой энергии. Нефтяное месторождение Аль-Ахдаб в Ираке имеет значительные преимущества: большое количество солнечной энергии в течение года, продолжительное время солнечного света и географические особенности, не препятствующие прямому солнечному излучению.

Расчет потенциала солнечной энергии для нефтяного месторождения Аль-Ахдаб с учетом доступной площади

Для расчета выработки солнечной энергии использовалась веб-программа Helioscope. Указанная программа помогает проектировщикам солнечных установок, интегрируя упрощенные инструменты планирования с точными оценками энергии, что приводит к повышению эффективности проектирования. Helioscope обладает такими возможностями, как быстрое моделирование, 3D-дизайн, надежные симуляции, схемы одиночных линий, легкий экспорт в CAD, мощность системы до 5 МВт, библиотека компонентов, метеорологические данные по всему миру, совместимость с файлами PAN, отчеты о тенях и т. д. [28, 29]. Учитывая акцент на использовании солнечной энергии, в исследовании также принимаются во внимание потери PV. Более того, акцент сделан на renewable fraction (RF) — доле возобновляемой энергии, которая определяется как процент энергии, поставляемой в сеть и вырабатываемой различными возобновляемыми источниками энергии, такими как солнечные панели, ветер, биомасса и т. д. Это один из важных факторов, учитываемых при проектировании устойчивой модели микросети [30]. В работе использовался количественный описательный метод на территории нефтяного месторождения Аль-Ахдаб, расположенного в городе Васит, Ирак. Губернаторство Васит находится на широте 32°36'8.674" С и долготы 45°45'7.555" В. Проведенное исследование включало следующие шаги:

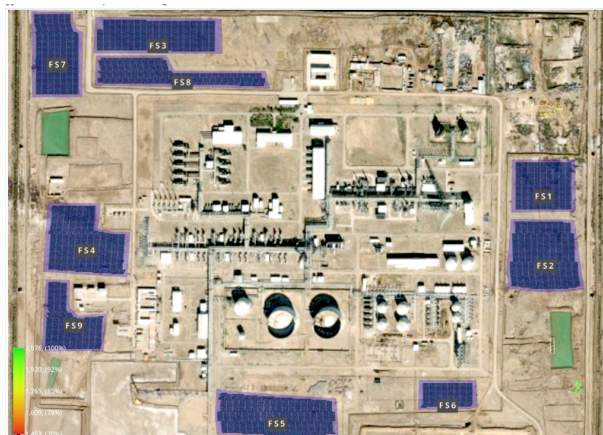


Рис. 2. Распределение и тепловая карта затенения сегментов PV в исследуемой зоне
Fig. 2. Distribution and shading heat map of PV segments field for the study area

- оценка рабочей зоны и сбор данных;
- расчет доступной площади в Google Планета Земля. Были обнаружены девять полевых сегментов (FS), имеющих различные размеры. Солнечные панели были распределены по этим участкам, как показано на рис. 2;
- интеграция установленных солнечных панелей с национальной электросетью и хранение электроэнергии с использованием преобразовательного устройства;
- определение размеров проводов для компонентов, подключенных к ГРЭС;
- моделирование полученных данных для оптимизации управления системой, при этом время отключения национальной сети использовалось как зависимая переменная для прогнозов.

Гибридная оптимизация нескольких источников энергии

Для расчета сложной системы электроснабжения на основе RnSE использовалось программное обеспечение HOMER Pro. Среди множества программных инструментов, таких как Hybrid2, TRNSYS, RET Screen, iHOGA, HySim и HySys, HOMER Pro признан лучшим программным обеспечением с точки зрения оценки оптимизации использования и размеров системы, а также наиболее широко применяемым инструментом, поскольку он имеет максимальное сочетание систем возобнов-

ляемой энергии и выполняет анализ оптимизации и чувствительности, что упрощает и ускоряет оценку множества возможных конфигураций системы [31, 32]. Преимущества HOMER Pro для данного исследования заключаются в его способности создавать, визуализировать и моделировать модель малой сети, интегрируя различные источники энергии и другие компоненты, необходимые для надежного проектирования.

Общая нагрузка

На рис. 3 представлена среднесуточная нагрузка на нефтяном месторождении Аль-Ахдаб в географическом регионе. Удельная цена энергии была установлена на уровне 0,043 долл./кВт·ч, а стоимость подключения к сети определялась национальными правилами. Пиковая нагрузка составила 63 043 кВт, средняя нагрузка — 33 333 кВт ($33\,333/63\,043 = 0,53$), а среднесуточный спрос — 800 000 кВт·ч, с коэффициентом нагрузки 0,53, что соответствует диапазону от 5 до 15 %.

Данные о потреблении электроэнергии для указанного нефтяного месторождения были собраны из иракского Министерства нефти и Министерства электроэнергетики.

Элементы системы

На рис. 3б изображены основные источники энергии системы, которые включают национальную сеть, генератор, солнечные панели и накопитель энергии. Программа оценивает экономическую и технологическую жизнеспособность модели при определенных ограничениях. Модель мини-электросети содержит преобразователь постоянного тока в переменный, который соединяет сетевую электросистему с солнечной системой, генерирующей постоянный ток. Система имеет резервную свинцово-кислотную батарею ёмкостью 51,6 кВт·ч. Солнечные панели имеют стандартный срок службы 25 лет. В дополнение, дизельный генератор мощностью 3500 кВт с ёмкостью 2800 кВт компенсирует потребление в условиях низкого производства энергии от солнечных панелей или перегрузки. В исследовании количество часов отключения от национальной сети (среднее время ремонта сетевого оборудования, или GMRT) варьировалось от получаса до трех часов в день для определения оптимальной конструкции и расчета общей стоимости модели гибридной микросети.

В табл. 1 обобщены характеристики и ограничения RnSE.

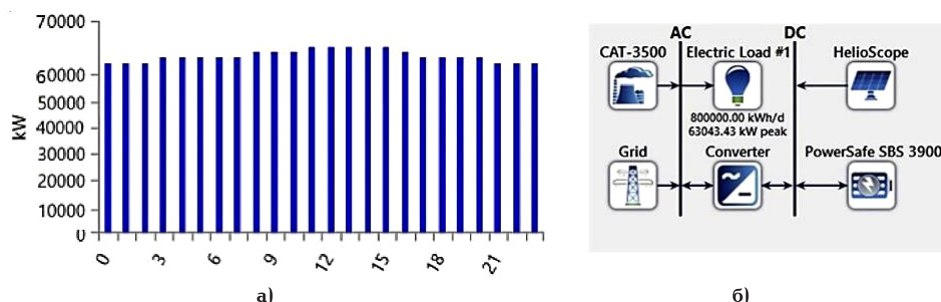


Рис. 3. Компоненты HOMER Pro и средняя суточная нагрузка:
а — средняя суточная нагрузка (кВт) масштабируется как входная дата;
б — компоненты HOMER Pro для гибридной модели микросети

Fig. 3. HOMER Pro components and average daily load:

- а — average scaled day load (kW) as input data;
- б — HOMER Pro components for the hybrid microgrid model

Таблица 1. Технические характеристики и ограничения компонентов системы
Table 1. Specifications and limitations of RnSE elements

Генератор САТ – 3500 – кВА – 50 Гц		Единица измерения
Коэффициент мощности	0,0257	%
Часы работы	9	часов/год
Фиксированная стоимость генерации	77,9	\$/час
Предельная стоимость генерации	0,229	\$/ кВт·ч
Производство электроэнергии	6300	кВт·ч/год
Средняя электрическая мощность	700	кВт
Максимальная электрическая мощность	700	кВт
Расход топлива	2014	л/год
Удельный расход топлива	0,320	л/кВт·ч
Свинцово-кислотный аккумулятор емкостью 51,6 кВт·ч		Единица измерения
Автономия	45	час
Потери (losses)	203 234	кВт·ч/год
Истощение хранилища	12 008	кВт·ч/год
Параллельная строка PV	454	—
Преобразователь — инвертор		Единица измерения
Коэффициент мощности	7761	%
Емкость	1869	кВт
Средняя производительность	1442	кВт
Максимальная производительность	1869	кВт
Потери (losses)	664 631	кВт·ч/год
Пользовательские компоненты	PV	Unit
Коэффициент мощности (capacity factor)	2265	%
Средняя производительность	62 044	кВт
Общий объем производства	543 502.831	кВт·ч/год
Максимальная производительность	275 444	кВт

Условия стоимости

Как в одиночных, так и в комбинированных системах стоимость единицы энергии (cost of energy (COE)) определяется как средняя стоимость используемой энергии, потребляемой клиентом или всей электрической нагрузкой, обеспечиваемой различными возобновляемыми источниками. COE оборудования, принадлежащего микросети, рассчитывается и выражается в долл./кВт·ч [33].

$$COE = \frac{C_{ann,tot} - C_{boiler} H_{served}}{E_{served}}, \quad (1)$$

где $C_{ann,tot}$ — общая ежегодная стоимость системы (долл./год); H_{served} — общая тепловая нагрузка, обслуживаемая системой (кВт·ч/год); C_{boiler} — предельная стоимость котла (долл./кВт·ч); E_{served} — общая электрическая нагрузка, обслуживаемая системой (кВт·ч/год).

Чистая приведенная стоимость (net present value cost (NPC)), также известная как стоимость жизненного цикла данного компонента внутри неболь-

шой сети, предоставляет подробный анализ затрат, включая установку, обслуживание и факторы дохода. По сути, NPC является связующим звеном между общими доходами компонента за определенный период и всей стоимостью его установки, эксплуатации, обслуживания и сопутствующих услуг. Процент возобновляемых источников является важным аспектом в построении устойчивой модели сети. Он определяется как доля энергии, поставляемой на выходную нагрузку из различных возобновляемых источников, таких как солнечные панели, ветер, биомасса и т. д. Большая доля возобновляемых источников улучшает всю энергетическую систему, снижая цены, выбросы CO₂ и другие аспекты. Математическое выражение для доли возобновляемых источников представлено в уравнении [33]:

$$f_{ren} = 1 - \frac{E_{nonren} - H_{nonren}}{E_{served} + H_{served}}, \quad (2)$$

где E_{nonren} — производство невозобновляемой электрической энергии (кВт·ч/год); H_{nonren} — производство невозобновляемой тепловой энергии;

H_{served} — общий объем нагрузки, обслуживаемой (кВт·ч/год); E_{served} — общий объем энергии, продаваемой в главную сеть (кВт·ч/год).

Операционные затраты

Операционные затраты представляют собой отношение годовых общих затрат компонента к его капитальным затратам. В исследовании стоимость компонента определяется вычитанием первоначальных капитальных и установочных затрат. Внутренняя норма доходности (internal rate of return (IRR)) — это ставка дисконтирования, при которой базовая и текущая системы имеют одинаковую чистую приведенную стоимость NPC. Программа HOMER Pro вычисляет IRR, используя ставку дисконтирования, равную приведенной стоимости разницы между двумя потоками денежных средств. Срок окупаемости — это количество лет, необходимых для того, чтобы кумулятивная разница денежных потоков между текущей и базовой системами стала положительной, что показывает, сколько времени потребуется для восстановления инвестиционного вложения. Возврат на инвестиции (return on investment (ROI)) представляет собой годовую экономию затрат по сравнению с первоначальными инвестициями. Он вычисляется делением средней годовой разницы в номинальных денежных потоках на протяжении жизни проекта на разницу в капитальных затратах. HOMER Pro использует следующую формулу для расчета ROI [33]:

$$ROI = 1 - \frac{\sum_{t=0}^{R_{proj}} C_{t,ref} - C_t}{R_{proj}(C_{cap} - C_{cap,ref})}, \quad (3)$$

где $C_{t,ref}$ — номинальный ежегодный денежный поток для базовой системы; C_t — номинальный ежегодный денежный поток для текущей системы; R_{proj} — срок жизни проекта в годах; C_{cap} — капитальные затраты текущей системы; $C_{cap,ref}$ — капитальные затраты базовой системы.

В целом, количество часов отключения национальной электросети варьируется от 0,5 до 3 ч — SGMRT, стоимость производства электроэнергии — COE, чистая текущая стоимость — NPC, внутренняя норма доходности — IRR и доходность инвестиций — ROI использовались для расчета потребления энергии и общего номинального денежного потока с течением времени. Из-за высокого спроса и ограниченного предложения энергии возобновляемая энергия использовалась для дополнения требуемой мощности. Внутренняя норма доходности

(IRR) — это ставка дисконтирования, при которой базовая чистая приведенная стоимость равна стоимости текущей системы.

В табл. 2 TSRF % — общий коэффициент солнечного излучения; SI (кВт·ч/м²) солнечная освещенность — энергия, полученная на квадратный метр, что указывает на потенциальную выработку солнечной энергии; модули — отдельные солнечные панели, которые составляют сегмент поля; пик кВт (Max кВт) — максимальная выходная мощность солнечного модуля; модули — количество полей в сегменте; азимут — направление по сторонам света, куда обращены солнечные панели; наклон — угол, под которым солнечные панели установлены относительно земли; FS — номер полевого сегмента. Затененное солнечное излучение и проценты ресурсов были вычислены с помощью программного обеспечения Helioscope и обобщают характеристики работы панелей, включая температуру и мощность, которые ограничены площадью и географическим положением для последующего ввода в программное обеспечение HOMER Pro. Каждый метод также предлагает разбивку процентов потерь. На рис. 46 представлены источники потерь в фотоэлектрических системах согласно анализу Helioscope. Температура оказалась наиболее значимым фактором, отрицательно влияющим на эффективность панелей, с потерей около 6,7 %. Тени стали причиной вторых по величине потерь на уровне примерно 5,1 %, в то время как потери излучения были минимальными и составили всего 0,3 %.

Гибридная система

В табл. 3 представлены характеристики и результаты, полученные HOMER Pro, в условиях отключения сети, включая электрическую энергию, вырабатываемую солнечными панелями, генератором и аккумуляторами. Из всех источников наибольшее количество электричества выработали солнечные панели, тогда как аккумуляторы произвели наименьшее количество энергии. Высокий уровень отключений в национальной сети SGMRT приводит к увеличению доли ВЧ-мощности, поставляемой от фотоэлектрических источников, которая варьировалась от 99,5 до 99,7 % (лучший показатель составил 99,7 %).

Солнечные фотоэлектрические системы относятся к наиболее эффективным распределенным источникам энергии для микросетей. Результаты моделирования показывают влияние интеграции возобновляемой энергии в сеть и подчеркивают роль аккумуляторов и дизельных генераторов

Таблица 2. Настройки фотоэлектрических модулей для распределенных сегментов поля
Table 2. Settings of PV for distribution fields segments

TSRF, %	SI, кВт/м ²	пик кВт Max кВт	Модули	Azimuth	Tilt	FS
94,0 %	1952,2	1,30 Max кВт	1800	180°	37,8°	FS1
94,2 %	1954,8	2,07 Max кВт	2875	180°	37,8°	FS2
94,2 %	1956,3	1,74 Max кВт	2410	180°	37,8°	FS3
94,2 %	1955,5	2,02 Max кВт	2800	180°	37,8°	FS4
94,3 %	1957,9	2,10 Max кВт	2915	180°	37,8°	FS5
94,6 %	1963,1	0,579 Max кВт	805	180°	37,8°	FS6
94,2 %	1949,7	1,66 Max кВт	2305	180°	37,8°	FS7
94,5 %	1961,8	1,44 Max кВт	2000	180°	37,8°	FS8
94,2 %	1955,0	1,21 Max кВт	1680	180°	37,8°	FS9

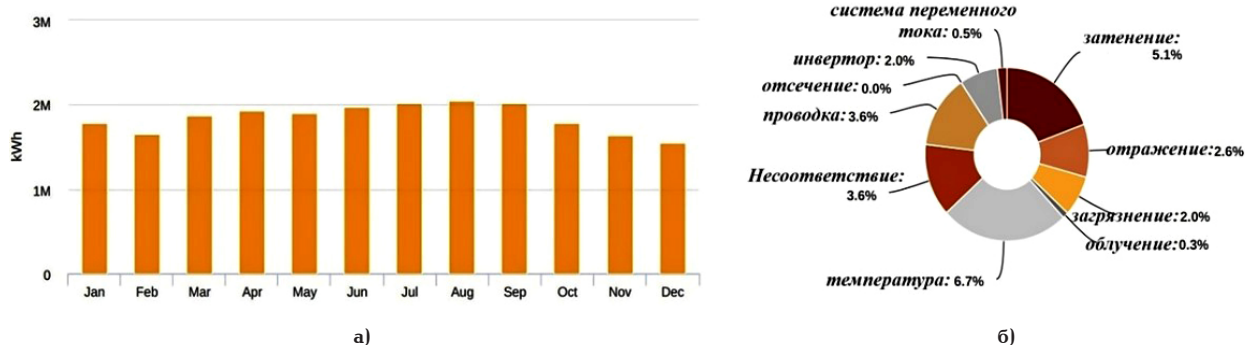


Рис. 4. Ежемесячное производство фотоэлектрической энергии и источники потерь фотоэлектрических систем:
а — ежемесячное производство фотоэлектрической энергии; б — источники потерь в фотоэлектрических системах
Fig. 4. Monthly photovoltaic energy production and sources of losses of photovoltaic systems:
a — monthly production from PV; б — sources of system loss from PV

Таблица 3. Параметры и выходные данные в HOMER Pro
Table 3. HOMER Pro parameters and productions

Генераторное производство, кВт·ч	GTF, л/год	RF, %	Конвертор, кВт	Аккумулятор 51.6, кВт·ч	GMRT
2800	895	99,5	2004	1820	0,5
2800	895	99,5	2004	1820	1
4200	1342	99,7	2065	1828	1,5
4200	1342	99,7	2065	1828	2
4200	1342	99,7	2065	1828	2,5
7000	2237	99,5	2019	1820	3

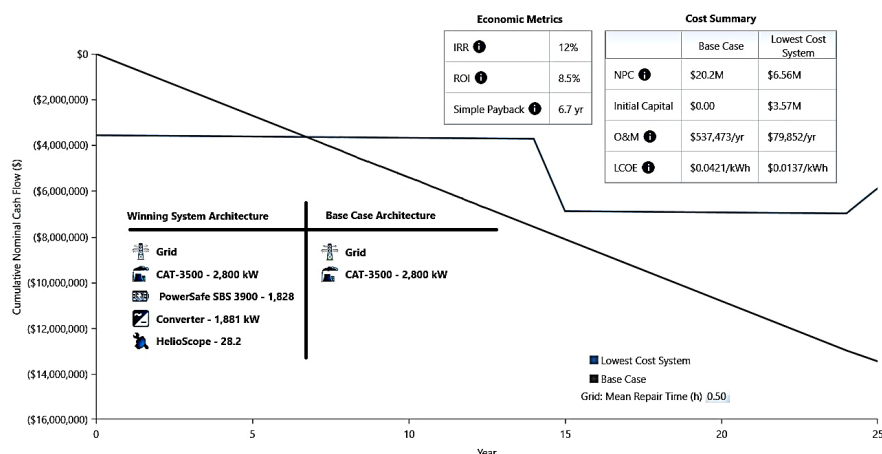


Рис. 5. Экономические показатели и разница в стоимости между самой дешевой и базовой системами в GMRT (0,5–1 ч)
Fig. 5. Economic metrics and difference in the value between the lowest cost system and the basic system at SGMRT (0.5–1 hour)

в поддержании стабильности системы. Интеграция солнечных панелей с накопителями энергии может обеспечить эффективное решение для регулирования нагрузки. В этом сценарии национальная сеть и мини-сеть работают параллельно. Вначале нагрузка получает питание от сети, в то время как распределённые источники энергии (distributed energy resources (DERs)) отключены.

Во время дневного отключения электроэнергии в национальной сети питание нагрузки осуществляется за счёт включения дизельного генератора. Дизельный генератор обеспечивает резервное питание. Ночью, когда национальная сеть отключена, питание нагрузки осуществляется от аккумуляторных батарей, заряжаемых в течение дня от фото-

электрической батареи. Аккумуляторные батареи также могут заряжаться от сети. Резервное питание обеспечивают генераторы. Результаты SGMRT колебались от 0,5 до 3 ч. Общее потребление топлива генератора (generator total fuel (GTF)) не имело прямой корреляции с показателями SGMRT. Дизельный генератор, который выступает в качестве резервного источника в гибридной системе, выгодно использовать, так как стоимость дизельного топлива в Ираке низкая.

Значения NPC для аккумулятора, инвертора и других компонентов на различных уровнях SGMRT в течение года, исключая фиксированные и сравнительно низкие затраты на фотоэлектрическую систему (Photovoltaic (PV)), — 1192,99 долл., гене-

ратор — 1714,07 долл. и сеть — 5214,83 долл. Наибольшие затраты наблюдались у аккумулятора — примерно 66229,40 долл. Максимальные расходы инвертора составили 1452,94 долл., что связано с использованием резервного аккумулятора. Стоимость других компонентов составила 95026,420 долл. NPC для аккумулятора, инвертора и остальных компонентов на различных уровнях SGMRT за 25-летний период была рассчитана с исключением затрат на фотоэлектрическую систему (44800,27 долл.), генератор (64368,71 долл.) и сеть (195832,84 долл.), аналогично NPC для аккумулятора, инвертора и компонента на разных уровнях SGMRT в течение года.

Экономический анализ

Оптимальные параметры были выбраны на основе сроков окупаемости первоначальных затрат, что являлось основным критерием для определения наиболее экономически эффективного времени окупаемости. Рис. 5 иллюстрирует экономические показатели и разницу стоимости между самыми дешевыми системами. Идеальная гибридная система возобновляемой энергии (HRES) сравнивается с базовой системой генератор—сеть при GMRT от 0,5 до 1 ч. Поскольку наилучшие результаты HRES достигаются при GMRT от 0,5 до 1 ч, другие значения GMRT исключаются. В целом, кумулятивный номинальный денежный поток (CNCF) увеличивается с течением времени из-за эксплуатации и затрат на обслуживание. Начальные затраты HRES составили 3.57 млн долл. из-за затрат на строительство, тогда как в базовом сценарии первоначальные затраты отсутствовали, так как генераторы уже были установлены на нефтяном месторождении. На протяжении семи лет совокупный номинальный денежный поток HRES превысил показатели базовой системы, хотя темпы роста были замедленными. Замедление было вызвано увеличением расходов на эксплуатацию и техническое обслуживание (operation and maintenance (O&M)) в базовой системе. На отметке 6 лет 7 месяцев CNCF HRES совпал по значению с CNCF базовой системы, что указывает на точку перегиба. В этот момент внутренняя норма доходности (IRR) составила 12 %, а возврат на инвестиции (ROI) — приблизительно 8,5 %. После 6 лет 7 месяцев разрыв в CNCF между HRES и базовой системой увеличивался из-за эффекта наложения процента от IRR.

Выводы

Для моделирования фотоэлектрической установки на нефтяном месторождении Аль-Ахдаб в Ираке было использовано программное обеспечение Helioscope. Результаты моделирования были интегрированы в общую электросеть. Используя конструкцию электросети, генератора, накопителя энергии и преобразователя мощности, была создана модель гибридной системы возобновляемой энергии с использованием программного обеспечения HOMER Pro. Гибридная система была оптимизирована на основе чистой приведенной стоимости (NPC), выбросов углерода и дополнительной электроэнергии. Чистая приведенная стоимость и выбросы углерода гибридной системы были ниже по сравнению с базовой системой, при этом солнечная энергия обеспечивала дополнительную требуемую электрическую мощность. Увеличение доли возобновляемых источников энергии способствовало снижению NPC и выбросов. Гибридная система

обеспечила максимальную внутреннюю норму доходности (IRR) в 12 % и возврат инвестиций (IOR) в 8,5 %. Рекомендуемая техника может быть применена в индустриализованных странах, испытывающих аналогичные трудности при производстве электроэнергии. Для достижения лучших результатов на более высоких уровнях SGMRT рекомендуется увеличить количество сегментированных полей. Будущие исследования могут проверить метод указанной гибридной системы в странах с высокими энергетическими потребностями, ограниченной энергетической инфраструктурой и продолжительными летними периодами, таких как Ирак.

Список источников / References

1. International Renewable Energy Agency — IRENA. Draft Work Programme and Budget for 2011. 2011. Assembly document No. PC.5/DC.7. URL: <https://www.irena.org/-/media/Files/IRENA/Agency/About-IRENA/Preparatory-Commission/Fifth-Preparatory/PC5DC7Corr1Rev1.pdf> (accessed: 03.04.2025).
2. Philibert C. Renewable energy for industry. Paris: International Energy Agency, 2017. URL: https://www.solarpaces.org/wp-content/uploads/Renewable_Energy_for_Industry.pdf (accessed: 03.04.2025).
3. Reşitoğlu İ. A., Altinişik K., Keskin A. The pollutant emissions from diesel-engine vehicles and exhaust aftertreatment systems. *Clean Technologies and Environmental Policy*. 2015. Vol. 17. P. 15–27. DOI: 10.1007/s10098-014-0793-9.
4. Energy technology transitions for industry. Strategies for the Next Industrial Revolution. International Energy Agency. Paris: IEA/OECD, 2009. 321 p.
5. Taibi E., Gielen D., Bazilian M. The potential for renewable energy in industrial applications. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2012. Vol. 16 (1). P. 735–744. DOI: 10.1016/j.rser.2011.08.039.
6. Данилов Н. И., Щелоков Я. М. Основы энергосбережения / под ред. Н. И. Данилова. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 2006. 564 с. ISBN 5-321-00657-1.
Danilov N. I., Shchelokov Ya. M. Osnovy energosberezeniya [Energy saving basics] / ed. by N. I. Danilov. Ekaterinburg, 2006. 564 p. ISBN 5-321-00657-1. (In Russ.).
7. Getting wind and sun onto the grid: IEA points the way. International Energy Agency, 2017. URL: <https://www.energycouncil.com.au/analysis/getting-wind-and-sun-onto-the-grid-iea-report/> (accessed: 03.04.2025).
8. Li K., Bian H., Liu C. [et al.]. Comparison of geothermal with solar and wind power generation systems. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2015. Vol. 42. P. 1464–1474. DOI: 10.1016/j.rser.2014.10.049.
9. Schulz J., Scharmer V. M., Zaeh M. F. Energy self-sufficient manufacturing systems — integration of renewable and decentralized energy generation systems. *Procedia Manufacturing*. 2020. Vol. 43. P. 40–47. DOI: 10.1016/j.promfg.2020.02.105.
10. Beier J., Thiede S., Herrmann C. Energy flexibility of manufacturing systems for variable renewable energy supply integration: Real-time control method and simulation. *Journal of Cleaner Production*. 2017. Vol. 141. P. 648–661. DOI: 10.1016/j.jclepro.2016.09.040.
11. Ali S., Yan Q., Sajjad Hussain M. [et al.]. Evaluating green technology strategies for the sustainable development of solar power projects: Evidence from Pakistan. *Sustainability*. 2021. Vol. 13 (23). 12997. DOI: 10.3390/su132312997.
12. Shezan S. A., Hasan K. N., Rahman A. [et al.]. Selection of appropriate dispatch strategies for effective planning and operation of a microgrid. *Energies*. 2021. Vol. 14 (21). 7217. DOI: 10.3390/en14217217.
13. Belatrache D., Saifi N., Harrouz A., Bentouba S. Modelling and numerical investigation of the thermal properties effect on the soil temperature in Adrar region. *Algerian Journal of Renewable*

Energy and Sustainable Development. 2020. Vol. 2 (2). P. 165–174. DOI: 10.46657/ajresd.2020.2.9.

14. Abd Alrubaye R. Th., Al-Rubaye A. T.A.R., Al-Khuzai M. M. Optimal design of hybrid renewable energy system off grid in Al-Diwaniyah, Iraq. *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*. 2018. Vol. 454 (1). 012103. DOI: 10.1088/1757-899X/454/1/012103.

15. Ur Rashid M., Ullah I., Mehran M. [et al.]. Techno-economic analysis of gridconnected hybrid renewable energy system for remote areas electrification using Homer pro. *Journal of Electrical Engineering & Technology*. 2022. Vol. 17 (2). P. 981–997. DOI: 10.1007/s42835-02100984-2.

16. Nguyen N. T., Matsubashi R., Vo T.T.B. C. A design on sustainable hybrid energy systems by multi-objective optimization for aquaculture industry. *Renewable Energy*. 2021. Vol. 163 (1). P. 1878–1894. DOI: 10.1016/j.renene.2020.10.024.

17. Лебедева М. А., Идиятуллина Э. Ф., Чухлатый М. С., Набоков А. В. Целесообразность применения возобновляемых источников энергии на промышленных предприятиях // Инженерный вестник Дона. 2019. № 9. С. 1–9. EDN: VPIZWC.

Lebedeva M. A., Idiyatullina E. F., Chukhaty M. S., Nabokov A. V. 'Tselesoobraznost' primeneniya vozobnovlyayemykh istochnikov energii na promyshlennyykh predpriyatiyakh [The feasibility of using renewable energy in industrial enterprises]. *Inzhenernyy vestnik Dona. Engineering Journal of Don*. 2019. No. 9. P. 1–9. EDN: VPIZWC. (In Russ.).

18. Gao R., Wu F., Zou Q., Chen J. Optimal dispatching of wind-PV-mine pumped storage power station: A case study in Lingxin Coal Mine in Ningxia Province, China. *Energy*. 2022. Vol. 243. 123061. DOI: 10.1016/j.energy.2021.123061.

19. Menéndez J., Loredó J., Galdo M., Fernández-Oro J. M. Energy storage in underground coal mines in NW Spain: Assessment of an underground lower water reservoir and preliminary energy balance. *Renewable Energy*. 2019. Vol. 134. P. 1381–1391. DOI: 10.1016/j.renene.2018.09.042.

20. Strazzabosco A., Gruenhagen J. H., Cox S. A review of renewable energy practices in the Australian mining industry. *Renewable Energy*. 2022. Vol. 187. P. 135–143. DOI: 10.1016/j.renene.2022.01.021.

21. Ahmad Abu Yahya, Shawish A., Al-Jilani M., Eyad Feilat. HOMER-based optimal design of hybrid power systems for educational institution. *International Journal of Advanced Trends in Computer Science and Engineering*. 2020. Vol. 9 (05). P. 8811–8818. DOI: 10.30534/ijatcse/2020/274952020.

22. Baneshi M., Hadianfard F. Techno-economic feasibility of hybrid diesel/PV/wind/battery electricity generation systems for non-residential large electricity consumers under southern Iran climate conditions. *Energy Conversion and Management*. 2016. Vol. 127. P. 233–244. DOI: 10.1016/j.enconman.2016.09.008.

23. Santos L. H. S., Silva, J. A. A., López J. C. [et. al.]. Integrated optimal sizing and dispatch strategy for microgrids using HOMER Pro. *IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Conference-Latin America (ISGT Latin America)*. 2021. P. 1–5. DOI: 10.1109/ISGTLatinAmerica52371.2021.

24. Litardo J., Palme, M., Hidalgo-León R. [et. al.]. Energy saving strategies and on-site power generation in a university building from a tropical climate. *Applied Sciences*. 2021. Vol. 11, no. 2. P. 542. DOI: 10.3390/app11020542.

25. Semenova T. Yu., Al-Dirawi A. S. Economic development of the Iraqi gas sector in conjunction with the oil industry. *Energies*. 2022. Vol. 15 (7). 2306. P. 1–31.

26. Alkhalidi F. A. A. techno-economic investigation of methanol production plant using solar and wind energy in Iraq: dissertation. Karabuk University, 2023. 71 p.

27. Khalifa A. J. N. Evaluation of different hybrid power scenarios to Reverse Osmosis (RO) desalination units in isolated areas in Iraq. *Energy for Sustainable Development*. 2011. Vol. 15 (1). P. 49–54. DOI: 10.1016/j.esd.2011.01.004.

28. Arévalo P., Eras-Almeida A. A., Cano A. [et. al.]. Planning of electrical energy for the Galapagos Islands using different

renewable energy technologies. *Electric Power Systems Research*. 2022. Vol. 203. DOI: 10.1016/j.epsr.2021.107660.

29. Umer F., Aslam M. S. Rabbani M. S. [et. al.]. Design and optimization of solar carport canopies for maximum power generation and efficiency at Bahawalpur. *International Journal of Photoenergy*. 2019. Vol. 36. P. 1–8. DOI: 10.1155/2019/6372503.

30. Mehta S., Basak P. A case study on PV assisted microgrid using HOMER pro for variation of solar irradiance affecting cost of energy. *IEEE 9th Power India International Conference (PIICON)*. 2020. P. 1–6. DOI: 10.1109/PIICON49524.2020.9112894.

31. Ammari C., Belatrache D., Touhami B., Makhoulfi S. Sizing, optimization, control and energy management of hybrid renewable energy system – A review. *Energy and Built Environment*. 2022. Vol. 3, no. 4. P. 399–411. DOI: 10.1016/j.enbenv.2021.04.002.

32. Sinha S., Chandel S. S. Review of software tools for hybrid renewable energy systems. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2014. Vol. 32. P. 192–205. DOI: 10.1016/j.rser.2014.01.035.

33. HOMER Pro. HOMER Help Files. HOMER: Boulder, CO. URL: <https://www.homerenergy.com/products/pro/docs/3.11/glossary.htm> (accessed: 03.04.2025).

КОСАРЕВА-ВОЛОДЬКО Ольга Владимировна, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры «Энергетика и энергоэффективность горной промышленности» Национального исследовательского технологического университета «МИСИС» (Университет МИСИС), г. Москва.

SPIN-код: 9100-5274

AuthorID (РИНЦ): 352831

AuthorID (SCOPUS): 57207833888

Адрес для переписки: kosareva-volodko@rambler.ru

АББАС МАЙТХАМ ХУДАЙР АББАС, аспирант кафедры «Энергетика и энергоэффективность горной промышленности» Университета МИСИС, г. Москва.

Прозрачность финансовой деятельности: авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.

Статья поступила в редакцию 22.07.2025; одобрена после рецензирования 19.12.2025; принята к публикации 26.12.2025.

KOSAREVA-VOLODKO Olga Vladimirovna, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Energy and Energy Efficiency of the Mining Industry Department, National University of Science and Technology "MISIS", Moscow.

SPIN-code: 9100-5274

AuthorID (RSCI): 352831

AuthorID (SCOPUS): 57207833888

Correspondence address: kosareva-volodko@rambler.ru

ABBAS MAITHAM KHUDAIR ABBAS, Postgraduate of the Energy and Energy Efficiency of the Mining Industry Department, National University of Science and Technology "MISIS", Moscow.

Financial transparency: the authors have no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.

The article was submitted 22.07.2025; approved after reviewing 19.12.2025; accepted for publication 26.12.2025.

НЕЙРОСЕТЕВОЙ ИДЕНТИФИКАТОР ДАВЛЕНИЯ НАСОСНОЙ УСТАНОВКИ С АСИНХРОННЫМ ЭЛЕКТРОПРИВОДОМ ЦЕНТРОБЕЖНОГО НАСОСА

О. А. Лысенко

Омский государственный технический университет, Россия, 644050, г. Омск, пр. Мира, 11

Статья рассматривает разработку идентификатора давления насосной установки с асинхронным электроприводом. Широкое распространение таких установок обуславливает актуальность указанной темы.

Цель исследования — разработка идентификатора давления насосной установки в составе электротехнического комплекса на основе нейронных сетей. Вычисление текущего значения давления производилось с помощью значений статорного тока и напряжения асинхронного электродвигателя. В рассматриваемой статье для определения давления используют нейронные сети прямого распространения, а также нелинейные авторегрессионные сети с внешними входными параметрами, в отличие от существующих способов косвенного определения давления. Дополнительно для повышения точности и снижения шума на вход сети подаются значения модулей статорного тока электродвигателя и значение модуля напряжения статорного тока.

В результате, были получены структуры нейросетевых идентификаторов давления с асинхронными электроприводами. С помощью интегральных критериев определены размеры скрытых слоев. В статье приводятся сравнительные осциллограммы давления, показывающие работоспособность нейроидентификатора.

Ключевые слова: нейроидентификатор давления, авторегрессионные сети, электрический двигатель, центробежный насос, косвенный способ определения, насосная станция.

Для цитирования: Лысенко О. А. Нейросетевой идентификатор давления насосной установки с асинхронным электроприводом центробежного насоса // Омский научный вестник. 2026. № 1 (197). С. 88–95. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-88-95. EDN: LZQKBL.



© Лысенко О. А., 2026.
Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License

NEURAL NETWORK PRESSURE IDENTIFIER OF A PUMPING UNIT WITH ASYNCHRONOUS ELECTRIC DRIVE OF A CENTRIFUGAL PUMP

O. A. Lysenko

Omsk State Technical University, Russia, Omsk, Mira Ave., 11, 644050

The article considers the development of a pressure identifier for a pumping unit with an asynchronous electric drive. The widespread use of such installations determines the relevance of this subject.

The purpose of the study is to develop a pressure identifier for a pumping unit as a part of an electrical complex based on neural networks. The current pressure value is calculated using the values of the stator current and voltage of the asynchronous electric motor. In the article under consideration, direct neural networks and nonlinear autoregressive networks with external input parameters are used to determine pressure, in contrast to existing methods for indirectly determining pressure. Furthermore, to increase accuracy and reduce noise, the values of stator current modules of the electric motor and the value of the stator current voltage module are supplied to the network input.

As a result, the author obtains structures of neural network pressure identifiers with asynchronous electric drives and also determines the sizes of the hidden layers using integral criteria. The article provides comparative pressure waveforms showing the operability of the neuroidentifier.

Keywords: pressure neural identifier, autoregressive networks, electric motor, centrifugal pump, indirect method of determination, pumping station.



Введение

Улучшение характеристик регулирования насосных установок предъявляет повышенные требования к показателям качества регулирования выходных координат технологических параметров [1]. Повышения данных показателей можно добиться путем добавления обратных связей по координатам технологического процесса — давления насосной установки. В качестве способов получения значений текущего давления используются датчики давления жидкости, основанные на ёмкостном, электромагнитном, пьезорезистивном, тензометрическом и оптическом принципах действия [2].

Ёмкостные датчики давления содержат мембрану, электрическая ёмкость которой способна изменяться при различных значениях давления жидкости, т. е. изменение давления прямо пропорционально электрической ёмкости цепи датчика.

Индуктивные или электромагнитные датчики давления включают в себя Е-образную пластину с катушкой и проводящую мембрану. В процессе работы мембрана, которая расположена на малом расстоянии от пластины, деформируется. Данные деформации приводят к изменению магнитной цепи в силу изменения магнитной проницаемости в области между мембраной и Е-образной пластиной. Изменение магнитной цепи приводит к пропорциональным изменениям тока в катушке, намотанной на центральный стержень пластины.

В пьезодатчиках давления специальный материал из кварца или керамики под действием давления выступает в роли генератора сигнала. Сопротивление в цепи датчика зависит от величины давления жидкости.

Тензорезистивный способ использует структуру кремния на сапфире, включающую металлическую мембрану. К данной металлической мембране припаян тензопреобразователь, который использует схему моста Уитстона из кремниевых тензорезисторов. Указанная схема нанесена на подложку из сапфира методом гетероэпитаксиального наращивания.

Оптические датчики содержат в своей конструкции многослойные прозрачные структуры, пропускающие свет. При изменении давления на данные структуры изменяются параметры пропускания светового потока. Уровень светового потока далее определяется фотопреобразователем, на выходе которого генерируется электрический ток.

Однако прямые способы определения фактического давления имеют и недостатки: необходимость прокладывать линии связи и установка дополнительного оборудования; возможность снижения общей надежности системы при использовании указанных датчиков. Также существуют электронные агрегаты, где возможность монтажа датчика давления ограничена.

Существуют способы и устройства для идентификации координат асинхронного электропривода с использованием искусственных нейронных сетей [3], в частности, определение угловой скорости вращения ротора электродвигателя. В данных способах для идентификации угловой скорости применяются четыре входных сигнала тока статора и ротора без задержек, тринадцать сигналов с использованием задержек различной длительности.

В статье [4] рассматривается подход, в котором используется профиль статорного тока для прогнозирования отклонения от нормальных режимов работы центробежных насосов с осевым подводом жидкости с помощью гибридной модели глубокого обучения. Указанная модель сочетает в себе преимущества сверточных нейронных сетей (CNN) для извлечения пространственных признаков и сетей долговременной и кратковременной памяти (LSTM) для улавливания временных зависимостей (CNN-LSTM).

Отличие состоит в том, что для вычисления давления центробежного насоса с асинхронным электродвигателем используют нейронные сети прямого распространения (НСПР, FNN), а также нелинейные авторегрессионные сети с внешними входными параметрами (НАРВ, NARX) сети. Дополнительно для повышения точности и снижения шума на вход сети подают значения модулей статорного тока электродвигателя и значение модуля напряжения статорного тока.

Структура нейроидентификатора давления

Нейронная сеть прямого распространения [5, 6], предназначенная для идентификации создаваемого насосом напора жидкости, состоит из трех слоев: входного, скрытого и выходного (рис. 1). Выходной слой включает один нейрон, который использует линейную функцию активации [7, 8]. Входной слой состоит из шести нейронов. Для активации нейронов в скрытом слое применяется функция гиперболического тангенса, тогда как в выходном слое ис-

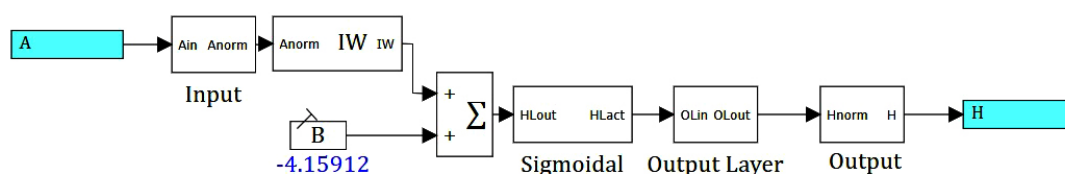


Рис. 1. Структура идентификатора давления на основе FNN сети
Fig. 1. Structure of the pressure identifier based on the FNN network

пользуется линейная функция активации. На вход нейронной сети подаются двухфазные значения статорного напряжения и тока, модули статорного тока и напряжения.

Промежуточные значения напора жидкости насосной установки с асинхронным электроприводом определяются по формуле (1):

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^n \left(w_{2i} \cdot th \left(\sum_{j=1}^m (x_j w_{1ij} + b_{1i0}) \right) + b_n \right), \quad (1)$$

где $\hat{H}$ — промежуточные значения напора жидкости; x_j — сигналы входного слоя искусственной нейронной сети, равные соответственно двухфазным составляющим напряжения статора электродвигателя (u_{sa}, u_{sp}), модулю напряжения статора U_s , двухфазным составляющим тока статора электродвигателя (i_{sa}, i_{sp}), модулю тока статора I_s ; m — число нейронов во входном слое ($m = 6$); n — число нейронов в скрытом слое; w_{1ij} — вес j -го входа i -го нейрона скрытого слоя; b_{1i0} — сдвиг i -го нейрона скрытого слоя; w_{2i} — вес i -го входа нейрона выходного слоя; b_n — сдвиг нейрона выходного слоя.

Для составления вектора входных координат, подаваемого на входной слой нейроидентификатора давления, используются дополнительные преобразования (2):

$$\begin{cases} u_{sa}(k_i) = u_A(t) \\ u_{sp}(k_i) = \frac{2u_B(t) + u_A(t)}{\sqrt{3}} \\ U_s(k_i) = \sqrt{u_{sa}(t)^2 + u_{sp}(t)^2} \\ i_{sa}(k_i) = i_A(t) \\ i_{sp}(k_i) = \frac{2i_B(t) + i_A(t)}{\sqrt{3}} \\ I_s(k_i) = \sqrt{i_{sa}(t)^2 + i_{sp}(t)^2} \end{cases} \quad (2)$$

где k_i — номер итерации.

Для повышения точности идентификации давления можно использовать структуры нелинейных авторегрессивных сетей с внешними входными параметрами (НАРВ). Структура НАРВ сети предполагает использование задержек в канале обратной связи, замкнутой на входной слой. Для расширения числа нейронов входного слоя (3) также исполь-

зуются задержки сигналов на несколько тактов (рис. 2.). Так как нейроидентификатор определяет одну величину, то в этом случае размерность выходного слоя — один нейрон. Размерность скрытого слоя может определяться в процессе оптимизации нейроидентификатора и имеет от 10 до 25 нейронов с тангенциальной функцией активации:

$$x_j = \begin{Bmatrix} u_{sa}(k_i) \\ u_{sp}(k_i) \\ u_{sa}(k_i - d) \\ u_{sp}(k_i - d) \\ U_s(k_i) \\ U_s(k_i - d) \\ i_{sa}(k_i) \\ i_{sp}(k_i) \\ i_{sa}(k_i - d) \\ i_{sp}(k_i - d) \\ I_s(k_i) \\ I_s(k_i - d) \\ \hat{H}(k_i - 1) \\ \hat{H}(k_i - k_1) \\ \hat{H}(k_i - k_2) \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

где $u_{sa}(k_i), u_{sp}(k_i), u_{sa}(k_i - d), u_{sp}(k_i - d), U_s(k_i), U_s(k_i - d)$ — мгновенные и амплитудные напряжения статора с задержками и без таковой; $i_{sa}(k_i), i_{sp}(k_i), i_{sa}(k_i - d), i_{sp}(k_i - d), I_s(k_i), I_s(k_i - d)$ — мгновенные и амплитудные токи статора с задержками (d — величина задержки) и без таковой; $\hat{H}(k_i - 1), \hat{H}(k_i - k_1), \hat{H}(k_i - k_2)$ — значения развиваемого давления насоса при различных величинах задержки (k_1, k_2 — величины задержек обратной связи).

Формирование вектора входных величин, подаваемых на первый слой НАРВ, осуществляется с помощью дополнительных преобразований (4). В ходе преобразований из трехфазных значений $u_A, u_B, u_C, i_A, i_B, i_C$ определяются $\alpha\beta$ -составляющие для токов и напряжений статора, величины амплитуд тока и напряжений, а также выполняются необходимые задержки данных величин:

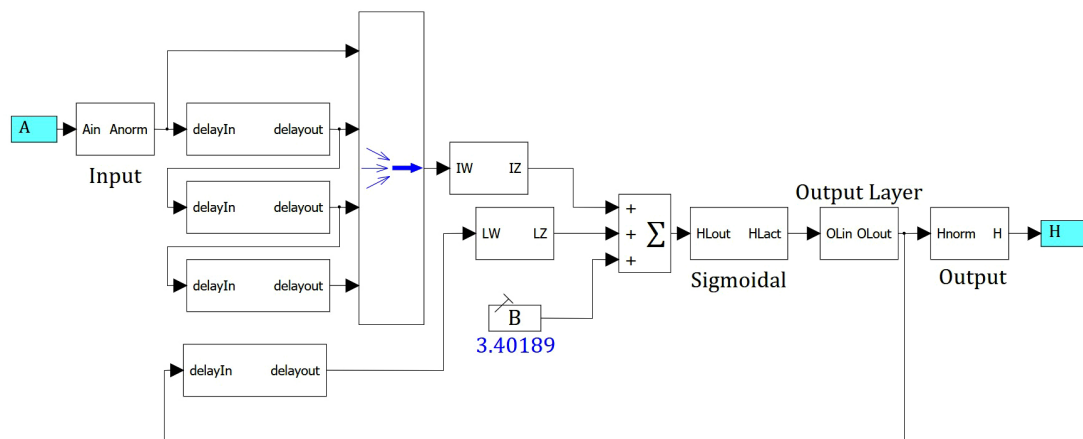


Рис. 2. Структура идентификатора давления на основе NARX сети
Fig. 2. Structure of the pressure identifier based on the NARX network

$$\begin{cases}
u_{sa}(k_i) = u_A(t) \\
u_{sa}(k_i - d) = u_{sa}(t - d \cdot \tau) \\
u_{sp}(k_i) = \frac{u_A(t) + 2u_B(t)}{\sqrt{3}} \\
u_{sp}(k_i - d) = u_{sp}(t - d \cdot \tau) \\
U_s(k_i) = \sqrt{u_{sa}^2(t) + u_{sp}^2(t)} \\
U_s(k_i - d) = U_s(t - d \cdot \tau) \\
i_{sa}(k_i) = i_A(t) \\
i_{sp}(k_i) = \frac{i_A(t) + 2i_B(t)}{\sqrt{3}} \\
i_{sa}(k_i - d) = i_{sa}(t - d \cdot \tau) \\
i_{sp}(k_i - d) = i_{sp}(t - d \cdot \tau) \\
I_s(k_i) = \sqrt{i_{sa}^2(t) + i_{sp}^2(t)} \\
I_s(k_i - d) = I_s(t - d \cdot \tau) \\
\hat{H}(k_i - 1) = \hat{H}(t - 1 \cdot \tau) \\
\hat{H}(k_i - k_1) = \hat{H}(t - k_1 \cdot \tau) \\
\hat{H}(k_i - k_2) = \hat{H}(t - k_2 \cdot \tau),
\end{cases} \quad (4)$$

где τ — размер шага вычисления идентификатора.

Текущее значение давления насоса определяется по формуле (5) для случая функции гиперболического тангенса скрытого слоя и линейной функции выходного слоя:

$$\hat{H} = w_3 \cdot \sum_{i=1}^n \left(w_{2i} \cdot \tanh \left(\sum_{j=1}^m (x_j w_{1ij} + b_{1i0}) \right) + b_{2i0} \right) + b_3, \quad (5)$$

где $\hat{H}$ — значение напора нейроидентификатора; w_3 — весовая функция нейронов внешнего слоя; b_{1i0} , b_{2i0} , b_3 — смещения для нейронов входного, скрытого и выходного слоев соответственно.

Для настройки нейронной сети и подбора весовых коэффициентов с учетом смещений необходимо провести обучение нейронной сети. Обучение осуществляется на основе данных, полученных от работающего электропривода насоса. Важно воздействовать весь рабочий диапазон возмущений, для того чтобы получить корректные весовые коэффициенты и уровни смещений нейронов. В рассматриваемом случае электропривода переменного тока возмущающими величинами могут выступать величина питающего напряжения и его частота. Так как для регулирования частоты статорного тока используются силовые частотные преобразователи, в том числе с фильтрами выходного напряжения, то коэффициент гармонических искажений напряжения составлял 5 %. Еще одним возмущением для гидравлической подсистемы является дросселирование напорного трубопровода.

В настоящее время большое количество существующих алгоритмов обучения нейронных сетей обусловлено высокой актуальностью задач подобного рода. Алгоритм обратного распространения ошибки (ОРОВ) численно определяет градиенты функций ошибок относительно весов путем развертывания сети во времени. Этот метод представляет собой расширение алгоритма обратного распространения для рекуррентных нейронных сетей и является эффективным для обучения моделей НАРВ с длительными временными зависимостями [9, 10].

Алгоритм рекуррентного обучения в реальном времени (РОРВ) вычисляет градиенты ошибки

в режиме реального времени, не требуя развертывания сети. Указанный подход позволяет эффективно обучать модели НАРВ в условиях онлайн-обучения. Хотя РОРВ вычислительно более затратный по сравнению с ОРОВ, он подходит для задач с быстрой обратной связью [11].

Алгоритм обучения усеченного обратного распространения ошибки (УОРОВ) является усеченной версией ОРОВ, который для вычислений использует только вычисленный в текущий момент времени сигнал ошибки. Усечение вычислений позволяет оптимизировать их объем и требуемые ресурсы памяти, избегая варианта, когда обучение станет невыполнимым.

Алгоритм Левенберга — Марквардта (ЛМ) использует квадратичную аппроксимацию функции ошибки, тем самым определяя оптимальное направление для новых весов сети НАРВ. Однако, в отличие от метода ОРОВ, данный алгоритм еще требует вычисления матрицы Якоби и ее обратной матрицы, что дает высокую скорость сходимости. Среди недостатков метода можно отметить высокую вычислительную нагрузку, что ограничивает размеры слоев сети.

Имитационное моделирование

Для формирования обучающей выборки и оценки эффективности работы нейронной сети, отвечающей за идентификацию давления, была разработана имитационная модель электропривода насосной установки с использованием программного обеспечения Simintech [12]. В указанной модели источник электрической энергии имеет возможность регулировать частоту, величину и форму трехфазного напряжения по скалярным законам управления. Модель электромеханической и гидравлической подсистем соответствует уравнениям, описанным в (6). Система уравнений (6) представляет собой математическое описание имитационной модели электропривода насоса. Номинальное давление насоса составляет 90 м водяного столба, мощность электродвигателя — 90 кВт.

$$\begin{cases}
u_{sa} = R_s i_{sa} + k_{is} \frac{di_{sa}}{dt} + k_{r2} \frac{d\psi_{R1\alpha}}{dt} + k_{r1} \frac{d\psi_{R2\alpha}}{dt} \\
u_{sp} = R_s i_{sp} + k_{is} \frac{di_{sp}}{dt} + k_{r2} \frac{d\psi_{R1\beta}}{dt} + k_{r1} \frac{d\psi_{R2\beta}}{dt} \\
0 = -k_{r2} R_{r1} i_{sa} + \frac{1}{T_{r1}} \psi_{R1\alpha} + \frac{d\psi_{R1\alpha}}{dt} - \frac{R_{r1} L_m}{\sigma} \psi_{R2\alpha} + Z_p \omega_m \psi_{R1\beta} \\
0 = -k_{r2} R_{r1} i_{sp} + \frac{1}{T_{r1}} \psi_{R1\beta} + \frac{d\psi_{R1\beta}}{dt} - \frac{R_{r1} L_m}{\sigma} \psi_{R2\beta} - Z_p \omega_m \psi_{R1\alpha} \\
0 = -k_{r1} R_{r2} i_{sa} + \frac{1}{T_{r2}} \psi_{R2\alpha} + \frac{d\psi_{R2\alpha}}{dt} - \frac{R_{r2} L_m}{\sigma} \psi_{R1\alpha} + Z_p \omega_m \psi_{R2\beta} \\
0 = -k_{r1} R_{r2} i_{sp} + \frac{1}{T_{r2}} \psi_{R2\beta} + \frac{d\psi_{R2\beta}}{dt} - \frac{R_{r2} L_m}{\sigma} \psi_{R1\beta} - Z_p \omega_m \psi_{R2\alpha} \\
T_E = \frac{3}{2} Z_p k_{r2} (\psi_{R1\alpha} i_{sp} - \psi_{R1\beta} i_{sa}) + \frac{3}{2} Z_p k_{r1} (\psi_{R2\alpha} i_{sp} - \psi_{R2\beta} i_{sa}) \\
\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{T_E - T_L - T_0}{J} \\
T_L = \frac{pq}{\omega_m} + T_0 \\
p = \omega^{-2} [(K_{AP0} - K_{AP1} q\omega) - K_{AP2} (q\omega)^2 - K_{AP3} (q_{nom} - q\omega)^2],
\end{cases} \quad (6)$$

где $\psi_{R1\alpha}$, $\psi_{R1\beta}$, $\psi_{R2\alpha}$, $\psi_{R2\beta}$ — составляющие потокосцепления ротора для модели двигателя с двумя клетками; ω_m — угловая скорость вращения ротора;

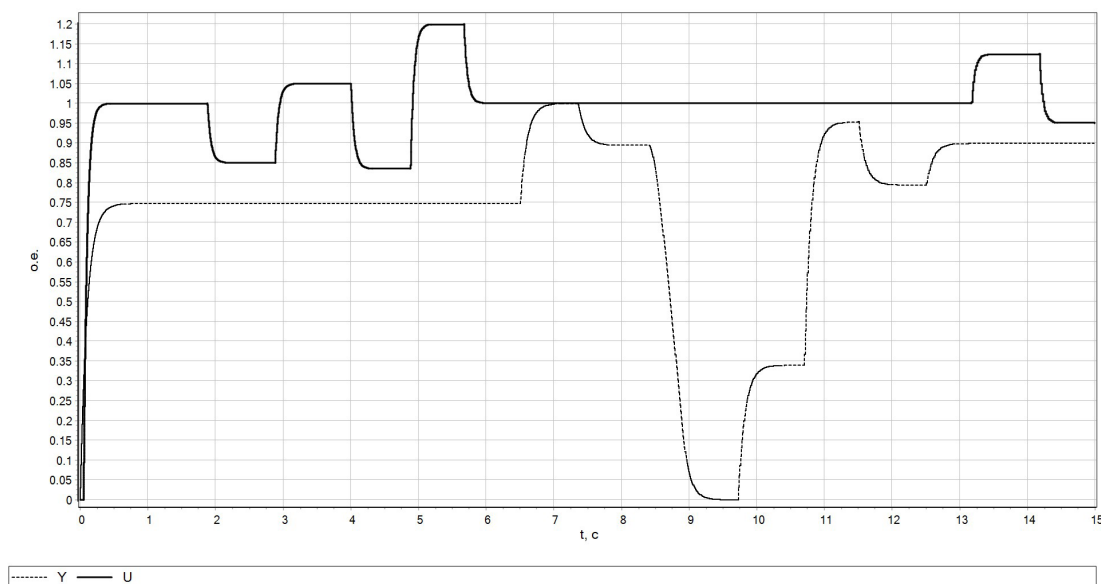


Рис. 3. График задающих воздействий на электропривод:
напряжение и степень открытия задвижки напорного трубопровода
Fig. 3. Graph of the control inputs to the electric drive:
voltage and degree of opening of the pressure pipeline valve

J — суммарный момент инерции привода; T_E — электромагнитный момент двигателя; T_L — момент сопротивления нагрузки центробежного насоса; T_0 — момент сопротивления трения; q — текущий объемный расход насоса в напорном трубопроводе; $K_{AP0}, K_{AP1}, K_{AP2}, K_{AP3}$ — коэффициенты аппроксимации напорной диаграммы насоса.

Полученные с помощью имитационной модели данные использовались для данных вектора первого слоя (3). Выборка результатов при различных уровнях подачи обеспечивается за счет изменения степени открытия задвижки на напорном трубопроводе. При формировании данных применялись параметры жидкости, аналогичные по своим свойствам воде. Модель насосной установки принималась для случая, когда отсутствует противодействие сети, но при этом работает обратный клапан, установленный на напорном трубопроводе. График задающих воздействий представлен на рис. 3. Со стороны питающего напряжения воздействуют на электропривод, изменяя величину питающего напряжения (U , см. рис. 3). Со стороны трубопровода возмущением является степень открытия задвижки напорного трубопровода (Y , см. рис. 3). Сопротивление напорного трубопровода определяется степенью открытия задвижки Y (о.е.), где в случае, если $Y = 1$, и $U = 1$, насос работает в номинальной рабочей точке при $Q = Q_{nom}, H = H_{nom}$.

Для определения числа скрытых нейронов, а также кратности временных задержек d, k_1, k_2 производилась оценка качества работы нейроидентификатора давления по интегральному линейному (7) и квадратичному критериям ошибки (8), для тестовой выборки данных, отличающихся от обучающей выборки. Количество эпох обучения не превышало 1000. Значения интегральных критериев для сетей прямого распространения и авторегрессионных сетей, величины которых не превышают 10 мс ($10 \text{ м}^2\text{с}$) приведены в табл. 1.

Интегральный линейный критерий предполагает вычисление модуля ошибки идентификации:

$$\Delta_{\text{лин}} = \sum_{i=0}^{n_{\text{max}}} |h_i - \hat{h}_i| \tau, \quad (7)$$

Таблица 1. Значения интегральных критериев ошибки
Table 1. Values of the integral error criteria

Критерий	Значение				
	FNN, $n = 16$	FNN, $n = 47$	NARX, $n = 11$	NARX, $n = 15$	NARX, $n = 18$
$\Delta_{\text{лин}}, \text{м} \cdot \text{с}$	5,826	3,807	3,74	2,448	3,92
$\Delta_{\text{кв}}, \text{м}^2 \cdot \text{с}$	8,268	3,884	3,003	1,376	3,11

где h_i — эталонное значение давления, развиваемое насосной установкой, в метрах водяного столба; n_{max} — общее число шагов вычислений.

Интегральный квадратичный критерий предполагает вычисление квадрата ошибки идентификации:

$$\Delta_{\text{кв}} = \sum_{i=0}^{n_{\text{max}}} (h_i - \hat{h}_i)^2 \tau. \quad (8)$$

В результате подбора числа нейронов скрытого слоя согласно табл. 1, установлено, что в диапазоне от 5 до 50 размера скрытого слоя, минимальное количество нейронов для квадратичного и линейного критериев ошибки соответствует числу 47 ($n = 47$) в случае использования нейронной сети прямого распространения. Для нелинейных авторегрессионных сетей с внешними входными параметрами оптимальное число скрытых нейронов идентификатора составляет 15 ($n = 15$), так как интегральные критерии принимают наименьшие значения.

Пример формы и величины сигналов тока и напряжения асинхронного электродвигателя, используемых для идентификации давления, приведен на рис. 4.

На рис. 5, 6 приведены переходные процессы, возникающие при возмущении нейросетевого наблюдателя давления со структурой сети прямого распространения и нелинейной авторегрессионной нейронной сетью, а также аналогичные процессы, полученные с помощью модели (6). Из представленных переходных процессов давления видна асимптотическая сходимость идентифицируемого

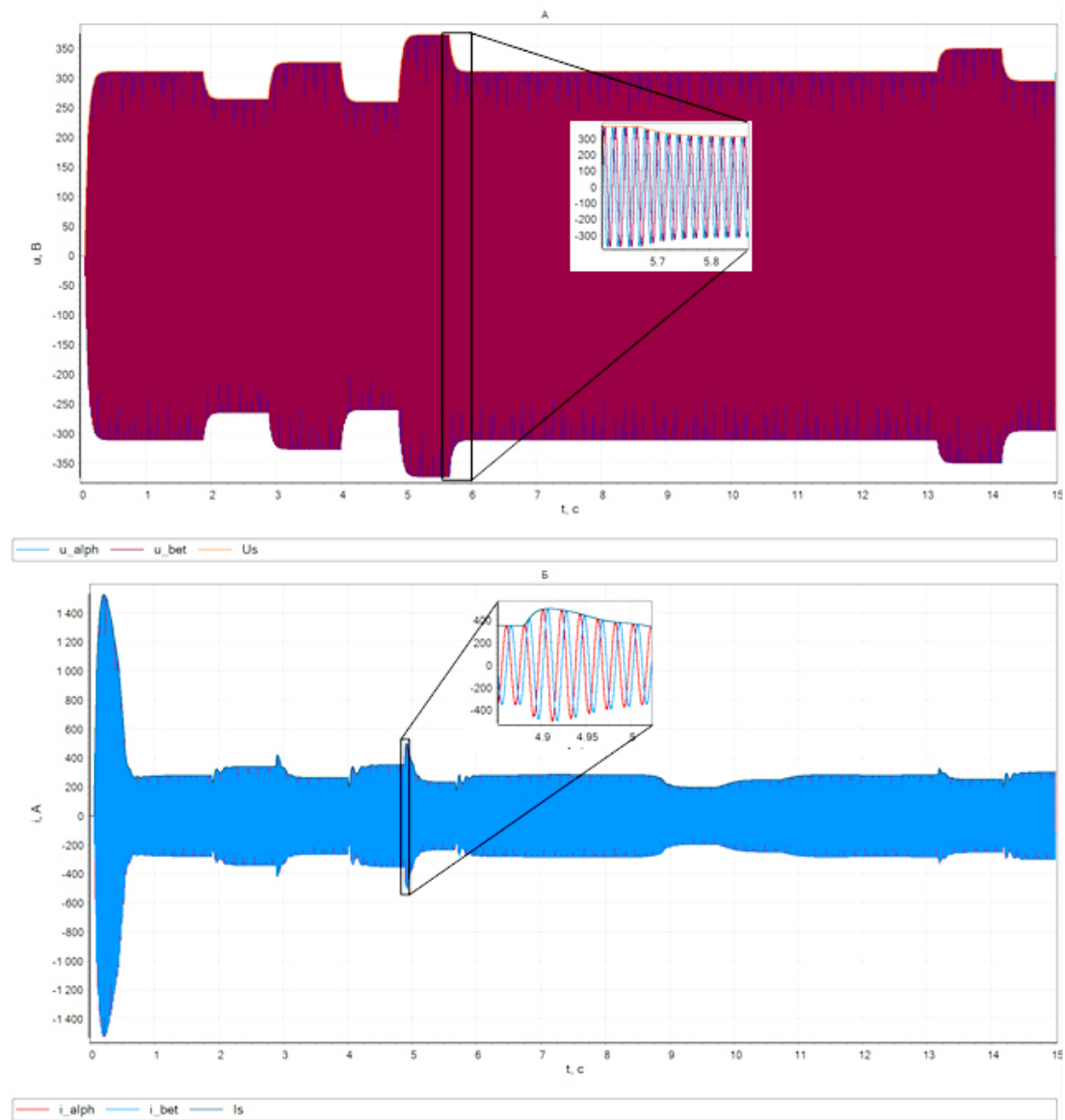


Рис. 4. График переходных процессов напряжения и тока статора электродвигателя
Fig. 4. Graph of the voltage and current transients of the electric motor stator

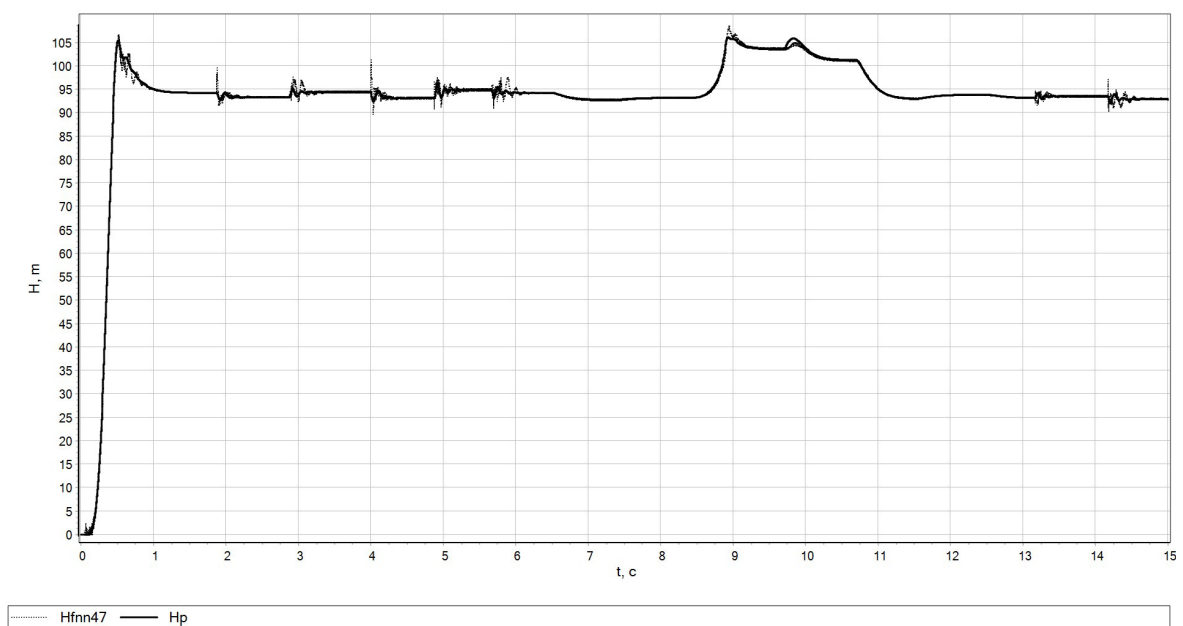


Рис. 5. Графики переходных процессов значений напора нейросетевого идентификатора (Hfnn47) и эталона (Hp)
Fig. 5. Graphs of the transients of the pressure of the neural network identifier (Hfnn47) and the reference (Hp)

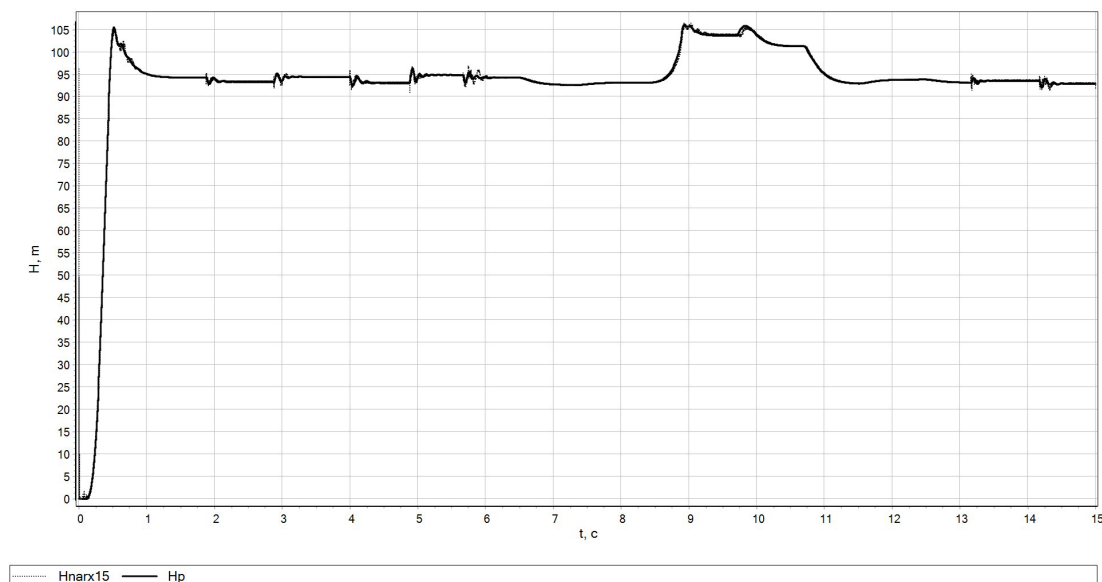


Рис. 6. Графики переходных процессов значений напора нейросетевого NARX идентификатора (Hnarx15) и эталона (Hp)
Fig. 6. Graphs of the transients of the pressure of the neural NARX network identifier (Hnarx15) and the reference (Hp)

давления к установившимся значениям. Имеет место быть увеличение погрешности идентификации давления при различных возмущениях (питающая сеть, гидравлическая сеть). Максимальная относительная ошибка в динамике для идентификатора давления на основе сетей прямого распространения составляет 8,54 %, для идентификатора давления на основе авторегрессионной сети — 5,43 %.

Выводы

Замкнутые системы перекачки жидкости с асинхронным электроприводом для контроля давления используют в канале обратной связи различные датчики давления. Одним из основных недостатков обратной связи с применением датчиков давления является использование линий связи и дополнительной аппаратуры для установки данных, что снижает надежность системы в целом.

Предложенные нейросетевые идентификаторы давления электропривода насоса обладают работоспособностью в широком диапазоне регулирования напряжения и сопротивления трубопровода. В исследовании показано использование дополнительных входных сигналов — векторов тока и напряжения для включения в структуру входного слоя идентификатора давления насосной установки. Применение авторегрессионной нейронной сети позволяет дополнительно использовать данные выхода с некоторыми задержками, что уменьшает число нейронов скрытого слоя по сравнению с нейроидентификаторами давления на основе сетей прямого распространения.

В процессе рассмотрения структуры сети были подобраны величины задержек и количество нейронов скрытого слоя по условию линейного и квадратичного интегральных критериев минимума ошибки.

Список источников / References

1. Степанов С. Е., Васенин А. Б., Груздев В. В. [и др.] Цифровой двойник системы «пласт — скважина — электроприводной центробежный насос» нефтегазовых месторождений //

Автоматизация и ИТ в нефтегазовой области. 2024. № 2 (56). С. 16 — 26. EDN: WQBTNP.

Stepanov S. E., Vasenin A. B., Gruzdev V. V. [et al.]. Tsifrovoy dvoynik sistemy "plast — skvazhina — elektroprivodnoy tsentrobezhnyy nasos" neftegazovykh mestorozhdeniy [Digital twin of the system "Remat — well — electric drive centrifugal pump" oil and gas deposits]. *Avtomatizatsiya i IT v Neftegazovoy Oblasti*. 2024. No. 2 (56). P. 16 — 26. EDN: WQBTNP. (In Russ.).

2. Wolstrup A. F., Spangenberg J., Yamamoto A. [et al.]. Advances in 3D printed electromechanical sensors: Performance comparison, trends, and future directions. *Additive Manufacturing*. 2025. Vol. 106. P. 104799. DOI: 10.1016/j.addma.2025.104799.

3. Пат. 2476983 C1 Российская Федерация, МПК H 02 P 23/14, H 02 P 27/04. Способ определения оценки частоты вращения асинхронного двигателя / Глазырин А. С., Ткачук Р. Ю., Глазырина Т. А. [и др.]. № 2011135823/07; заявл. 26.08.2011; опубл. 27.02.2013. EDN: LZDPIE.

Patent No. 2476983 C1 Russian Federation, IPC H 02 P 23/14, H 02 P 27/04. Sposob opredeleniya otsenki chastoty vrashcheniya asinkhronnogo dvigatelya [A method for determining the estimate of the rotational speed of an asynchronous motor] / Glazyrin A. S., Tkachuk R. Yu., Glazyrina T. A. [et al.]. No. 2011135823/07. EDN: LZDPIE. (In Russ.).

4. Han Y., Zou J., Gong B. [et al.]. The use of model-based voltage and current analysis for torque oscillation detection and improved condition monitoring of centrifugal pumps. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2025. Vol. 222. P. 111781. DOI: 10.1016/j.ymssp.2024.111781.

5. Кузьменко А. А. Архитектуры нейронных сетей // Информационные технологии. 2022. Т. 20, № 2. С. 121 — 132. DOI: 10.18469/ikt.2022.20.2.15. EDN: UGDBAM.

Kuz'menko A. A. Arkhitektury neyronnykh setey [Neural network architectures]. *Infokommunikacionnye Tekhnologii*. 2022. Vol. 20, no. 2. P. 121 — 132. DOI: 10.18469/ikt.2022.20.2.15. EDN: UGDBAM. (In Russ.).

6. Славутский А. Л., Славутский Л. А., Алексеев В. В. [и др.]. Нейросетевой алгоритм восстановления в реальном времени сигнала промышленной частоты при нелинейных искажениях // Электротехника. 2021. № 8. С. 21 — 25. EDN: MDRKRB.

Slavutskiy A. L., Slavutskiy L. A., Alekseyev V. V. [et al.]. Neyrosetevoy algoritm vosstanovleniya v real'nom vremeni signala promyshlennoy chastoty pri nelineynykh iskazheniyakh

[A neural-network algorithm for real-time recovery of an industrial-frequency signal upon nonlinear distortions]. *Elektrotehnika. Electrotechnics*. 2021. No. 8. P. 21–25. EDN: MDRKRB. (In Russ.).

7. Кузнецов В. П. Комплексная рекуррентная нейронная сеть // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2025. № 92. С. 160–169. DOI: 10.21667/1995-4565-2025-92-160-169. EDN: HUBJMV.

Kuznetsov V. P. Kompleksnaya rekurrentnaya neyronnaya set' [Complex recurrent neural network]. *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta. Vestnik of Ryazan State Radioengineering University*. 2025. No. 92. P. 160–169. DOI: 10.21667/1995-4565-2025-92-160-169. EDN: HUBJMV. (In Russ.).

8. Leung H., Haykin S. The complex backpropagation algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 1991. Vol. 39, no. 9. P. 2101–2104. DOI: 10.1109/78.134446.

9. Marcjasz G., Uniejewski B., Weron R. Probabilistic electricity price forecasting with NARX networks: Combine point or probabilistic forecasts. *International Journal of Forecasting*. 2020. Vol. 36, Issue 2. P. 466–479. DOI: 10.1016/j.ijforecast.2019.07.002.

10. Hagan M., Demuth H., Beale M. [et al.]. *Neural network design*. 2nd ed. Martin Hagan. 2014. P. 800. ISBN 978-0-9717321-1-7.

11. Jesús O. De., Hagan M. T. Backpropagation algorithms for a broad class of dynamic networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*. 2007. Vol. 18, no. 1. P. 14–27. DOI: 10.1109/TNN.2006.882371. EDN: MEAGNJ.

12. Кочергин М. И. Реализация нейронных сетей в методе многоуровневых компонентных цепей // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2023. Т. 23, № 6. С. 1162–1170. DOI: 10.17586/2226-1494-2023-23-6-1162-1170. EDN: SCZVOA.

Kochergin M. I. Realizatsiya neyronnykh setey v metode mnogourovnevnykh komponentnykh tsepey [Implementation of neural networks in the method of multilevel component circuits]. *Nauchno-tehnicheskiy vestnik informatsionnykh tekhnologiy, mekhaniki i optiki. Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*. 2023. Vol. 23, no. 6. P. 1162–1170. DOI: 10.17586/2226-1494-2023-23-6-1162-1170. EDN: SCZVOA. (In Russ.).

ЛЫСЕНКО Олег Александрович, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры «Электрическая техника» Омского государственного технического университета, г. Омск.

SPIN-код: 4975-9193

AuthorID (РИНЦ): 643928

ORCID: 0000-0002-7924-5494

AuthorID (SCOPUS): 5650338820

ResearcherID: N-5528-2015

Адрес для переписки: oalisenko@omgtu.ru

Прозрачность финансовой деятельности: автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.

Статья поступила в редакцию 18.09.2025; одобрена после рецензирования 23.01.2026; принята к публикации 05.02.2026.

LYSENKO Oleg Aleksandrovich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Electrical Engineering Department, Omsk State Technical University, Omsk.

SPIN-code: 4975-9193

AuthorID (RSCI): 643928

ORCID: 0000-0002-7924-5494

AuthorID (SCOPUS): 5650338820

ResearcherID: N-5528-2015

Correspondence address: oalisenko@omgtu.ru

Financial transparency: the author has no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.

The article was submitted 18.09.2025; approved after reviewing 23.01.2026; accepted for publication 05.02.2026.

ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ ПОЛЮСНЫХ НАКОНЕЧНИКОВ ЯВНОПОЛЮСНОЙ СИНХРОННОЙ МАШИНЫ

Ю. В. Москалев

Омский государственный университет путей сообщения,
Россия, 644046, г. Омск, пр. К. Маркса, 35

В статье предложен подход для определения оптимальной формы полюсных наконечников явнополюсной синхронной машины с электромагнитным возбуждением, при использовании которых можно обеспечить синусоидальное распределение магнитной индукции в воздушном зазоре машины. Для анализа магнитной цепи электрической машины рассматривается цепь прямоугольной формы, которая с использованием метода конформных отображений преобразуется в сектор магнитной цепи машины на пару полюсов. В качестве примера выполнена оптимизация полюсных наконечников четырехполюсной электрической машины. В пакете программ *FEMM* рассчитано магнитное поле такой электрической машины, а также выполнен анализ кривой распределения нормальной составляющей магнитной индукции в воздушном зазоре.

Ключевые слова: синхронная машина, электромагнитное возбуждение, явнополюсный ротор, магнитная цепь, конформное отображение, воздушный зазор, оптимизация.

Для цитирования: Москалев Ю. В. Оптимизация формы полюсных наконечников явнополюсной синхронной машины // Омский научный вестник. 2026. № 1 (197). С. 96–102. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-96-102. EDN: NMALYU.



© Москалев Ю. В., 2026.
Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

OPTIMIZING THE SHAPE OF THE POLE TIPS OF A SINGLE-POLE SYNCHRONOUS MACHINE

Yu. V. Moskaev

Omsk State Transport University, Russia, Omsk, K. Marks Ave., 35, 644046

The article proposes an approach for determining the optimal shape of the pole tips of a salient-pole synchronous machine with electromagnetic excitation, which can be used to ensure a sinusoidal distribution of magnetic induction in the air gap of the machine. In order to analyze the magnetic circuit of an electric machine, a rectangular magnetic circuit is considered, which is transformed using the conformal mapping method into a machine magnetic circuit sector for a pair of poles. As an example, the optimization of the pole tips of a four-pole electrical machine is performed. The magnetic field of such an electric machine is calculated in the *FEMM* software package, and the distribution curve of the normal component of magnetic induction in the air gap is analyzed.

Keywords: synchronous machine, electromagnetic excitation, salient poles rotor, magnetic circuit, conformal mapping, air gap, optimization.

For citation: Moskaev Yu. V. Optimizing the shape of the pole tips of a single-pole synchronous machine. *Omsk Scientific Bulletin*. 2026. No. 1 (197). P. 96–102. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-96-102. EDN: NMALYU.



© Moskaev Yu. V., 2026.
The content is available under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

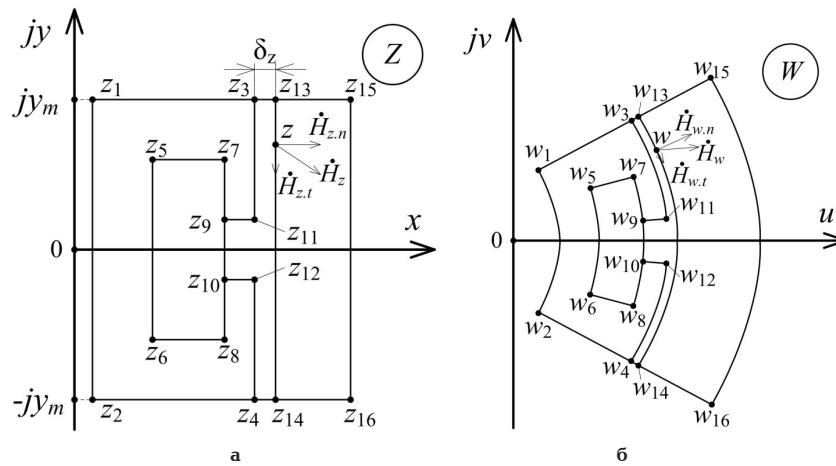


Рис. 1. Схема магнитной цепи для расчета напряженности и индукции магнитного поля синхронной машины на пару полюсов:

а — схема прямоугольной формы на комплексной плоскости Z ;

б — сектор магнитной цепи на комплексной плоскости W

Fig. 1. Magnetic circuit scheme for calculating the strength and induction of the magnetic field of a synchronous machine for a pair of poles:

а — a rectangular shape scheme on the complex Z plane;

б — the sector of the magnetic circuit on the complex W plane

Введение

Синхронные явнополюсные машины находят применение на предприятиях по добыче и транспортировке топлива, электрических станциях различных типов, в сельскохозяйственном производстве, на транспорте, в устройствах автоматики и измерительной техники.

Такие электрические машины часто используются в генераторном режиме, например, гидрогенераторы, генераторы дизельных электростанций, тяговые генераторы тепловозов и карьерных самосвалов, судовые генераторы, бортовые генераторы летательных аппаратов. Явнополюсные синхронные двигатели преимущественно применяются в электроприводах компрессоров, насосов, мельниц, экскаваторов, где необходимо обеспечить неизменную частоту вращения ротора. Синхронные компенсаторы также обычно изготавливают с явно выраженными полюсами на роторе [1].

Для улучшения массогабаритных показателей и показателей энергетической эффективности, снижения шума и вибрации синхронных машин при их проектировании и изготовлении принимаются меры к тому, чтобы кривая распределения магнитной индукции поля возбуждения приближалась к синусоиде [1–4].

Существующее в настоящее время специальное программное обеспечение для моделирования магнитных полей позволяет решать задачи анализа и оптимизации магнитных цепей для различных электротехнических и электромеханических устройств [5]. Уменьшению затрат времени на решение таких задач способствует интеграция в пакеты прикладных программ специальных модулей, позволяющих настраивать и управлять процессом решения задачи, используя языки программирования высокого уровня.

Постановки задачи

Рассмотрим подход к решению задачи оптимизации формы полюсных наконечников явнополюсной синхронной машины с электромагнитным возбуждением, при котором будет обеспечено синусоидальное распределение магнитной индукции

в воздушном зазоре (вдоль внутренней расточки сердечника статора).

Метод решения задачи и принятые допущения

При анализе магнитных цепей электрических машин находит применение метод конформных отображений. Этот метод позволяет упростить решение полевой задачи за счет преобразования заданной области с помощью конформного отображения в область более простого вида и наоборот [3; 6–10].

Для конформного преобразования прямоугольной области в область, соответствующую сектору магнитной цепи синхронной машины на пару полюсов, может быть использована показательная функция

$$w(z) = a^z, \quad (1)$$

где a — основание степени, $a > 1$; z , w — комплексные числа ($z = x + j \cdot y$ и $w = u + j \cdot v$); j — мнимая единица.

На рис. 1а приведена схема магнитной цепи прямоугольной формы на плоскости Z , на рис. 1б — схема, соответствующая сектору магнитной цепи явнополюсной синхронной машины на пару полюсов, которая получается при конформном преобразовании прямоугольной области с использованием показательной функции [10].

При расчете приняты следующие допущения: относительная магнитная постоянная принимается постоянной величиной (не учитывается нелинейность кривой намагничивания электротехнической стали); для того чтобы не учитывать зубцовые гармоники, сердечник статора задается без пазов; анализ магнитной цепи выполнен без учета реакции якоря.

При конформном отображении магнитное напряжение между близлежащими точками плоскости Z будет равно магнитному напряжению между соответствующими точками плоскости W :

$$\dot{H}_z dz = \dot{H}_w dw, \quad (2)$$

где dz , dw — приращение на комплексной плоскости Z и W соответственно; H_z , H_w — напряженность магнитного поля на комплексной плоскости Z и W соответственно, А/м.

Диапазон изменения мнимой части аргумента комплексной функции (1) зависит от показателя степени a и заданного количества числа пар полюсов машины p :

$$|y| \leq y_m = \frac{\pi}{2p \ln(a)}. \quad (3)$$

Зная напряженность магнитного поля области на комплексной плоскости Z , можно вычислить эту векторную величину на комплексной плоскости W :

$$\dot{H}_w = \dot{H}_z \left(\frac{dz}{dw} \right)^* = \dot{H}_z \left(\frac{1}{w \ln(a)} \right)^*, \quad (4)$$

где $(dz/dw)^*$ — сопряженный с dz/dw комплекс.

Значения напряжённости и индукции магнитного поля в различных точках прямоугольной области на комплексной плоскости Z можно определить одним из методов анализа магнитных полей [11] или с использованием специальных программных систем для инженерных расчётов [5].

Распределение магнитной индукции в воздушном зазоре явнополюсной синхронной машины зависит от величины неравномерного воздушного зазора между сердечником статора и полюсным наконечником, а также от длины полюсного наконечника по отношению к полюсному делению машины [1].

Как известно, неравномерный воздушный зазор задается за счет обеспечения необходимой формы полюсных наконечников [1, 2].

Определим форму полюсного наконечника ротора явнополюсной синхронной машины, при которой нормальная составляющая магнитной индукции вдоль внутренней расточки сердечника статора машины будет иметь синусоидальную форму. Это проще сделать для магнитной цепи прямоугольной формы на комплексной плоскости Z и далее в результате конформного отображения с использованием показательной функции (1) получить оптимальную форму полюсных наконечников для сектора магнитной цепи машины на пару полюсов на плоскости W .

При решении оптимизационной задачи нужно найти значения вектора $\delta_{z,k}$, при которых распределение нормальной составляющей магнитной индукции вдоль отрезка $z_{13}-z_{14}$ (рис. 1а), соответствующей дуге внутренней окружности сердечника статора $w_{13}-w_{14}$ (рис. 1б), будет синусоидальным:

$$B_{n,\sin}(y) = B_{n,m} \sin\left(\frac{\pi}{2y_m} y - \frac{\pi}{2}\right), \quad (5)$$

где y — координата вдоль отрезка $z_{13}-z_{14}$ комплексной плоскости Z , м.

Амплитудное значение нормальной составляющей магнитной индукции $B_{n,m}$ в формуле (5) принимается из допустимого диапазона значений магнитной индукции в воздушном зазоре синхронных машин [1, 2].

Оптимальная форма полюсного наконечника магнитной цепи на плоскости Z определяется по критерию

$$F(\delta_{z,k}) = \sum_{i=1}^N (B_{n,\text{расч},i}(y_i, \delta_{z,k}) - B_{n,\sin,i}(y_i))^2 \rightarrow \min, \quad (6)$$

где $B_{n,\text{расч},i}(y_i, \delta_{z,k})$ — значение нормальной составляющей индукции в i -й точке отрезка $z_{13}-z_{14}$ на плоскости Z , соответствующее дуге внутренней окружности сердечника статора $w_{13}-w_{14}$, рассчитанное в FEMM при заданных значениях переменных $\delta_{z,k}$, Тл.

Расчеты, численные эксперименты, примеры

Расчет выполнен для следующих исходных данных: основание степени функции (1) $a = 1,053$, число пар полюсов $p = 2$, относительная магнитная проницаемость стали $\mu_r = 700$, магнитодвижущая сила (МДС) обмотки возбуждения на полюс $F_{\text{об}} = 520$ А, амплитудное значение нормальной составляющей магнитной индукции $B_{n,m} = 1$ Тл.

Мнимая часть аргумента функции (1) при $p = 2$ находится в диапазоне (3) ($-15,21 \text{ мм} \leq y \leq 15,21 \text{ мм}$), длина отрезка $z_{13}-z_{14}$ равна 30,42 мм. Координаты точек на плоскости Z вдоль действительной оси определяются в зависимости от заданных радиусов элементов магнитной цепи синхронной машины r_i по формуле

$$x_i = \text{Re}(z_i) = \log_a r_i. \quad (7)$$

В качестве примера приняты следующие размеры магнитной цепи электрической машины: радиус вала — 4 мм ($\text{Re}(z_1) = 26,84 \text{ мм}$); меньший радиус области для размещения обмотки — 10 мм ($\text{Re}(z_5) = 44,59 \text{ мм}$); больший радиус области для размещения обмотки — 22 мм ($\text{Re}(z_7) = 59,85 \text{ мм}$); наружный радиус ротора (по продольной оси) — 26,65 мм ($\text{Re}(z_3) = 63,56 \text{ мм}$); внутренний радиус статора — 27 мм ($\text{Re}(z_{13}) = 63,82 \text{ мм}$); наружный радиус статора — 42 мм ($\text{Re}(z_{15}) = 72,38 \text{ мм}$).

Определение оптимальной формы полюсных наконечников выполнено для магнитной цепи прямоугольной формы (рис. 1а). Отрезки z_3-z_{11} и z_4-z_{12} на этой схеме соответствуют кривым w_3-w_{11} и w_4-w_{12} (рис. 1б), которые задают форму полюсных наконечников синхронной машины. Для изменения формы полюсных наконечников отрезки z_3-z_{11} и z_4-z_{12} разделены на 15 равных частей. Координаты точек границ этих отрезков по действительной оси $\delta_{z,k}$ являются независимыми переменными при решении оптимизационной задачи. Форма кривых между точками z_3-z_{11} и z_4-z_{12} симметрична относительно действительной оси комплексной плоскости Z .

При решении задачи необходимо также определить оптимальное расстояние между полюсными наконечниками соседних полюсов (расстояние между точками z_{11} и z_{12}) и минимальное расстояние между полюсным наконечником и сердечником статора (отрезок z_3-z_{13} на рис. 1а). Для решения задачи применён оптимизационный метод сопряженных направлений (метод Пауэлла) [12–14].

Метод нулевого порядка, требующий вычисления только значений целевой функции, эффективен при минимизации квадратичных функций, к которым можно отнести целевую функцию (6). При решении задачи независимыми являются семнадцать переменных. Шестнадцать переменных — это координаты точек границ отрезков, на которые разделены кривые полюсных наконечников, и одна переменная величина, учитывающая рассто-

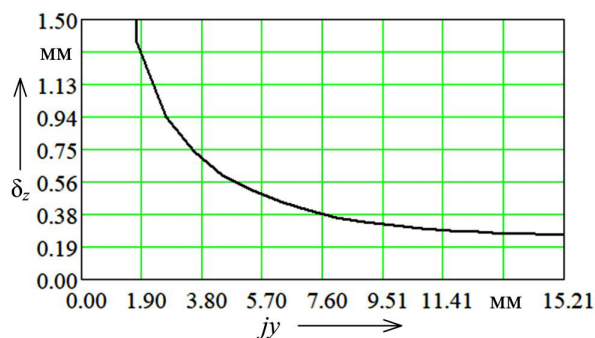


Рис. 2. Оптимальный неравномерный воздушный зазор для магнитной цепи на плоскости Z
Fig. 2. Optimal uneven air gap for a magnetic circuit on the Z plane

яние между полюсными наконечниками соседних полюсов.

При использовании метода Пауэлла необходимо построение системы сопряженных направлений. Точка оптимума квадратичной функции определяется в результате реализации одномерных поисков по заданным направлениям. Алгоритм метода сопряженных направлений предполагает выполнение нескольких шагов [12–14]:

1) задается начальная точка и система N линейно независимых направлений (N — размерность задачи), эти направления могут совпадать с направлениями координатных осей;

2) минимизируется целевая функция при последовательном движении по $N+1$ направлениям; полученная ранее точка минимума берется в качестве исходной на этой итерации оптимизационного алгоритма;

3) определяется новое сопряженное направление с помощью обобщенного свойства параллельного подпространства;

4) используется новое сопряженное направление и выполняется переход к выполнению второго шага этого алгоритма.

Оптимизация завершается, если разность значений целевой функции на разных итерациях меньше заданного значения. Допустимые диапазоны изменения независимых переменных при оптимизации учитывались методом штрафных функций.

При расчете на каждой итерации выполнялось сравнение кривой нормальной составляющей распределения магнитной индукции вдоль отрезка $z_{13}-z_{14}$ (рис. 1а) с синусоидой (5) с использованием критерия (6).

В результате решения оптимизационной задачи для магнитной цепи с заданными размерами

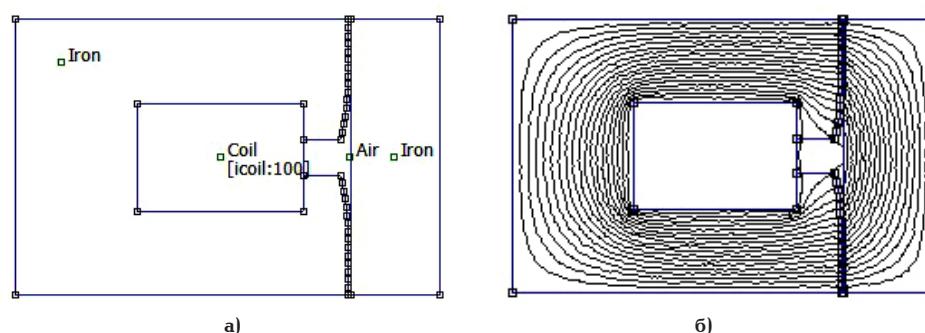


Рис. 3. Расчет магнитного поля магнитной цепи прямоугольной формы с оптимальным воздушным зазором: а — модель в *FEMM*; б — результат расчета
Fig. 3. Calculation of the magnetic field of a rectangular magnetic circuit with an optimal air gap: а — the *FEMM* model; б — calculation result

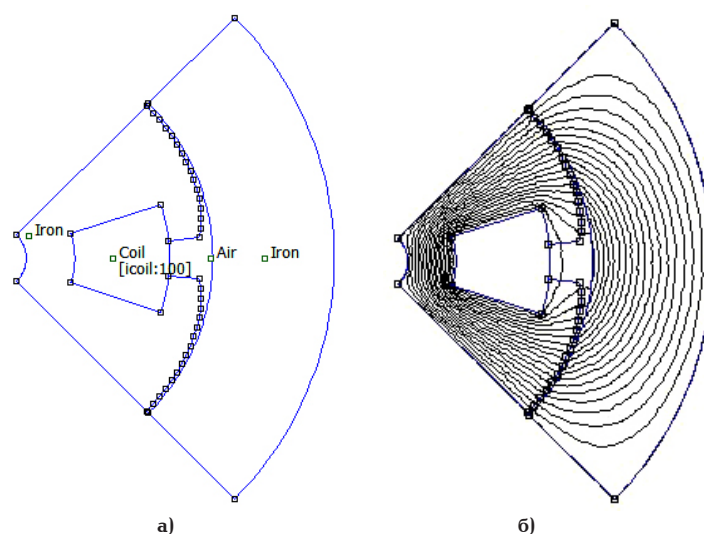


Рис. 4. Расчет магнитного поля сектора магнитной цепи на пару полюсов четырехполюсной машины с оптимальным воздушным зазором: а — модель в *FEMM*; б — результат расчета
Fig. 4. Calculation of the magnetic field for a magnetic circuit sector per pair of poles of a four-pole machine with an optimal air gap: а — the *FEMM* model; б — calculation result

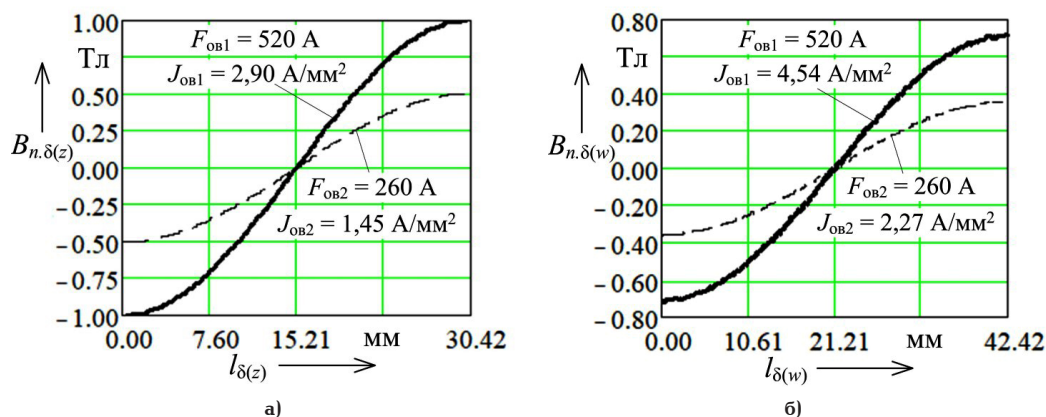


Рис. 5. Кривые распределения нормальной составляющей магнитной индукции в воздушном зазоре при различных значениях МДС обмотки возбуждения: а — для схемы на плоскости Z ; б — для схемы на плоскости W

Fig. 5. Distribution curves of the normal component of magnetic induction in the air gap at different values of the magnetizing force of the excitation winding: а — for a scheme on the Z plane; б — for a scheme on the W plane

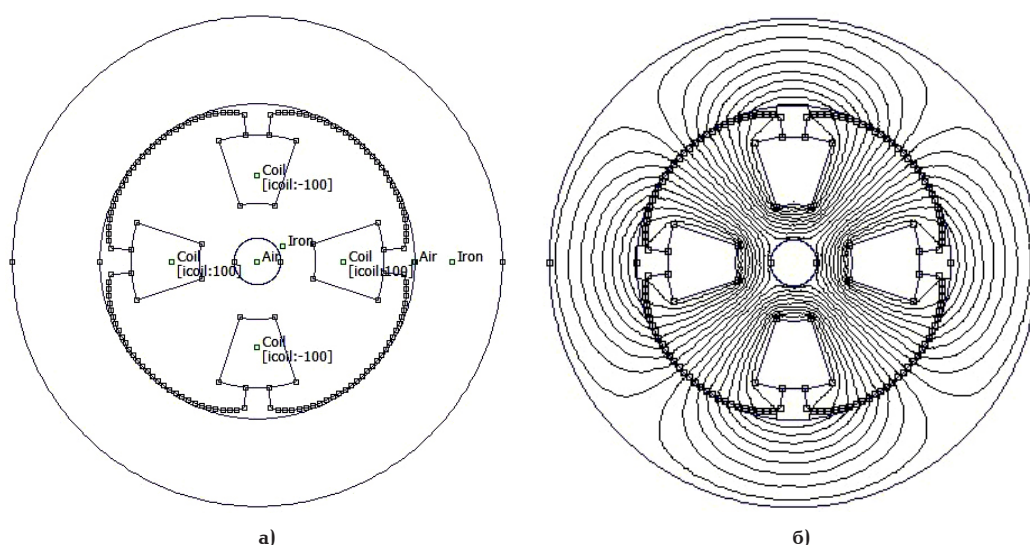


Рис. 6. Расчет магнитного поля четырехполюсной синхронной машины с оптимальным воздушным зазором: а — модель в FEMM; б — результат расчета

Fig. 6. Calculation of the magnetic field of a four-pole synchronous machine with an optimal air gap: а — FEMM model; б — calculation result

на комплексной плоскости Z определены оптимальный неравномерный воздушный зазор (рис. 2) и расстояние между полюсными наконечниками — 3,52 мм (коэффициент полюсной дуги — 0,884).

Необходимо отметить, что ось абсцисс на рис. 2 соответствует координатам мнимой оси комплексной плоскости Z , величина воздушного зазора у крайней части полюсного наконечника составляет 1,4 мм (точка z_{11} на рис. 1а), минимальный зазор (в середине полюсного наконечника) равен 0,26 мм (точка z_3 на рис. 1а). Для схемы магнитной цепи на плоскости W эти размеры воздушного зазора равны 3,33 и 0,35 мм соответственно.

На рис. 3а показана схема модели магнитной цепи прямоугольной формы с оптимальным воздушным зазором в программе FEMM [5]; на рис. 3б — результат расчета магнитного поля.

С использованием конформного отображения получена схема в виде сектора магнитной цепи синхронной машины на пару полюсов (рис. 4). Расчет магнитного поля для такой схемы выполнен также в программе FEMM.

На рис. 5 приведены кривые распределения нормальной составляющей магнитной индукции в воздушном зазоре машины при различных значениях МДС обмотки возбуждения на полюс $F_{об}$, а также показаны значения плотности тока в обмотке возбуждения $J_{об}$, рассчитанные при моделировании в FEMM.

Координаты по оси абсцисс на рис. 5 соответствуют значениям точек отрезка (дуги окружности) $z_{13} - z_{14}$ ($w_{13} - w_{14}$) (рис. 1).

При сравнении кривых магнитной индукции с одинаковыми заданными значениями МДС, которые рассчитаны методом конформных отображений (при преобразовании данных из комплексной плоскости Z на плоскость W) и с использованием FEMM (рис. 4), наибольшее значение относительной погрешности не превышает 0,82 %.

Для анализа кривой распределения магнитной индукции в воздушном зазоре выполнен расчет магнитного поля четырехполюсной синхронной машины с оптимальным воздушным зазором (рис. 6).

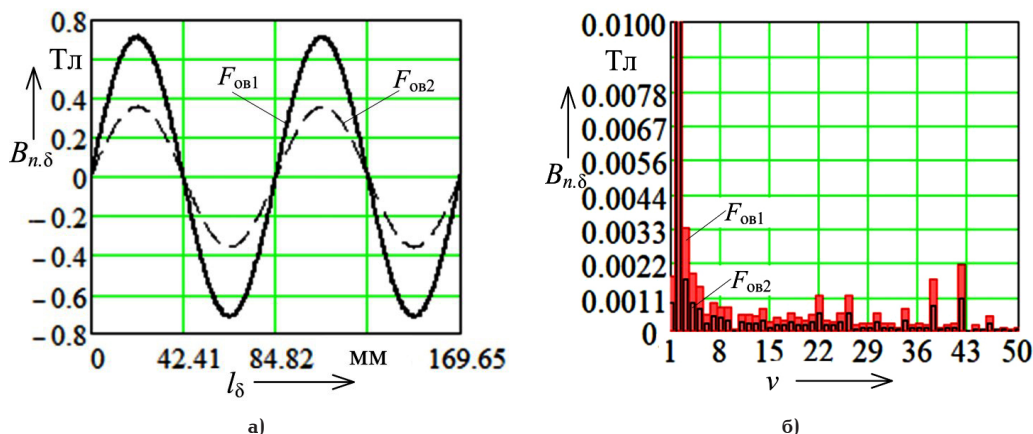


Рис. 7. Анализ кривой распределения нормальной составляющей магнитной индукции в воздушном зазоре: а — распределение магнитной индукции; б — разложение в ряд Фурье
Fig. 7. Analysis of the distribution curve of the normal component of magnetic induction in the air gap: а — magnetic induction distribution; б — Fourier series expansion

Распределение магнитной индукции вдоль окружности внутренней расточки сердечника статора и результаты разложения в ряд Фурье этой кривой для магнитной цепи машины (рис. 6) при разных значениях МДС обмотки возбуждения показаны на рис. 7.

Обсуждение полученных результатов

Как можно увидеть на рис. 5 и 7, при различных значениях МДС обмотки возбуждения магнитная индукция в воздушном зазоре синхронной машины (рис. 6) распределена по закону, близкому по форме к синусоидальному.

На рис. 7б значение наибольшей гармоники не превышает 0,5 % от значения основной гармоники. Амплитудное значение основной гармоники (вторая гармоника) при значениях МДС обмотки возбуждения на полюс 520 и 260 А равно 0,71 и 0,35 Тл соответственно. Наличие высших гармоник обусловлено конечным количеством отрезков прямых линий, на которые разделена кривая полюсного наконечника для оптимизации, а также использованием метода конечных элементов для решения полевой задачи.

Необходимо отметить, что у синхронных машин различного назначения по внутренней окружности статора обычно выполняются пазы для укладки статорной обмотки, что приводит к появлению зубцовых гармоник в кривой магнитной индукции [1, 2]. При этом существующие технические и технологические способы, используемые при проектировании и изготовлении таких электрических машин, позволяют значительно уменьшить зубцовые гармоники в электродвижущих силах, наводимых в обмотке статора.

Выводы

1. Предложен подход для определения оптимальной формы полюсных наконечников явнополюсной синхронной машины с электромагнитным возбуждением, при использовании которого можно обеспечить синусоидальное распределение магнитной индукции в воздушном зазоре машины.

2. При оптимизации формы полюсных наконечников для анализа магнитного поля магнитной цепи использованы методы конечных элементов и конформных отображений, для решения оптимизационной задачи — метод Пауэлла. Примене-

ние метода конформных отображений позволяет упростить анализ и оптимизацию магнитной цепи за счет перехода от сектора магнитной цепи на пару полюсов к магнитной цепи прямоугольной формы, для которой проще использовать метод конечных элементов и выполнять анализ распределения магнитной индукции в воздушном зазоре.

3. В качестве примера рассчитана оптимальная форма полюсных наконечников четырехполюсной синхронной машины, выполнен анализ спектрального состава нормальной составляющей распределения магнитной индукции в воздушном зазоре.

Список источников / References

1. Fan X., Youbin Z., Lin R. [et al.]. Study on Transient Reactive Power Characteristics of New-Generation Large Synchronous Condenser. *2018 China International Conference on Electricity Distribution (CICED)*. 2018. P. 1851–1855. DOI: 10.1109/CICED.2018.8592282.
2. Pyrhonen J., Jokinen T., Hrabovcova V. Design of rotating electrical machines. Wiltshire: Wiley and Sons, 2008. 531 p. ISBN 978-0-470-69516-6.
3. Misir O., Dobbert F., Ponick B. Analytical method for the air gap permeance calculation of salient pole synchronous machines. *Elektrotechnik und Informationstechnik*. 2016. Vol. 133. P. 103–111. DOI: 10.1007/s00502-016-0395-9.
4. Jansen K., Kern A., Mülder C., Hameyer K. Study of magnetic force excitations in salient pole synchronous generators considering geometrical modifications by conformal mapping. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*. 2022. Vol. 69 (2). P. 139–147. DOI: 10.3233/JAE-210183.
5. Finite element method magnetics. URL: <http://www.femm.info/> (accessed: 15.10.2025).
6. Майоров Ю. А. Синтез и применение конформных отображений для расчета электромагнитных полей: дис. ... канд. техн. наук. Санкт-Петербург, 1999. 140 с.
Maierov Yu. A. Sintez i primeneniye konformnykh otobrazheniy dlya rascheta elektromagnitnykh poley [Synthesis and application of conformal maps for calculating electromagnetic fields]. Saint Petersburg, 1999. 140 p. (In Russ.).
7. Афанасьев А. А., Ахметзянов Д. И. Аналитический расчет магнитного поля магнитоэлектрического двигателя на основе конформных и зеркальных отображений // *Электричество*. 2016. № 4. С. 41–48. EDN: WALPRT.
Afanasyev A. A., Akhmetzyanov D. I. Analiticheskii raschet magnitnogo polya magnitoelektricheskogo dvigatelya na osnove konformnykh i zerkal'nykh otobrazheniy [An analytic technique

for calculating the magnetic field of a magnetoelectric motor on the basis of conformal and mirror images]. *Elektrichestvo. Electricity*. 2016. No. 4. P. 41–48. EDN: WALPRT. (In Russ.).

8. Шевченко А. Ф., Шевченко Л. Г. Использование метода конформных преобразований для расчета магнитного поля в воздушном зазоре синхронного двигателя с модулированным магнитным потоком // *Электричество*. 2018. № 11. С. 38–44. DOI: 10.24160/0013-5380-2018-11-38-44. EDN: YMHWFV.

Shevchenko A. F., Shevchenko L. G. Ispol'zovaniye metoda konformnykh preobrazovaniy dlya rascheta magnitnogo polya v vozdushnom zazore sinkhronnogo dvigatelya s modulirovannym magnitnym potokom [Using the conformal mapping method for calculating the magnetic field in the air gap of a synchronous motor with modulated magnetic flux]. *Elektrichestvo. Electricity*. 2018. No. 11. P. 38–44. DOI: 10.24160/0013-5380-2018-11-38-44. EDN: YMHWFV. (In Russ.).

9. Аполлонский С. М. Моделирование и расчет электромагнитных полей в технических устройствах. Методы математической физики и их использование при моделировании электромагнитных полей: моногр. В 2 т. Москва: Русайнс, 2017. Т. 1. 342 с. ISBN 978-5-4365-1985-2.

Apollonskiy S. M. Modelirovaniye i raschet elektromagnitnykh poley v tekhnicheskikh ustroystvakh. Metody matematicheskoy fiziki i ikh ispol'zovaniye pri modelirovanii elektromagnitnykh poley: monogr. V 2 t. [Modeling and Calculation of of electromagnetic fields in technical devices. Mathematical Physics Methods and their application in electromagnetic field modeling. In 2 vols.]. Moscow, 2017. Vol. 1. 342 p. ISBN 978-5-4365-1985-2. (In Russ.).

10. Москалев Ю. В. Расчет магнитного поля синхронной машины с использованием метода конформных отображений // Сборник статей LXX Междунар. науч.-практ. конф. Москва: Научно-издательский центр «Актуальность.РФ», 2025. С. 83–87. ISBN 978-5-6054336-9-9. EDN: YQFPHA.

Moskalev Yu. V. Raschet magnitnogo polya sinkhronnoy mashiny s ispol'zovaniyem metoda konformnykh otobrazheniy [Calculation a synchronous machine magnetic field using the conformal mapping method]. *Sbornik statey LXX mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. Collected Papers of the LXX International Scientific-Practical Conference*. Moscow, 2025. P. 83–87. ISBN 978-5-6054336-9-9. EDN: YQFPHA. (In Russ.).

11. Аполлонский С. М., Горский А. Н. Расчеты электромагнитных полей: моногр. Москва: Маршрут, 2006. 992 с. ISBN 5-89035-379-9.

Apollonskiy S. M., Gorskiy A. N. Raschety elektromagnitnykh poley [Electromagnetic field calculations]. Moscow, 2006. 992 p. ISBN 5-89035-379-9. (In Russ.).

12. Arora R. Optimization. Algorithms and Applications. NewYork: CRC Press, 2015. 454 p. ISBN-10: 9781498721127, ISBN-13: 978-1-4987-2115-8.

13. Nocedal J., Wright S. Numerical Optimization. 2nd ed. New York: Springer, 2006. 664 p. ISBN-10: 0-387-30303-0, ISBN-13: 978-0387-30303-1.

14. Rao S. Engineering Optimization: theory and practice. 5th ed. New York: Wiley, 2020. 812 p. ISBN: 978-1-119-45479-3.

МОСКАЛЕВ Юрий Владимирович, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры «Электрические машины и общая электротехника» Омского государственного университета путей сообщения, г. Омск.

SPIN-код: 1422-1951

AuthorID (РИНЦ): 657144

ORCID: 0000-0002-0970-937X

AuthorID (SCOPUS): 57200088110

Адрес для переписки: yuriyvm@mail.ru

Прозрачность финансовой деятельности: автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.

Статья поступила в редакцию 21.10.2025; одобрена после рецензирования 28.11.2025; принята к публикации 02.12.2025.

MOSKALEV Yuriy Vladimirovich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Electrical Machines and General Electrical Engineering Department, Omsk State Transport University, Omsk.

SPIN-code: 1422-1951

AuthorID (RSCI): 657144

ORCID: 0000-0002-0970-937X

AuthorID (SCOPUS): 57200088110

Correspondence address: yuriyvm@mail.ru

Financial transparency: the author has no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.

The article was submitted 21.10.2025; approved after reviewing 28.11.2025; accepted for publication 02.12.2025.

МЕТОДИКА ПРОЕКТИРОВАНИЯ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ИСПЫТАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ГРУППИРОВКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

А. В. Бублик^{1,2}, С. Ю. Степанов^{1,2}, Д. И. Попов², А. Ю. Ткачев¹

¹ОАО «Научно-исследовательский институт технологии,
контроля и диагностики железнодорожного транспорта»,
Россия, 644005, г. Омск, ул. Избышева, д. 3, корп. 2

²Омский государственный университет путей сообщения,
Россия, 644046, г. Омск, пр. К. Маркса, 35

Для обеспечения процесса ремонта и производства асинхронных машин актуальной задачей является создание и разработка унифицированных испытательных систем. Предлагаемая в статье методика проектирования унифицированных испытательных систем позволит использовать эффективные и экономичные способы создания таких систем, позволяющих испытывать различные типы асинхронных машин со сходными техническими параметрами.

Существующие системы в своем большинстве проводят испытания асинхронных электрических машин только по опыту холостого хода и опыту короткого замыкания, исключая возможность проведения испытаний на нагревание при номинальной нагрузке, а также ограничиваясь проведением испытания только косвенными методами, что в неполной мере отражает качество изготовления или ремонта асинхронной машины. Оценка технического состояния асинхронной машины во время проведения испытаний представляет собой важную задачу, решение которой способствует повышению надежности, снижению аварийных ситуаций, сокращению потерь рабочего времени, связанных с внеплановыми ремонтами.

В настоящее время особое внимание уделяется процессам информационных технологий, применяемых при проведении ремонта электрических машин и формировании электронного паспорта электрической машины, развития цифровых систем контроля технологической и технической дисциплины для исключения влияния негативного человеческого фактора.

Объект исследования — комплекс электротехнического оборудования, разработанный для проведения экспериментальных исследований асинхронных машин. Предмет исследования — фундаментальные принципы конструирования, подходы к созданию математических моделей и механизмы управления этим комплексом, применяемые при тестировании асинхронных машин. Цель работы — предложить эффективную методику для создания универсальных электротехнических испытательных стендов, которая опирается на систематизацию асинхронных машин по их основным параметрам.

В статье приведено описание математической и имитационной моделей разработанной системы испытаний двух взаимно нагруженных асинхронных машин с учетом реакции упругого элемента, соединяющего их валы.

Ключевые слова: асинхронная машина, универсальная испытательная система, частотный преобразователь, синус-фильтр, согласующий трансформатор, опыт холостого хода, опыт короткого замыкания, метод взаимной нагрузки.

Для цитирования: Бублик А. В., Степанов С. Ю., Попов Д. И., Ткачев А. Ю. Методика проектирования универсальной испытательной системы на основе группировки электрических машин // Омский научный вестник. 2026. № 1 (197). С. 103–112. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-103-112. EDN: ARXIWI.



DESIGN METHODOLOGY OF THE UNIVERSAL TEST SYSTEM BASED ON GROUPING OF ELECTRIC MACHINES

A. V. Bublik^{1,2}, S. Yu. Stepanov^{1,2}, D. I. Popov², A. Yu. Tkachev¹

¹ Scientific Research Institute of Technology, Control and Diagnostics of Railway Transport,
Russia, Omsk, Izbyshcheva St., bld. 3/2, 644005

² Omsk State Transport University, Russia, Omsk, K. Marks Ave., 35, 644046

To ensure the repair and production of asynchronous machines, the creation and development of unified testing systems is an urgent task. The methodology proposed in the article for designing unified test systems allows using efficient and economical ways to create such systems that test various types of asynchronous machines with similar technical parameters.

The existing test systems for the most tests of asynchronous electric machines only based on idling and short-circuit experience, excluding the possibility of conducting heating tests at rated load, limiting testing to indirect methods only, which does not fully reflect the quality of manufacture or repair of asynchronous machines.

The assessment of the technical condition of an asynchronous machine during testing is an important task, the solution of which helps to increase reliability, reduce emergency situations, and reduce the loss of working time associated with unscheduled repairs.

Currently, special attention is being paid to the processes of information technology used in the repair of electric machines and the formation of an electronic passport of an electric machine, the development of digital control systems for technological and technical discipline to eliminate the influence of negative human factors.

The object of the study is an electrical system for testing asynchronous machines. The subject of the research is the principle of construction, modeling and control of an electrical system for testing asynchronous machines.

The article also describes mathematical and simulation models of the developed test system for two mutually loaded asynchronous machines, considering the reaction of the elastic element connecting their shafts.

Keywords: asynchronous machine, universal test system, frequency converter, sine filter, matching transformer, idling experience, short circuit experience, mutual load method.

For citation: Bublik A. V., Stepanov S. Yu., Popov D. I., Tkachev A. Yu. Design methodology of the universal test system based on grouping of electric machines. *Omsk Scientific Bulletin*. 2026. No. 1 (197). P. 103–112. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-103-112. EDN: ARXIWI.



© Bublik A. V., Stepanov S. Yu., Popov D. I., Tkachev A. Yu., 2026.
The content is available under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Введение

Государственная программа Российской Федерации «Развитие промышленности и повышение ее конкурентоспособности» определяет ряд ключевых направлений, включая развитие транспортного и специального машиностроения, укрепление производственной базы, системную поддержку отрасли и совершенствование технического регулирования. Одной из главных целей является обеспечение потребностей российского транспортного комплекса отечественной продукцией. В частности, к 2030 г. планируется, что 90 % продукции на внутреннем рынке в сфере железнодорожного машиностроения будет российского производства. Другая важная задача — развитие производств с высокой степенью локализации, основанных на передовых технологиях. Это должно привести к увеличению загрузки производственных мощностей предприятий специализированного машиностроения до 80–90 % к 2030 г., принимая во внимание ввод новых мощностей.

Следовательно, наблюдается повышенный интерес к приобретению передовых технологических решений для предприятий, специализирующихся

на производстве и обслуживании асинхронных электродвигателей, включая современное испытательное и производственное оборудование. В текущих условиях, когда происходит замещение импортной продукции, вопрос обеспечения предприятий, специализирующихся на производстве и ремонте асинхронных электродвигателей, передовым испытательным и технологическим оборудованием становится особенно значимым.

В сфере железнодорожного транспорта (включая электропоезда, тепловозы, электропоезда, а также подвижной состав метрополитена, трамваи и троллейбусы) и в промышленном производстве электрические машины выполняют не только роль тяговых приводов, но и служат вспомогательными агрегатами, необходимыми для обеспечения бесперебойной работы как транспортных средств, так и производственных процессов.

Основная часть

Методика проектирования унифицированных испытательных систем с учетом группировки асинхронных машин (АМ) по основным параметрам

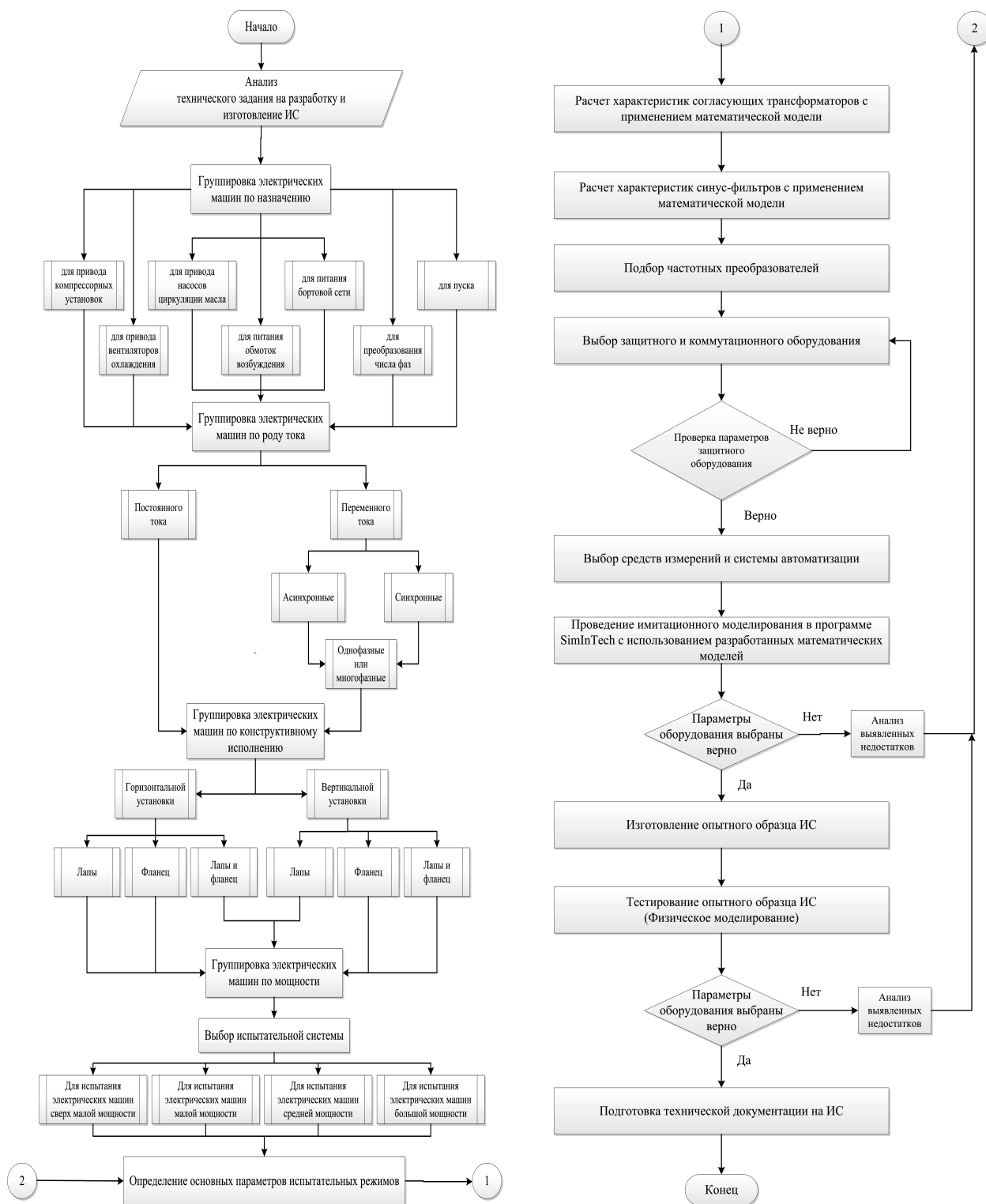


Рис. 1. Алгоритм проектирования универсальной испытательной системы на основе группировки электрических машин
Fig. 1. Algorithm for designing the universal test system based on the grouping of electrical machines

(назначение, род тока, конструктивное исполнение, мощность) позволяет применять эффективные и экономичные способы создания универсальных испытательных систем, позволяющих испытывать различные типы АМ со сходными техническими параметрами. Унификация испытательных систем обеспечивает значительное преимущество в виде оптимизации затрат, избавляя от необходимости приобретения множества единиц специализированного испытательного оборудования для каждого типа электрических машин. Предлагаемая методика проектирования позволяет придерживаться кон-

структивной преемственности универсальных испытательных систем. При определении основных параметров испытательной системы необходимо учитывать конкретные условия её применения.

Последовательность действий при проектировании универсальной испытательной системы приведена на рис. 1.

На первом этапе проектирования АМ группируются по техническим характеристикам и назначению (подробное описание принципа группировки предложено в раннее опубликованной статье «Вспомогательные электрические машины электро-

подвижного состава и их классификация», авторы В. В. Бублик, А. В. Бублик) [1, 2].

Цель группировки — приведение различных видов АМ, используемых на электроподвижном составе, и общепромышленных АМ к рациональному минимуму типоразмеров, марок, форм и т. п.

Предлагается новая система классификации электрических машин, используемых в железнодорожном транспорте и промышленности. В отличие от существующих подходов, которые ограничиваются назначением и типом тока, новая классификация включает следующие ключевые параметры:

- назначение — определяет основную функцию машины;
- тип тока — указывает на вид электрического тока, с которым работает машина;
- конструктивное исполнение — описывает особенности конструкции машины;
- мощность — характеризует производительность машины.

Классификация по назначению включает следующие категории электрических машин:

1. Привод вспомогательного оборудования:
 - для компрессорных установок (мотор-компрессоры);
 - для вентиляторов охлаждения (мотор-вентиляторы);
 - для насосов циркуляции масла (масло-насосы);
 - для вентиляторов систем отопления, кондиционирования и пылеулавливания.
2. Электропитание и управление:
 - для возбуждения обмоток (возбудители и подвозбудители);
 - для питания бортовой сети (генераторы цепей управления);
 - для систем кондиционирования;
 - для синхронизации электронного оборудования с напряжением контактной сети.
3. Специальные функции:
 - для изменения числа фаз (фазорасщепители);
 - для запуска двигателей (стартеры и стартер-генераторы).

4. Классификация по типу тока:

- коллекторные машины: работающие как на постоянном, так и на переменном токе;
- бесколлекторные машины, включая асинхронные и синхронные типы.

5. Электрические машины (АМ) по номинальной мощности:

- сверхмалая мощность: от 0,04 до 0,5 кВт;
- малая мощность: от 0,5 до 4 кВт;
- средняя мощность: от 4 до 25 кВт;
- большая мощность: от 25 до 100 кВт.

6. По способу подключения электрических машин (АМ) к источнику питания:

- прямое подключение к контактной сети;
- подключение через преобразователь собственных нужд, питающийся от контактной сети;
- подключение через обмотку собственных нужд тягового трансформатора и фазорасщепитель, питающихся от контактной сети;
- подключение от обмотки тягового генератора или генератора цепей управления.

Второй этап проектирования заключается в определении характеристики испытательных режимов и выбора испытательной системы [3–6]:

- для испытания электрических машин сверхмалой мощности;

Таблица 1. Характеристики АМ типа НВА-55 и параметры испытательных режимов
Table 1. Features of HVA-55 type of the asynchronous machines and parameters of testing modes

Наименование параметра		Единицы измерений	Значение параметра
Мощность номинальная		кВт	55
Напряжение номинальное		В	380
Ток номинальный		А	120
Коэффициент мощности			0,82
КПД		%	90,2
Частота питающей сети		Гц	50
Частота вращения		об/мин	1500
Сопротивление изоляции	статор	МОм	20
	ротор		
Омическое сопротивление обмоток при +20 °С	статор	Ом	0,032 – 0,037
Режим холостого хода	напряжение	В	380
	ток	А	70
	частота вращения	об/мин	1500
Режим короткого замыкания	напряжение	В	100
	ток	А	120
Испытание на нагревание	время	мин	60
	напряжение	В	380
	ток	А	120
	частота вращения	об/мин	1500
Испытание электрической прочности межвитковой изоляции якоря	напряжение	В	570
	ток, не более	А	120
	время	мин	5

- для испытания электрических машин малой мощности;
- для испытания электрических машин средней мощности;
- для испытания электрических машин большой мощности.

Все асинхронные машины подвергаются проверкам в следующих основных рабочих условиях:

1. Проверка без нагрузки: проводится для определения рабочих параметров машины при отсутствии нагрузки. В ходе этой проверки фиксируются:

- направление вращения;
- сила тока, потребляемая статором;
- энергетические потери;
- коэффициент мощности.

Все эти параметры измеряются при стандартных значениях напряжения и частоты.

2. Проверка в режиме короткого замыкания: оцениваются следующие показатели при номинальной частоте и пониженном напряжении, которое обеспечивает ток статора, равный номинальному или незначительно превышающий его (до 10 %):

- величина тока статора;
- соответствующие потери энергии.

3. Испытание на тепловую устойчивость: проводится при номинальных значениях тока и напряжения. Для оптимизации энергопотребления при проведении этого испытания может применяться метод взаимной нагрузки.

4. Испытание под нагрузкой в режиме короткого замыкания. Данный тест имитирует условия запуска асинхронных двигателей в холодном состоянии при заблокированном роторе. Питание подается от сбалансированной трехфазной сети.

5. Проверка устойчивости к пусковым перегрузкам по току: определяется способность асинхронной машины выдерживать кратковременные пиковые значения тока, возникающие при пуске.

6. Испытание изоляции между витками обмоток: проверяется надежность изоляционного материала, разделяющего соседние витки обмотки асинхронной машины. Изоляция должна выдерживать воздействие повышенного напряжения (на 50 % выше номинального) в течение 5 мин. при работе машины без нагрузки.

В качестве примера приведены характеристики испытательных режимов для асинхронного двигателя НВА-55 (табл. 1).

Универсальная испытательная система, находящаяся на стадии проектирования, будет включать в себя ключевые узлы: два преобразователя частоты для регулирования скорости; синус-фильтры для сглаживания формы сигнала; согласующие трансформаторы с отдельными вторичными обмотками для гибкости подключения; аппаратуру для коммутации и защиты; датчики для измерения напряжения и тока; ваттметры для контроля мощности; специальное устройство для механического соединения валов испытываемых машин. Определение точных характеристик этих элементов будет выполнено на третьем этапе разработки.

Третий этап включает в себя расчет технических характеристик оборудования (согласующие

трансформаторы, синус-фильтры, преобразователи частоты) с применением соответствующих математических моделей.

Математическая модель испытательной системы с применением метода взаимной нагрузки содержит уравнения, описывающие работу отдельных элементов схемы. Математическая модель трехфазного синус-фильтра, используемая в расчетах, представлена в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{U}_H = \frac{Z_o}{Z_1 + Z_o} \dot{U}_H \\ Z_o = \frac{Z_2 Z_H}{Z_2 + Z_H} \\ \frac{U_H}{U_H}(p) = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\delta}{\omega_0} p + 1} \\ \frac{U_H}{U_H}(p) = \frac{R_2 C_1 p + 1}{L_1 C_1 p^2 + \left(R_1 C_1 + R_2 C_1 + \frac{L_1}{R_H} \right) p + 1} \\ \omega_0^2 = \frac{1}{L_1 C_1} \\ \frac{2\delta}{\omega_0} = R_1 C_1 + R_2 C_1 + \frac{L_1}{R_H} \\ \delta = \frac{1}{2\sqrt{L_1 C_1}} \left(R_1 C_1 + R_2 C_1 + \frac{L_1}{R_H} \right) \end{cases} \quad (1)$$

Модель согласующего силового трансформатора с расщепленной вторичной обмоткой для формирования заданного уровня напряжения основывается на классической Т-образной схеме замещения, дублированной для каждой из фаз трансформатора. Система уравнений для указанной схемы замещения будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} U_A - i_a R_{a1} = L_{a1} \frac{di_a}{dt} + M_{AB} \frac{di_b}{dt} + M_{AC} \frac{di_c}{dt} + W \cdot S \cdot \left(\frac{dB_{A1}}{dt} + \frac{dB_{A2}}{dt} + \frac{dB_{A3}}{dt} \right) \\ U_B - i_b R_{b1} = L_{b1} \frac{di_b}{dt} + M_{AB} \frac{di_a}{dt} + M_{BC} \frac{di_c}{dt} + W \cdot S \cdot \left(\frac{dB_{B1}}{dt} + \frac{dB_{B2}}{dt} + \frac{dB_{B3}}{dt} \right) \\ U_C - i_c R_{c1} = L_{c1} \frac{di_c}{dt} + M_{AC} \frac{di_a}{dt} + M_{BC} \frac{di_b}{dt} + W \cdot S \cdot \left(\frac{dB_{C1}}{dt} + \frac{dB_{C2}}{dt} + \frac{dB_{C3}}{dt} \right) \\ 3i_{d1} R_{d1} = -W_{d1} \cdot S \cdot \left(\frac{dB_{A1}}{dt} + \frac{dB_{B1}}{dt} + \frac{dB_{C1}}{dt} \right) - 3L_{d1} \frac{di_{d1}}{dt} \\ 3i_{d2} R_{d2} = -W_{d2} \cdot S \cdot \left(\frac{dB_{A2}}{dt} + \frac{dB_{B2}}{dt} + \frac{dB_{C2}}{dt} \right) - 3L_{d2} \frac{di_{d2}}{dt} \\ 3i_{d3} R_{d3} = -W_{d3} \cdot S \cdot \left(\frac{dB_{A3}}{dt} + \frac{dB_{B3}}{dt} + \frac{dB_{C3}}{dt} \right) - 3L_{d3} \frac{di_{d3}}{dt} \\ i_n = i_a + i_b + i_c \end{cases} \quad (2)$$

Структура математического описания преобразователя частоты базируется на совокупности математических моделей его составляющих компонентов, а именно неуправляемого трехфазного мостового выпрямителя, емкостного фильтра и ав-

тономного инвертора. Работу неуправляемого трехфазного выпрямителя в звене постоянного тока преобразователя частоты можно описать в следующей модели:

$$\begin{cases} U_d = \frac{3}{\pi} \left(\int_{-\pi/6}^{+\pi/6} E_{M2A} \cos \omega t d\omega t - \int_0^{\arccos \left(1 - \frac{2I_d \omega \frac{L_c + L_s}{K_T^2}}{\sqrt{6} E_{M2A}} \right)} \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} \sin \omega t d\omega t \right) \\ U_{bmax} = \int_{-\pi/6}^{+\pi/6} E_{M2A} \cos \omega t d\omega t \\ I_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} I_d^2 \omega t} \end{cases} \quad (3)$$

где L_c — индуктивность сети; L_s — индуктивность источника; K_T — коэффициент трансформации; E_{M2A} — амплитудное значение линейного напряжения источника ЭДС; I_2 — эффективное значение тока источника ЭДС; U_{bmax} — обратное напряжение, приложенное к диоду; U_d — среднее значение выпрямленного напряжения за период.

Математическая модель емкостного фильтра, являющегося в преобразователе частоты звеном по-

стоянного тока, описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} U_d = \frac{3}{\pi} \left(\int_{-\pi/6}^{+\pi/6} E_{M2A} \cos \omega t d\omega t - \int_0^{\arccos \left(1 - \frac{2I_d \omega \frac{L_c + L_s}{K_T^2}}{\sqrt{6} E_{M2A}} \right)} \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} \sin \omega t d\omega t \right) \\ \frac{dU_c}{dt} = \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{U_d - U_c}{R_{внутр.}} \right) - \frac{U_c}{C \cdot R_n} \\ C = \frac{1}{4\pi f_c k_n R_n} \end{cases} \quad (4)$$

где f_c — частота питающей сети, Гц; k_n — коэффициент пульсации напряжения на выходе фильтра; R_n — сопротивление нагрузки, Ом.

Математическая модель автономного трехфазного мостового инвертора напряжения с широтно-импульсной модуляцией имеет следующий вид:

$$\begin{cases} U_A = \frac{\frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi/6}^{+\pi/6} E_{M2A} \cos \omega t d\omega t - \int_0^{\arccos \left(1 - \frac{2I_d \omega \frac{L_c + L_s}{K_T^2}}{\sqrt{6} E_{M2A}} \right)} \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} \sin \omega t d\omega t \right) R_n - \frac{R_{внутр.}}{4\pi f_c k_n} \frac{dU_c}{dt}}{R_n - R_{внутр.}} \times \\ \times f_{1VT1} \cdot (2f_{2VT2}f_{1VT3} - f_{2VT2}f_{2VT3} - f_{2VT3}f_{1VT2}); \\ U_B = \frac{\frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi/6}^{+\pi/6} E_{M2A} \cos \omega t d\omega t - \int_0^{\arccos \left(1 - \frac{2I_d \omega \frac{L_c + L_s}{K_T^2}}{\sqrt{6} E_{M2A}} \right)} \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} \sin \omega t d\omega t \right) R_n - \frac{R_{внутр.}}{4\pi f_c k_n} \frac{dU_c}{dt}}{R_n - R_{внутр.}} \times \\ \times f_{1VT1} \cdot (-f_{2VT2}f_{1VT3} + 2f_{2VT2}f_{2VT3} - f_{2VT3}f_{1VT2}); \\ U_C = \frac{\frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi/6}^{+\pi/6} E_{M2A} \cos \omega t d\omega t - \int_0^{\arccos \left(1 - \frac{2I_d \omega \frac{L_c + L_s}{K_T^2}}{\sqrt{6} E_{M2A}} \right)} \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} \sin \omega t d\omega t \right) R_n - \frac{R_{внутр.}}{4\pi f_c k_n} \frac{dU_c}{dt}}{R_n - R_{внутр.}} \times \\ \times f_{1VT1} (-f_{2VT2}f_{1VT3} - f_{2VT2}f_{2VT3} + 2f_{2VT3}f_{1VT2}). \end{cases} \quad (5)$$

Задающие сигналы u_{1a} , u_{1b} , u_{1c} , приходящие на входы нуль-органов, представляют собой трехфазную систему синусоидальных напряжений, сдвинутых относительно друг друга на 120° и частотой ω .

$$\begin{cases} u_{1a} = U_{A1} \sin \omega t \\ u_{1b} = U_{B1} \sin \left(\omega t - \frac{2}{3}\pi \right) \\ u_{1c} = U_{C1} \sin \left(\omega t - \frac{4}{3}\pi \right) \end{cases} \quad (6)$$

Алгоритм модуляции управляющих сигналов на выходе формирователей можно построить на основе следующих уравнений:

$$\begin{cases} u_{1a} > u_{onp} \Rightarrow f_{1VT1} = 1, f_{2VT1} = 0 \\ u_{1a} < u_{onp} \Rightarrow f_{1VT1} = 0, f_{2VT1} = 1 \\ u_{1b} > u_{onp} \Rightarrow f_{1VT2} = 1, f_{2VT2} = 0 \\ u_{1b} < u_{onp} \Rightarrow f_{1VT2} = 0, f_{2VT2} = 1 \\ u_{1c} > u_{onp} \Rightarrow f_{1VT3} = 1, f_{2VT3} = 0 \\ u_{1c} < u_{onp} \Rightarrow f_{1VT3} = 0, f_{2VT3} = 1 \\ f_{1VT1} = 1 - f_{2VT1} \\ f_{2VT1} = 1 - f_{1VT1} \\ f_{1VT2} = 1 - f_{2VT2} \\ f_{2VT2} = 1 - f_{1VT2} \\ f_{1VT3} = 1 - f_{2VT3} \\ f_{2VT3} = 1 - f_{1VT3} \end{cases} \quad (7)$$

Для построения имитационной модели, состоящей из двух асинхронных электрических машин, имеющих механическую связь между валами, воспользуемся математической моделью:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{di_{1a}^1}{dt} &= \frac{1}{\sigma L_1} (u_{1a}^1 - i_{1a}^1 \cdot R_1^1 + k_r \cdot e_a^r) \\ \frac{di_{1b}^1}{dt} &= \frac{1}{\sigma L_1} (u_{1b}^1 - i_{1b}^1 \cdot R_1^1 + k_r \cdot e_b^r) \\ \frac{di_{1c}^1}{dt} &= \frac{1}{\sigma L_1} (u_{1c}^1 - i_{1c}^1 \cdot R_1^1 + k_r \cdot e_c^r) \\ \frac{di_{2a}^r}{dt} &= -\frac{1}{\sigma L_2} (k_s (u_{1a}^1 - i_{1a}^1 \cdot R_1^1) + e_a^r) \\ \frac{di_{2b}^r}{dt} &= -\frac{1}{\sigma L_2} (k_s (u_{1b}^1 - i_{1b}^1 \cdot R_1^1) + e_b^r) \\ \frac{di_{2c}^r}{dt} &= -\frac{1}{\sigma L_2} (k_s (u_{1c}^1 - i_{1c}^1 \cdot R_1^1) + e_c^r) \\ \frac{di_{1a}^2}{dt} &= \frac{1}{\sigma L_1} (u_{1a}^2 - i_{1a}^2 \cdot R_1^2 + k_r \cdot e_a^r) \\ \frac{di_{1b}^2}{dt} &= \frac{1}{\sigma L_1} (u_{1b}^2 - i_{1b}^2 \cdot R_1^2 + k_r \cdot e_b^r) \\ \frac{di_{1c}^2}{dt} &= \frac{1}{\sigma L_1} (u_{1c}^2 - i_{1c}^2 \cdot R_1^2 + k_r \cdot e_c^r) \\ \frac{di_{2a}^r}{dt} &= -\frac{1}{\sigma L_2} (k_s (u_{1a}^2 - i_{1a}^2 \cdot R_1^2) + e_a^r) \\ \frac{di_{2b}^r}{dt} &= -\frac{1}{\sigma L_2} (k_s (u_{1b}^2 - i_{1b}^2 \cdot R_1^2) + e_b^r) \\ \frac{di_{2c}^r}{dt} &= -\frac{1}{\sigma L_2} (k_s (u_{1c}^2 - i_{1c}^2 \cdot R_1^2) + e_c^r) \\ \frac{d\omega_1}{dt} &= \frac{1}{J} (M - c \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) - M_{c1}) \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= \frac{1}{J} (c \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) - M_{c2}). \end{aligned} \right.$$

где $i_{1a}^1, i_{1b}^1, i_{1c}^1$ — токи соответствующих фаз статора; $u_{1a}^1, u_{1b}^1, u_{1c}^1$ — напряжения соответствующих фаз статора; R_1^1 — активное сопротивление фазы статора; J — момент инерции двигателя; M_c — момент сопротивления на валу; σ — коэффициент, учиты-

вающий индуктивности фазных обмоток статора и ротора; L_1 — индуктивность фазы обмотки статора; k_r, k_s — коэффициенты магнитной связи ротора и статора соответственно; e_a^r, e_b^r, e_c^r — ЭДС, приведенные к статору, индуцируемые потокоцеплением ротора; $i_{2a}^r, i_{2b}^r, i_{2c}^r$ — приведенные к статору токи ротора; ω_1, ω_2 — скорость вращения ротора; M — электромагнитный момент двигателя; c — жесткость упругого элемента; φ_1, φ_2 — деформация упругого элемента.

Полученные в результате расчетов данные о технических характеристиках оборудования проверяются с помощью имитационного моделирования в среде SimInTech [7–10].

С помощью мощной программной среды для имитационного моделирования SimInTech можно успешно воспроизвести работу испытательного стенда для асинхронных электрических машин (АЭМ). SimInTech открывает возможности для построения цифровых моделей систем на базе их математических описаний и детального анализа их функционирования в виртуальной среде. Результаты указанного моделирования позволяют проводить комплексные исследования режимов испытаний АЭМ, включая методы холостого хода, короткого замыкания и взаимной нагрузки, а также эффективно обнаруживать ошибки в проектировании и совершенствовать алгоритмы управления. Структура имитационной модели представлена на рис. 2.

Имитационное моделирование технологического процесса испытаний позволило выявить закономерности изменения частоты вращения, момента и тока фазы АМ. Визуализация этих зависимостей представлена графически на рис. 3.

Если результаты имитационного моделирования считаются удовлетворительными, и не требуется внесение корректировок в параметры оборудования, то можно переходить к четвертому этапу — изготовлению опытного образца и физическому моделированию [11–14]. После четвертого этапа производится сравнение результатов моделирования и при необходимости вносятся корректировки в параметры оборудования.

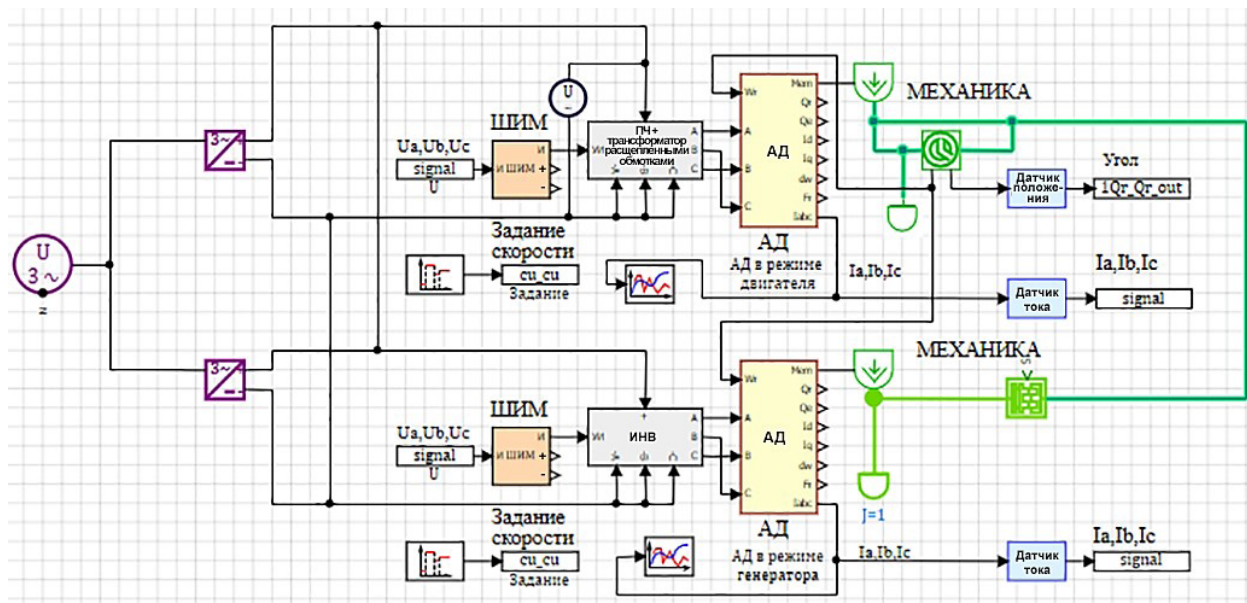


Рис. 2. Имитационная модель стенда испытания АМ
Fig. 2. Simulation model of the asynchronous machines testing bench

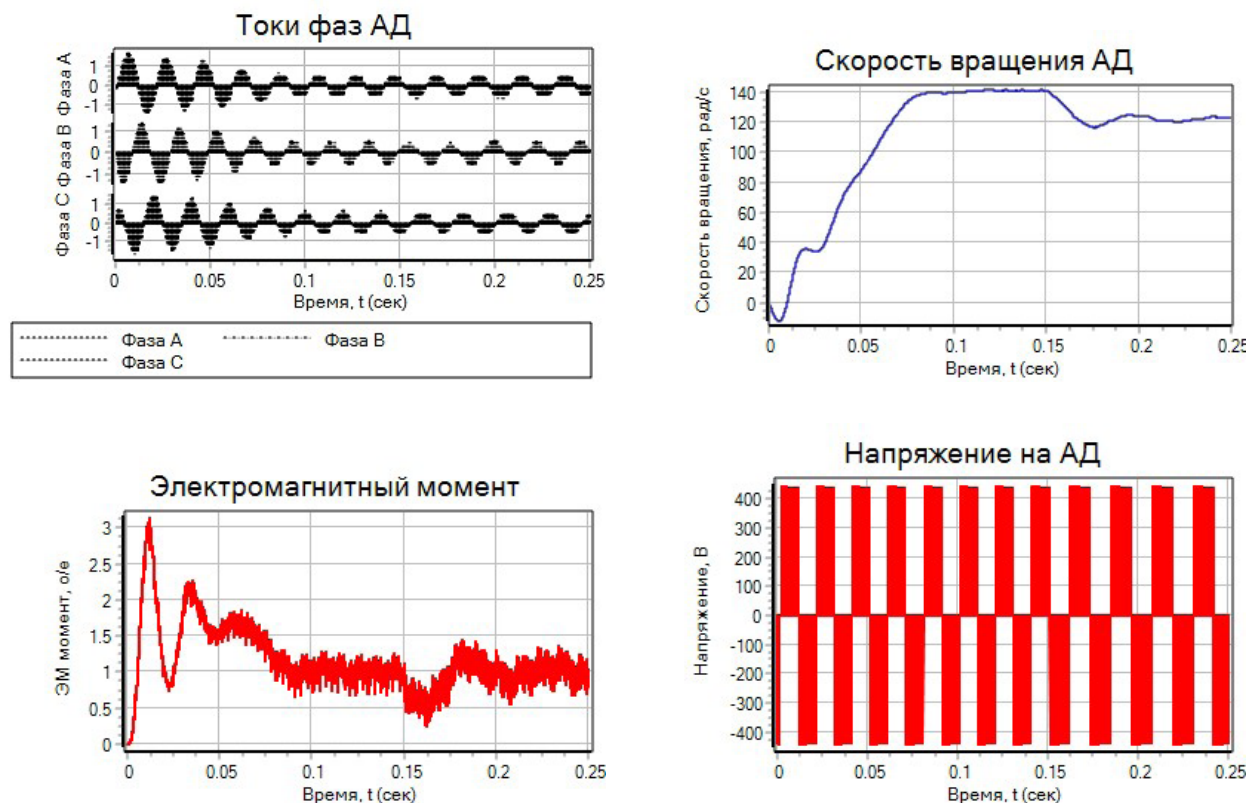


Рис. 3. Осциллограммы токов и напряжений, момента, частоты вращения системы, состоящей из двух асинхронных электрических машин, имеющих механическую связь между валами
Fig. 3. Oscillograms of currents and voltages, torque, rotational speed of the system consisting of two asynchronous electric machines with mechanical coupling between the shafts

Важно подчеркнуть, что принцип минимизации необходимого оборудования при испытаниях АМ дает ряд преимуществ:

- сокращение подготовительных работ. Объем подготовительных мероприятий значительно уменьшается;
- повышение автоматизации. Уровень автоматизации возрастает благодаря учету серийности производства и группировке по основным параметрам;
- снижение затрат на ремонт. Уменьшается номенклатура запасных частей, что удешевляет ремонт машин;
- оптимизация подбора оборудования. Упрощается процесс подбора необходимого испытательного оборудования;
- улучшение технико-экономических показателей. В целом, это способствует улучшению основных технико-экономических показателей предприятий, занимающихся изготовлением и ремонтом АМ.

Заключение

Приведенная в статье имитационная модель стенда испытания АМ позволяет определять основные параметры оборудования электротехнической системы, путем задания в нее параметров испытуемых АМ и дальнейшего анализа результатов моделирования (силы токов на участках схемы).

Разработанная методика включает: предложенный способ группировки АМ по основным параметрам; применение технического решения для универсальной электротехнической системы проведения приемо-сдаточных испытаний АМ с применением метода взаимной нагрузки; математическую

и имитационную модели, позволяющие определить необходимые параметры оборудования.

Описанная в статье методика проектирования универсальных испытательных систем была применена при создании стенда испытания АМ в филиале АО Желдорремаш «Челябинский электровагоноремонтный завод», филиале АО Желдорремаш «Ростовский электровагоноремонтный завод», ОАО «Новочеркасский электровагоностроительный завод», АО «ВЭНИИ».

Список источников / References

1. Бублик А. В., Бублик В. В. Вспомогательные электрические машины электроподвижного состава и их классификация // Оригинальные исследования. 2021. Т. 11, № 5. С. 104–111. EDN: UBXR PQ.
- Bublik V. V., Bublik A. V. Vspomogatel'nyye elektricheskiye mashiny elektropodvizhnogo sostava i ikh klassifikatsiya [Auxiliary electric machines of electric rolling stock and their classification]. *Original'nyye Issledovaniya*. 2021. Vol. 11, no. 5. P. 104–111. EDN: UBXR PQ. (In Russ.).
2. Бублик А. В., Бублик В. В., Гателюк О. В., Есин Н. В. Вопросы проектирования испытательных стендов электрических машин подвижного состава // Эксплуатационная надежность локомотивного парка и повышение эффективности тяги поездов: материалы VII Всерос. науч.-техн. конф. с междунар. уч. Омск: Изд-во ОмГУПС, 2022. С. 58–66. EDN: SOIGQQ.
- Bublik A. V., Bublik V. V., Gatelyuk O. V., Esin N. V. Voprosy proyektirovaniya ispytatel'nykh stendov elektricheskikh mashin podvizhnogo sostava [Design issues for testing stands for electric rolling stock machines]. *Ekspluatatsionnaya Nadezhnost' Lokomotivnogo Parka i Povysheniye Effektivnosti Tyagi Poyezdov*. Omsk, 2022. P. 58–66. EDN: SOIGQQ. (In Russ.).

3. Фешин А. О. Математическое моделирование вращающихся машин в фазных координатах и исследование процессов в электроэнергетических системах с их применением: дис. ... канд. техн. наук. Санкт-Петербург, 2024. 156 с.
- Feshin A. O. Matematicheskoye modelirovaniye vrashchayushchikhsya mashin v faznykh koordinatakh i issledovaniye protsessov v elektroenergeticheskikh sistemakh s ikh primeneniym [Mathematical modeling of rotating machines in phase coordinates and the study of processes in electric power systems using them]. Saint Petersburg, 2024. 156 p. (In Russ.).
4. Кавалеров Б. В., Кошелев В. В. Математическое моделирование динамики электрических машин в фазных осях // Вестник ПНИПУ. Электротехника, информационные технологии, системы управления. 2019. № 31. С. 72–90. EDN: AGQDNP.
- Kavalerov B. V., Koshelev V. V. Matematicheskoye modelirovaniye dinamiki elektricheskikh mashin v faznykh osyakh [Mathematical modelling of dynamics of electrical machines in-phase axes]. Vestnik PNIPU. Elektrotehnika, informatsionnyye tekhnologii, sistemy upravleniya. PNRPU Bulletin. Electrical Engineering, Information Technology, Control Systems. 2019. No. 31. P. 72–90. EDN: AGQDNP. (In Russ.).
5. Казаков Ю. Б., Палилов И. А., Гуляев И. В. Анализ электромеханических процессов в асинхронных машинах при испытаниях методом взаимной нагрузки с рекуперацией энергии в сеть // Электротехника. 2020. № 1. С. 2–8. EDN: KSYGTR.
- Kazakov Yu. B., Palilov I. A., Gulyayev I. V. Analiz elektromekhanicheskikh protsessov v asinkhronnykh mashinakh pri ispytaniyakh metodom vzaimnoy nagruzki s rekuperatsiyey energii v set' [Analysis of electromechanical processes in asynchronous machines during tests by the loading-back method with energy recovery in the network]. Elektrotehnika. 2020. No. 1. P. 2–8. EDN: KSYGTR. (In Russ.).
6. Буньков Д. С., Глазырин А. С., Боловин Е. В. [и др.]. Исследование асинхронной электрической машины с короткозамкнутым ротором для возобновляемой энергетики при нестационарном конденсаторном возбуждении // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2020. № 12. С. 187–199. DOI: 10.18799/24131830/2020/12/2952. EDN: WAAJYH.
- Bunkov D. S., Glazyrin A. S., Bolovin E. V. [et al.]. Issledovaniye asinkhronnoy elektricheskoy mashiny s korotkozamknutym rotorom dlya vozobnovlyayemoy energetiki pri nestatsionarnom kondensatornom возбуждении [Research of a squirrel-cage induction generator for renewable energy with non-stationary capacitor excitation]. Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring georesurov. Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering. 2020. No. 12. P. 187–199. DOI: 10.18799/24131830/2020/12/2952. EDN: WAAJYH. (In Russ.).
7. Пугачев А. А., Воробьев В. И., Космодоманский А. С. Система управления тяговым асинхронным двигателем с минимизацией мощности потерь // Вестник Брянского государственного технического университета. 2015. № 2 (46). С. 55. EDN: UJJZMT.
- Pugachev A. A., Vorob'yev V. I., Kosmodomianskiy A. S. Sistema upravleniya tyagovym asinkhronnym dvigatelem s minimizatsiyey moshchnosti poter' [Control system of tractive induction motor with power loss minimization]. Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Bulletin of Bryansk State Technical University. 2015. No. 2 (46). P. 55. EDN: UJJZMT. (In Russ.).
8. Среда динамического моделирования технических систем SimInTech: программа для ЭВМ. Москва: ФИПС, 2010. № 2010617758 от 23.11.2010.
- Sreda dinamicheskogo modelirovaniya tekhnicheskikh sistem SimInTech: programma dlya EVM [SimInTech dynamic modeling environment for technical systems: computer program]. Moscow, 2010. No. 2010617758. (In Russ.).
9. Малышков Г. М., Крючков В. В., Соловьев И. Н. [и др.]. Выбор параметров фильтров инверторов — ЭТВА // Электронная техника в автоматике / под ред. Ю. И. Конева. Москва: Радио и связь, 1986. Вып. 17. С. 148–168.
- Malyshkov G. M., Kryuchkov V. V., Solov'yev I. N. [et al.]. Vybory parametrov fil'trov invertorov — ETVA [Selecting inverter filter parameters — ETVA]. Elektronnaya Tekhnika v Avtomatike / ed. by Yu. I. Konev. Moscow, 1986. Issue 17. P. 148–168. (In Russ.).
10. Калачев Ю. Н. Simintech. Моделирование в электроприводе. Инструкция по пониманию. Москва: ДМК Пресс, 2019. 106 с. ISBN 978-5-93700-102-3.
- Kalachev Yu. N. Simintech. Modelirovaniye v elektroprivoде. Instruksiya po ponimaniyu [Modeling in electric drive. Instructions for understanding]. Moscow, 2019. 106 p. ISBN 978-5-93700-102-3. (In Russ.).
11. Пат. № 80018 Российская Федерация, МПК G01R 31/04. Устройство для испытания асинхронных тяговых электродвигателей / Рапопорт О. Л., Цукублин А. Б., Бейерлейн Е. В. № 2008115647/22; заявл. 21.04.2008; опубл. 20.01.2009. Patent No. 80018 Russian Federation, IPC G01R 31/04. Ustroystvo dlya ispytaniya asinkhronnykh tyagovykh elektrodvigatelay [Device for testing asynchronous tracing electric motors] / Rapoport O. L., Tsukublin A. B., Beyerleyn E. V. No. 2008115647/22. (In Russ.).
12. Сазонов А. С., Лебедев Д. Ю. Расчет и выбор параметров синусных фильтров частотно-регулируемых приводов с ШИМ-инвертором напряжения // Промышленная энергетика. 2012. № 2. С. 18–22. EDN: PGPWTR.
- Sazonov A. S., Lebedev D. Yu. Raschet i vybor parametrov sinusnykh fil'trov chastotno-reguliruyemykh privodov s SHIM-invertorom napryazheniya [Calculation and selection of sinusoidal filter parameters for variable frequency drives with a PWM voltage inverter]. Promyshlennaya energetika. Industrial Power Engineering. 2012. No. 2. P. 18–22. EDN: PGPWTR. (In Russ.).
13. Калачев Ю. Н., Самохвалов Д. В. Основы регулируемого электропривода. Москва: ДМК Пресс, 2022. 236 с. ISBN 978-5-93700-210-5.
- Kalachev Yu. N., Samokhvalov D. V. Osnovy reguliruyemogo elektroprivoda [Fundamentals of a variable electric drive. Anti-textbook.]. Moscow, 2022. 236 p. ISBN 978-5-93700-210-5. (In Russ.).
14. Ваттметры, варметры и ваттварметры цифровые щитовые серии 3021. Руководство по эксплуатации ОИУСН.140.012 РЭ. Краснодар: ООО предприятие «ЗИП-Научприбор», 2022. 44 с.
- Vattmetry, varmetry i vattvarmetry tsifrovyye shchitovyye serii 3021. Rukovodstvo po ekspluatatsii OIUSN.140.012 RE [Wattmeters, varmeters, and digital panel wattmeters of the 3021 series. Operation manual ОИУСН.140.012 РЭ]. Krasnodar, 2022. 44 p. (In Russ.).
- БУБЛИК Антон Владимирович**, ведущий инженер-электроник отдела разработки и внедрения испытательного оборудования ОАО «Научно-исследовательский институт технологии, контроля и диагностики железнодорожного транспорта» (ОАО «НИИТКД»), г. Омск; соискатель кафедры «Электрические машины и общая электротехника» Омского государственного университета путей сообщения (ОмГУПС), г. Омск.
SPIN-код: 3878-4751
Адрес для переписки: anvbublik@mail.ru
- СТЕПАНОВ Сергей Юрьевич**, ведущий технолог отдела разработки и внедрения испытательного оборудования ОАО «НИИТКД», г. Омск; аспирант кафедры «Электрические машины и общая электротехника» ОмГУПС, г. Омск.
SPIN-код: 7242-7156
Адрес для переписки: stepanovsu1990@gmail.com

ПОПОВ Денис Игоревич, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры «Электрические машины и общая электротехника» ОмГУПС, г. Омск.

SPIN-код: 8506-9250

AuthorID (РИНЦ): 657177

AuthorID (SCOPUS): 57200090858

ORCID: 0000-0001-9519-1062

Адрес для переписки: popovomsk@yandex.ru

ТКАЧЕВ Андрей Юрьевич, технический директор ОАО «НИИТКД», г. Омск.

Адрес для переписки: andrey14@inbox.ru

Прозрачность финансовой деятельности: авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.

Статья поступила в редакцию 01.10.2025; одобрена после рецензирования 29.12.2025; принята к публикации 26.01.2026.

BUBLIK Anton Vladimirovich, Leading Electronics Engineer of the Development and Implementation of Test Equipment Department, Scientific Research Institute of Technology, Control and Diagnostics of Railway Transport (JSC "NIITKD"), Omsk; Applicant of the Electrical Machines and General Electrical Engineering Department, Omsk State Transport University (OSTU), Omsk.

SPIN-code: 3878-4751

Correspondence address: anvbublik@mail.ru

STEPANOV Sergey Yuryevich, Leading Technologist of the Development and Implementation of Test Equipment Department, JSC "NIITKD", Omsk; Postgraduate of the Electrical Machines and General Electrical Engineering Department, OSTU, Omsk.

SPIN-code: 7242-7156

Correspondence address: stepanovsu1990@gmail.com

POPOV Denis Igorevich, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Electrical Machines and General Electrical Engineering Department, OSTU, Omsk.

SPIN-code: 8506-9250

AuthorID (RSCI): 657177

AuthorID (SCOPUS): 57200090858

ORCID: 0000-0001-9519-1062

Correspondence address: popovomsk@yandex.ru

TKACHEV Andrey Yurievich, Technical Director of the JSC "NIITKD", Omsk.

Correspondence address: andrey14@inbox.ru

Financial transparency: the authors have no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.

The article was submitted 01.10.2025; approved after reviewing 29.12.2025; accepted for publication 26.01.2026.

ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИИ ГАЗОВЫХ КАНАЛОВ НА ТОКОВЫЙ БАЛАНС В РАБОТЕ ТВЕРДООКСИДНЫХ ЭЛЕКТРОЛИЗЕРОВ

А. И. Голоднова¹, М. В. Ерпалов¹, А. И. Голоднов²

¹Институт высокотемпературной электрохимии Уральского отделения РАН,
Россия, 620066, г. Екатеринбург, ул. Академическая, стр. 20

²Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина,
Россия, 620062, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

Оптимизация конструкции твердооксидных электролизеров является перспективным направлением исследований как в энергетике, так и в промышленности в целом, поэтому работы в области повышения эффективности и надежности электролизеров проводятся учеными по всему миру. В статье рассматриваются конструкции интерконнекторов для твердооксидного электролизера, чтобы оценить влияние их конструкции на параметры работы действующих установок и вновь проектируемого оборудования. В частности, особое внимание направлено на изучение влияния траектории газовых каналов на баланс напряжений электрохимического устройства. На основе моделирования для твердооксидного электролизера планарной конструкции определена взаимосвязь между геометрическими размерами элементов при изменении траектории газовых каналов интерконнектора и потерями напряжений при его работе.

Ключевые слова: математическое моделирование, электрохимические устройства, твердооксидный электролизер, интерконнектор, плотность тока, напряжение.

Для цитирования: Голоднова А. И., Ерпалов М. В., Голоднов А. И. Влияние геометрии газовых каналов на токовый баланс в работе твердооксидных электролизеров // Омский научный вестник. 2026. № 1 (197). С. 113–118. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-113-118. EDN: MQPOQP.



© Голоднова А. И., Ерпалов М. В., Голоднов А. И., 2026.
Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License

INFLUENCE OF THE GEOMETRY OF GAS CHANNELS ON THE CURRENT BALANCE IN THE OPERATION OF SOLID OXIDE ELECTROLYZERS

A. I. Golodnova¹, M. V. Erpalov¹, A. I. Golodnov²

¹Institute of High Temperature Electrochemistry of the Ural Branch
of the Russian Academy of Sciences,
Russia, Ekaterinburg, Akademicheskaya St., bld. 20, 620066

²Ural Federal University named after the First President of Russia B. N. Yeltsin,
Russia, Ekaterinburg, Mira St., 19, 620062

Optimization of the design of solid oxide electrolyzers is promising for the development of both energy and industry in general. Therefore, research in the sphere of improving the efficiency and reliability of electrolyzers is conducted by scientists around the world. In the paper, the authors consider a change in the design parameters of interconnectors for a solid oxide electrolyzer, which makes it possible to assess the impact of the design on the operating parameters of the existing and newly designed equipment. In particular, special attention is paid to studying the effect of the trajectory of gas channels on the current balance of an electrochemical device. Based on modeling for a solid oxide electrolyzer of a planar design, the authors determine relation between the geometric dimensions of the elements when changing the trajectory of the gas channels of the interconnector and voltage losses during its operation.

Keywords: mathematical modeling, electrochemical devices, solid oxide electrolyzer, interconnector, current density, voltage.



Введение

Антропогенные технологии оказывают огромное влияние на экологию городов, что требует перехода к системам, которые могут снизить уровень выбросов в окружающую среду. Научные исследования последних лет направлены на развитие эффективного использования энергии, к примеру, чтобы электричество и природный газ использовались как гибриды в производстве или преобразовании энергии с экологически чистыми видами топлива, такими как возобновляемый водород [1].

Одной из перспективных технологий преобразования CO_2 и H_2O в синтетическое топливо является электролиз [2]. В настоящее время для совместного электролиза углекислого газа и воды используют твердооксидные электролизеры. Данный тип электрохимических устройств позволяет работать при высоких температурах, при этом потребляя меньше электроэнергии [3–4].

Как и любая технология, установки имеют ряд недостатков, такие как сложно синтезируемые материалы, хрупкость и сложность единичных элементов.

В настоящее время ученые стараются нивелировать недостатки данных устройств путем проведения математического моделирования на этапе проектирования для подбора оптимальной конструкции и производительности при меньших затратах для производства.

Отмечается, что моделирование полезно для разработки различных технологий производства электроэнергии. Более того, разработка конструкции твердооксидных электролизеров и топливных элементов связана с подбором параметров газовых каналов для указанных систем, а также с определением параметров граничных условий, соответствующих условиям их внутренней работы. Сложность может быть объяснена тем фактом, что при работе устройства одновременно происходит несколько технологических процессов: электрохимические реакции, электропроводность, ионная проводимость и тепломассоперенос [5].

Нужно отметить, что многие исследователи сосредоточились на разработке различных моделей для исследования путей повышения производительности установок и безаварийности их эксплуатации. Часто применяется математический анализ как способ отображения динамики химических процессов и оптимизации конструкции твердооксидных ячеек, а также условий эксплуатации в конструкции поля электрического потока [6]. Использование моделирования позволяет сократить расходы и повысить эффективность проводимых экспериментов ввиду сокращения времени на поиск оптимальных условий для проведения исследований, что приводит к экономии материалов и энергетических ресурсов [7].

В последнее время было проведено значительное количество исследований, чтобы определить оптимальность и эффективность конструкций интерконнекторов. Проведение моделирования по-

зволяет делать сравнение различных конструкций, таких как прямолинейный канал, змеевидный (серпантинный) и встречный для реагентов, для того чтобы оценить изменение в токовом балансе. Тем самым показать влияние геометрической конструкции на мощность элемента [8].

Исследователями отмечается, что основными функциями для описания работы твердооксидных электролизеров и топливных элементов планарной конструкции являются баланс напряжений (токовый баланс), материальный баланс и закон Фарадея.

В работе описываются результаты исследования, целью которого являлось оценить влияние геометрических параметров газовых каналов на составляющие баланса напряжений в плотном контакте между интерконнектором и электродом.

Рассмотрение конструкции газовых каналов для данного типа электрохимических устройств обусловлено тем, что производительность установки напрямую зависит от электропроводности/ионопроводности материалов и количества реагентов, вступающих в реакцию электролиза. При изменении площади реакционной поверхности и площади токоподвода будет меняться плотность тока, что будет влиять на протекание реакции электролиза, и, по сути, это повлияет на общую функциональность батареи элементов.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

1. Построить модели интерконнекторов с разными траекториями газовых каналов.

2. Проанализировать зависимость между напряжением и протяженностью газовых каналов с различными траекториями в твердооксидном электролизере планарной конструкции, работающем на постоянном токе.

Следует отметить, что математическая модель баланса напряжений составлялась с учетом допущений:

- 1) модели интерконнекторов строились для устройства с пластинами размером 10×10 см, и рассматривались газовые каналы с параллельными, змеевидными и встречными траекториями;

- 2) в исследовании рассматривается соотношение площадей контактов между интерконнектором и электродом и площадей для протекания реакции электролиза;

- 3) рассмотренные модели в физическом плане выполнены из известных материалов, поэтому при расчетах использовались справочные или экспериментальные данные, характеризующие свойства этих материалов;

- 4) характеристики количества вещества постоянны; известны расходы газов и составы реагентов и продуктов, подаваемых и выходящих из устройства;

- 5) при работе устройства выполняется закон сохранения масс: «масса веществ, вступивших в химическую реакцию, равна массе образовавшихся веществ».

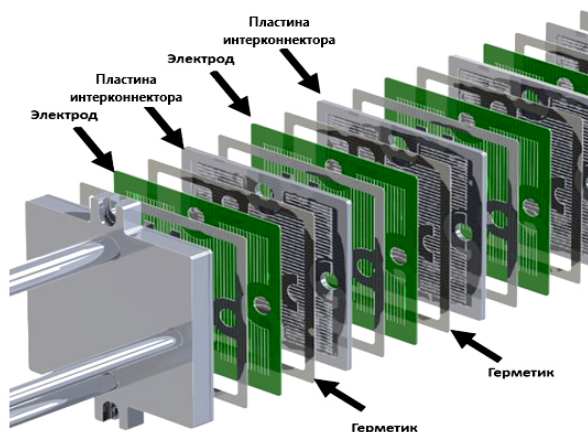


Рис. 1. Модель твердооксидного электролизера планарной конструкции
Fig. 1. Model of a planar solid-oxide electrolyzer

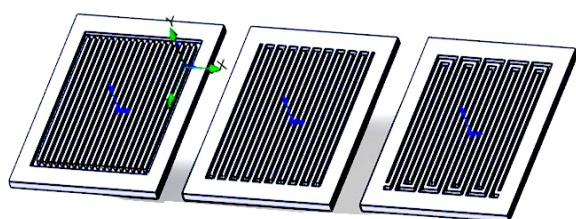


Рис. 2. Интерконнекторы с различными траекториями газовых каналов:
а) параллельная; б) змеевидная; в) встречная
Fig. 2. Interconnectors with different gas channel trajectories:
a) parallel; б) serpentine; в) opposite

Физические особенности стека электролизера планарной конструкции

Стандартную конструкцию электролизера планарной конструкции можно описать как некоторое количество единичных ячеек, каждая из которых состоит из двух электродов, разделенных слоем электролита. Со стороны катода подают газовую смесь, подлежащую электролизу. На границе раздела фаз происходят электрохимические реакции, в результате которых углекислый газ и пары воды переходят в монооксид углерода и водород. Модель электролизера представлена на рис 1.

Учитывая, что производство материалов является дорогим, то повышение долговечности электрохимических устройств представляет актуальную проблему. Таким образом, значительное внимание исследователей в настоящее время уделяется моделированию режимов работы электрохимических устройств с подбором оптимальных конструкций и технологических параметров [8]. Одним из факторов, влияющих на производительность электролизера, является вид газовых каналов, которые образуются между интерконнектором и электродом. Несмотря на то, что за последние десятилетия было проведено несколько работ по поиску оптимального способа циркуляции газовой смеси и отвода синтез-газа и анодных газов, проблема остается нерешенной. Следовательно, подбор оптимальной конфигурации газовых каналов интересен для разработки устройств. Следовательно, в данном случае будут рассмотрены различ-

ные геометрические траектории газовых каналов исходя из следующих требований:

1. Равномерность распределения токов и тепла (определяется соотношением ширины каналов и ребер 1/1).

2. Конструктивная совместимость в устройствах (определяется соотношением площади контакта и протяженности траектории каналов).

3. Простота герметизации при сборке [9].

Исходя из приведенных условий были выбраны следующие траектории каналов (примеры пластин с каналами приведены на рис. 2):

- 1) с параллельными каналами;
- 2) со змеевидными каналами;
- 3) со встречным направлением каналов.

Интерконнекторы являются важными элементами конструкции, так как выполняют конструктивную функцию, формируя в устройстве газовые каналы, а также выполняют роль токоподвода в устройстве для обеспечения электрической нагрузки в устройстве. Описание внутренних процессов в рабочем режиме электролизеров часто сопряжено с трудностями. Это связано с большими физическими и химическими процессами, протекающими в топливных элементах.

Теоретические основы проведения исследования

В работе рассматривается математическая модель, связывающая геометрические параметры пластин интерконнекторов и напряжение в устройстве.

Теоретически баланс напряжений твердооксидного электролизера можно записать как

$$U = E_{thermo} + \eta_{act} + \eta_{conc} + \eta_{ohmic} \quad (1)$$

где U — напряжение, подающееся на единичный элемент электролизера, В; E_{thermo} — термодинамически идеальное напряжение, наименьшее напряжение, при котором идет электролиз; η_{act} — потери при активации из-за кинетики реакции; η_{ohmic} — омические потери при ионной и электронной проводимости; η_{conc} — концентрационные потери напряжения [10].

$$E_{thermo} = E_0 + \frac{\Delta S}{n \cdot F} (T_p - T_0), \quad (2)$$

где E_0 — обратимое перенапряжение реакции при стандартных условиях; ΔS — энтропия реакции; T_p — рабочая температура, К; T_0 — температура при стандартных условиях реакции, К; n — валентное число ионов вещества; F — постоянная Фарадея, Кл/моль (А ч/моль).

Концентрационные потери, связанные с трудностями подвода исходных реагентов и/или отвода продуктов реакции от электродов, возникают из-за конечной скорости массопереноса через электрод и обеднения топливной смеси по длине канала. Другими словами, зависят от площади реакционной поверхности и длины траектории движения [10]:

$$\eta_{con} = \frac{R \cdot T}{n \cdot F} \ln \frac{J_{пра}}{J_{пра} - J_p}, \quad (3)$$

где $J_{пра}$, J_p — плотность предельного тока и плотность тока в электролите, А/см².

$$J_{пра} = n \cdot F \cdot D \frac{C_{red} - C_{red}^0}{\delta}, \quad (4)$$

где D — коэффициент диффузии; C_{red} — концентрация восстановителя конечная; C_{red}^0 — концентрация восстановителя начальная; δ — толщина электрода.

$$J_{\text{пра}} = \frac{I_{\text{max}}}{S_p}, \quad (5)$$

где S_p — площадь реакционной поверхности, см^2 ; I_{max} — максимальный ток, который может пройти через данный электролит, А.

Омические потери, возникающие благодаря наличию у материалов единичной ячейки электрического сопротивления, следовательно, зависят от площади токоподводов [10]:

$$\eta_{\text{ohmic}} = J_{\text{ом}} \cdot R_{\text{ср}}, \quad (6)$$

где $R_{\text{ср}}$ — среднее омическое сопротивление на границе плотного контакта электролита и интерконнектора; $J_{\text{ом}}$ — плотность тока плотного контакта, $\text{А}/\text{см}^2$.

$$J_{\text{ом}} = \frac{I_{\text{max}}}{S_{\text{ohm}}}, \quad (7)$$

где S_{ohm} — площадь плотного контакта ребер и электродов (площадь ребер), см^2 .

Поляризационные потери связаны со значением активационной поляризации, а также соответствующее ей сопротивление границы катода/электролит зависит от протяженности трехфазной границы и находится по уравнению поляризации, найденной путём решения уравнения Батлера — Волмера:

$$\eta_{\text{act}} = \frac{R \cdot T}{n \cdot F} \ln \left(\frac{J_p}{J_0} \right), \quad (8)$$

$$J_0 = n \cdot F \cdot C_{\text{red}} \cdot \kappa_a^{\text{pab}} = n \cdot F \cdot C_{\text{ox}} \cdot \kappa_k^{\text{pab}}, \quad (9)$$

где R — универсальная газовая постоянная; J_0 — плотность обменного тока, $\text{А}/\text{см}^2$; J_p — плотность тока в электролите $\text{А}/\text{см}^2$; κ_a^{pab} , κ_k^{pab} — константы скорости соответственно анодного и катодного процессов при $E = E_0$.

Как видно из приведенных уравнений, главным показателем для электрического баланса будет соотношение площади плотного контакта (площадь ребер) и площади реакционной поверхности и силы тока, так как эти величины повлияют на показатель плотности тока.

Далее рассмотрим, насколько изменяются рабочие размеры каналов (влияющие на баланс напряжений) при изменении траектории газовых каналов в интерконнекторе.

Результаты расчетов

Для единичной твердооксидной ячейки, работающей в режиме электролизера, была проведена оценка влияния изменения траектории газовых каналов на показатели баланса. Согласно уравнениям (5) и (7), можно выразить следующее соотношение:

$$\frac{S_p}{S_{\text{ohm}}} = \frac{J_{\text{ом}}}{J_{\text{пра}}}. \quad (10)$$

Для получения данных об изменении площадей реакционной поверхности и ребер при помощи средств программного комплекса КОМПАС-3D

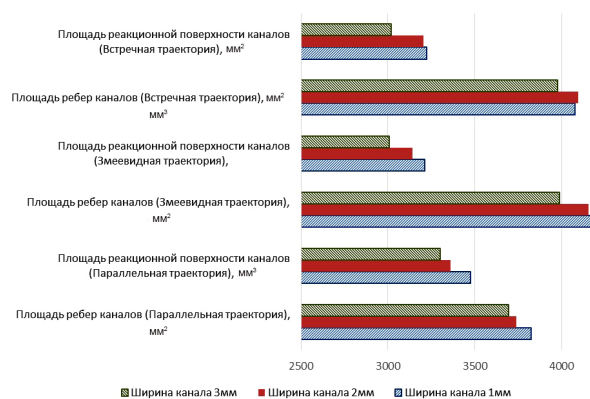


Рис. 3. Зависимость изменения площадей ребер и реакционной поверхности при изменении траектории каналов

Fig. 3. Dependence of the change in the areas of the edges and the reaction surface on the channel trajectory changing

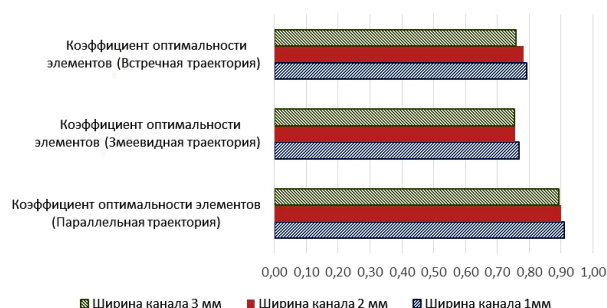


Рис. 4. Зависимость изменения коэффициента оптимальности элементов от траектории газовых каналов

Fig. 4. Dependence of the change in the optimal coefficient of elements on the trajectory of gas channels

на пластине 10×10 см были построены интерконнекторы с шириной каналов в диапазоне $h = 1 - 3$ мм со следующими траекториями:

- параллельная;
- змеевидная;
- встречная.

На полученных моделях были измерены значения следующих параметров (результаты измерений представлены на рис. 3):

1. Площадь реакционной поверхности;
2. Площадь ребер каналов.

Как видно из рис. 3, общая площадь пластины не меняется при изменении траектории движения каналов, а происходит взаимное изменение площадей элементов интерконнектора; при змеевидной и встречной траекториях происходит перераспределение площадей в пользу площади ребер.

Следовательно, соотношение для оценки взаимосвязи площадей, полученное в уравнении (10), можно обозначить как коэффициент оптимальности:

$$K = \frac{S_p}{S_{\text{ohm}}}. \quad (11)$$

Данные, полученные при моделировании интерконнекторов с различными траекториями каналов, приведены на рис. 4.

Как видно из рис. 4, коэффициент K при параллельной траектории газовых каналов ближе к 1,

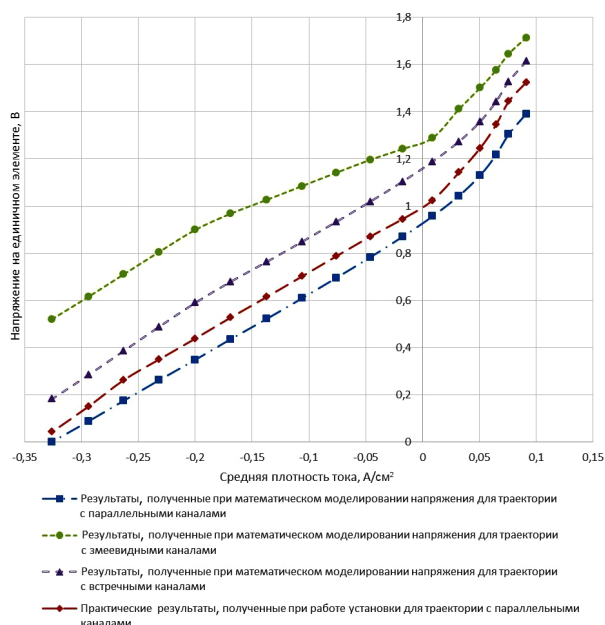


Рис. 5. Поляризационные кривые для единичных элементов с различными траекториями газовых каналов и шириной 1 мм

Fig. 5. Polarization curves for single elements with different gas channel trajectories and with a width of 1 mm

следовательно, эта траектория будет иметь лучшие показатели газодинамики при одинаковом токоподе.

Для единичной ячейки с параллельными каналами шириной 1 мм были рассчитаны рабочие напряжения согласно (1)–(9). На основании полученных данных были построены поляризационные кривые для устройств с интерконнекторами различных траекторий. Более того, эти данные были дополнены практическими результатами при работе установки с траекторией с параллельными каналами (рис. 5).

Согласно рис. 5, поляризационные кривые для твердооксидного электролизера отражают зависимость плотности тока от напряжения на электродах, показывая влияние поляризации на процесс электролиза воды и CO_2 . Следует отметить, что поляризационная кривая при отрицательном токе (отрицательная плотность тока на катоде) отражает потери, связанные с электролизом водяного пара и CO_2 , где ток направлен на их разложение. При изменении траектории газовых каналов происходит расхождение в рабочих напряжениях ячеек. Согласно расчетам, в устройствах со змеевидной и встречной траекториями напряжение будет выше при одной и той же плотности тока. Следует также отметить, что по характеру полученных графиков резкий наклон показывает отсутствие тока ячейки, близкого к предельному току.

Выводы и заключение

При построении моделей интерконнекторов с различными траекториями газовых каналов были получены экспериментальные данные об изменениях в площади реакционной поверхности и площади плотного контакта у пластин.

Для описания баланса напряжений твердооксидного электролизера планарной конструкции построена математическая модель, позволяющая оценить влияние изменения траектории газовых каналов на показатели работы электрохимической ячейки.

В интерконнекторах со змеевидными и встречными каналами наблюдается увеличение площади ребер, которое негативно сказывается на показателях газодинамики (в том числе на перепаде давления), что оказывает влияние на срок эксплуатации устройства. При этом, согласно расчетам, у этих же траекторий критическое значение напряжения 1,45 В достигается при меньшей плотности тока, что также является негативным показателем для работы электролизера.

Полученные результаты были сопоставлены с практическими данными для параллельной траектории. Расхождение показателей составило менее 10 %, что позволяет судить об адекватности полученной модели.

Список источников / References

1. Chung T. D., Chyou Y. P., Yu D. D. Study of the flow field in channels and internal manifolds on the interconnect of a planar solid oxide fuel cell. *International Conference on Fuel Cell Science, Engineering and Technology*. 2005. Vol. 37645. P. 273–280. DOI: 10.1115/FUELCELL2005-74149.
2. Hauch A., Kьngas R., Blennow P. [et al.]. Recent advances in solid oxide cell technology for electrolysis. *Science*. 2020. Vol. 370, no. 6513. P. 6118. DOI: 10.1126/science.aba6118.
3. Wilberforce T., El-Hassan Z., Khatib F. N. [et al.]. Developments of electric cars and fuel cell hydrogen electric cars. *International Journal of Hydrogen Energy*. 2017. Vol. 42, no. 40. P. 25695–25734. DOI: 10.1016/j.ijhydene.2017.07.054.
4. Dohle H., Jung R., Kimiaie N. [et al.]. Interaction between the diffusion layer and the flow field of polymer electrolyte fuel cells—experiments and simulation studies. *Journal of Power Sources*. 2003. Vol. 124, no. 2. P. 371–384. DOI: 10.1016/S0378-7753(03)00800-0.
5. Sugihara S., Iwai H. Experimental investigation of temperature distribution of planar solid oxide fuel cell: effects of gas flow, power generation, and direct internal reforming. *International Journal of Hydrogen Energy*. 2020. Vol. 45, no. 46. P. 25227–25239. DOI: 10.1016/j.ijhydene.2020.06.033.
6. Zhu Q. Developments on CO_2 -utilization technologies. *Clean Energy*. 2019. Vol. 3, no. 2. P. 85–100. DOI: 10.1093/ce/zkz008.
7. Fussler C. Solution for a circular carbon economy. *The CO_2 Forum Briefing Paper; The CO_2 Forum*. France, 2015.
8. Fung A., Zabihian F. A review on modeling of hybrid solid oxide fuel cell systems. *International Journal of Engineering*. 2009. Vol. 3, no. 2. P. 85–119.
9. Nejma M. H., Mounir H., Marjani A. E. A review of recent advancements regarding the geometry of flow field channels in the bipolar plates of polymer electrolyte membrane fuel cells. *International Conference on Advanced Intelligent Systems for Sustainable Development*. 2020. P. 59–73. DOI: 10.1007/978-3-030-90639-9_5.
10. O'hayre R., Cha S. W., Colella W. [et al.]. Fuel cell fundamentals. John Wiley & Sons, 2016. P. 80–103. DOI: 10.1002/9781119191766. ISBN 9781119113805.

ГОЛОДНОВА Анастасия Игоревна, младший научный сотрудник лаборатории электрохимических устройств и топливных элементов Института высокотемпературной электрохимии Уральского отделения РАН (ИБТЭ УрО РАН), г. Екатеринбург. SPIN-код: 3510-7011

AuthorID (РИНЦ): 767921

ORCID: 0000-0003-2598-2269

Адрес для переписки: a.golodnova@ihte.ru

ЕРПАЛОВ Михаил Викторович, заведующий лабораторией электрохимических устройств и топливных элементов ИБТЭ УрО РАН, г. Екатеринбург.

SPIN-код: 6696-3245
AuthorID (РИНЦ): 788519
ORCID: 0000-0003-3113-598X
AuthorID (SCOPUS): 55747315200
ResearcherID: N-7453-2016
Адрес для переписки: m.erpalov@ihite.ru
ГОЛОДНОВ Антон Игоревич, доцент кафедры литейного производства и упрочняющих технологий Уральского федерального университета имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург.
AuthorID (РИНЦ): 767918
ORCID: 0000-0003-2958-310X
AuthorID (SCOPUS): 57211929114
ResearcherID: R-3266-2016
Адрес для переписки: a.i.golodnov@urfu.ru

Прозрачность финансовой деятельности: авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.

Статья поступила в редакцию 29.09.2025; одобрена после рецензирования 24.11.2025; принята к публикации 13.01.2026.

GOLODNOVA Anastasia Igorevna, Junior Researcher of the Laboratory of Electrochemical Devices and Fuel Cells, Institute of High-Temperature Electrochemistry of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IHTE UB RAS), Ekaterinburg.

SPIN-code: 3510-7011
AuthorID (RSCI): 767921
ORCID: 0000-0003-2598-2269
Correspondence address: a.golodnova@ihite.ru
ERPALOV Mikhail Viktorovich, Head of the Laboratory of Electrochemical Devices and Fuel Cells, IHTE UB RAS, Ekaterinburg.
SPIN-code: 6696-3245
AuthorID (RSCI): 788519
ORCID: 0000-0003-3113-598X
AuthorID (SCOPUS): 55747315200
ResearcherID: N-7453-2016
Correspondence address: m.erpalov@ihite.ru
GOLODNOV Anton Igorevich, Associate Professor of the Foundry Production and Hardening Technologies Department, Ural Federal University named after the First President of Russia B. N. Yeltsin, Ekaterinburg.
AuthorID (RSCI): 767918
ORCID: 0000-0003-2958-310X
AuthorID (SCOPUS): 57211929114
ResearcherID: R-3266-2016
Correspondence address: a.i.golodnov@urfu.ru

Financial transparency: the authors have no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.

The article was submitted 29.09.2025; approved after reviewing 24.11.2025; accepted for publication 13.01.2026.

УДК/UDC 621.317.628

DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-119-125

EDN: PEKZBO

Научная статья / Original article

ОСНОВЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОДНОКОМПОНЕНТНОГО СФЕРИЧЕСКОГО ДАТЧИКА НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ, ИМЕЮЩЕГО РАЗОМКНУТУЮ СИСТЕМУ ЭЛЕКТРОДОВ С НЕОДНОРОДНЫМ ПОЛЕМ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА

С. В. Бирюков

Омский государственный технический университет, Россия, 644050, г. Омск, пр. Мира, 11

В работе уделено внимание построению однокомпонентного сферического датчика напряженности электрического поля с разомкнутой системой чувствительных электродов, способного работать в полях различной неоднородности с требуемой погрешностью. В качестве чувствительных электродов датчика рассматриваются сферические оболочки в форме пустотелых сферических сегментов и их взаимодействие с электрическим полем точечного источника. Сформированы основные теоретические положения, способствующие определению выходного сигнала датчика в виде напряжения холостого хода U_{xx} . Устанавливается взаимосвязь выходного сигнала датчика и его погрешности от пространственного диапазона измерения и от конструктивных размеров чувствительных электродов датчика. По установленным взаимосвязям составляется математическая модель датчика и проводится математическое моделирование. Результатом математического моделирования стали численные значения U_{xx} и погрешности δ от неоднородности электрического поля в зависимости от пространственного диапазона a и угловых размеров чувствительных электродов θ_0 датчика. Построенные по численным значениям графики этих зависимостей выявили, что допустимые угловые размеры чувствительных электродов датчика должны лежать в диапазоне $40^\circ \leq \theta_0 \leq 50^\circ$. Указанный диапазон обеспечивает датчику погрешность по модулю, не превышающую $\delta \leq 5\%$. Однако оптимальным угловым размером чувствительных электродов датчика следует считать $\theta_0 \leq 45^\circ$.

Датчик с таким угловым размером чувствительных электродов будет иметь минимум погрешности в широком пространственном диапазоне измерений и обеспечит возможность создания двух- и трехкомпонентных датчиков без наложения электродов друг на друга. Результаты работы могут лечь в основу оценочных расчетов датчиков с разомкнутой системой электродов.

Ключевые слова: напряженность поля, неоднородное электрическое поле, точечный заряд, сферический датчик, чувствительный элемент, разомкнутая система электродов, измерительная цепь.

Для цитирования: Бирюков С. В. Основы взаимодействия однокомпонентного сферического датчика напряженности электрического поля, имеющего разомкнутую систему электродов с неоднородным полем точечного заряда // Омский научный вестник. 2026. № 1 (197). С. 119–125. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-119-125. EDN: PEKZBO.



© Бирюков С. В., 2026.
Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

FUNDAMENTALS OF INTERACTION OF A SINGLE-COMPONENT SPHERICAL ELECTRIC FIELD STRENGTH SENSOR WITH AN OPEN SYSTEM OF ELECTRODES WITH A NON-UNIFORM FIELD OF A POINT CHARGE

S. V. Biryukov

Omsk State Technical University, Russia, Omsk, Mira Ave., 11, 644050

The work focuses on the construction of a single-component spherical electric field strength sensor with an open system of sensitive electrodes, capable of operating in fields of varying non-uniformity with the required error. Spherical shells in the form of hollow spherical segments and their interaction with the electric field of a point source are considered as sensitive electrodes of the sensor. The main theoretical provisions are formed that facilitate the determination of the output signal of the sensor in the form of open-circuit voltage U_{xx} . The relationship between the output signal of the sensor and its error from the spatial measurement range and from the design dimensions of the sensitive electrodes of the sensor is established. Based on the established relationships, a mathematical model of the sensor is compiled and mathematical modeling is carried out. The result of mathematical modeling are the numerical values of U_{xx} and the error δ from the heterogeneity of the electric field depending on the spatial range a and the angular dimensions of the sensitive electrodes θ_0 of the sensor. The graphs of these dependencies constructed using the numerical values revealed that the permissible angular dimensions of the sensitive electrodes of the sensor should lie in the range of $40^\circ \leq \theta_0 \leq 50^\circ$. This range provides the sensor with an error in modulus not exceeding $\delta \leq 5\%$. However, the optimal angular size of the sensitive electrodes of the sensor should be considered to be $\theta_0 \leq 45^\circ$.

A sensor with such an angular size of the sensitive electrodes will have a minimum error in a wide spatial range of measurements and will provide the possibility of creating two- and three-component sensors without overlapping the electrodes. The results of the work can form the basis for evaluation calculations of sensors with an open electrode system.

Keywords: field strength, non-uniform electric field, point charge, spherical sensor, sensitive element, open electrode system, measuring circuit.

For citation: Biryukov S. V. Fundamentals of interaction of a single-component spherical electric field strength sensor with an open system of electrodes with a non-uniform field of a point charge. *Omsk Scientific Bulletin*. 2026. No. 1 (197). P. 119–125. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-119-125. EDN: PEKZBO.



© Biryukov S. V., 2026.

The content is available under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Введение

Работы по организации мер и средств защиты электротехнического оборудования и персонала от воздействия электромагнитных полей всегда были и будут актуальны. Воздействующие поля на электротехническое оборудование и персонал можно разделить на электромагнитные (ЭМП), магнитные (МП) и электрические (ЭП). Электромагнитные поля связаны с высокочастотной областью частот, а магнитные и электрические поля — с низкочастотной. Указанные виды полей оказывают на оборудование и человека разное влияние. Для обнаружения этого влияния каждому виду полей требуются различные средства измерения и контроля. В работе уделено внимание датчику напряженности ЭП. В настоящее время в средствах измерения напряженности ЭП используются электроиндукционные сферические датчики напряженности ЭП с замкнутой системой чувствительных электродов (ЧЭ) [1–8].

Для расширения номенклатуры датчиков напряженности ЭП в работе предложен новый тип датчиков с разомкнутой системой чувствительных электродов, предназначенный для восприятия низкочастотных электрических полей в условиях различной неоднородности.

Цель работы — подготовка теоретической базы для построения датчиков напряженности ЭП с разомкнутой системой электродов, способных работать в полях различной неоднородности.

Постановка задачи

Для достижения цели и проведения исследований необходимо решить следующие задачи:

- 1) рассмотреть взаимодействие двух полых проводящих сферических сегментов, диаметрально расположенных на условной сфере того же радиуса с неоднородным ЭП точечного источника, и создать теоретические положения, позволяющие рассчитывать такое взаимодействие;
- 2) на основании созданных теоретических положений предложить конструктивное решение построения однокомпонентного сферического датчика напряженности ЭП с разомкнутой системой ЧЭ;
- 3) провести анализ возможных выходных сигналов датчика, обосновать их выбор и предложить измерительную цепь для снятия с датчика выбранного сигнала;
- 4) составить математическую модель однокомпонентного сферического датчика напряженности

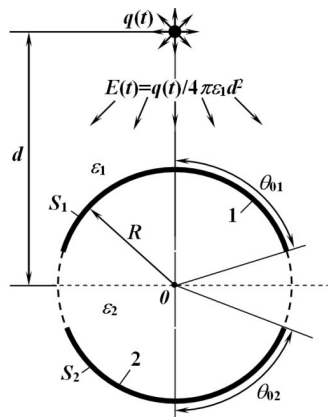


Рис. 1. Система сферических электродов для исследования датчика в неоднородном электрическом поле
Fig. 1. System of spherical electrodes for studying the sensor in a non-uniform electric field

ЭП с разомкнутой системой ЧЭ, взяв за основу полученные теоретические положения;

5) провести математическое моделирование датчика и получить численные значения его выходного сигнала и его погрешности в зависимости от расстояния до источника поля и конструктивных размеров ЧЭ датчика;

6) выявить конструктивные размеры ЧЭ датчика, влияющие на его погрешность от неоднородности поля;

7) установить оптимальные конструктивные размеры ЧЭ датчика с точки зрения минимума погрешности и максимума пространственного диапазона измерений.

Краткая теория

Сформируем теоретические положения применительно к сферическим датчикам напряженности ЭП с разомкнутой системой ЧЭ при их работе в неоднородном поле точечного источника. Чувствительные электроды датчика представим в виде тонких проводящих сферических оболочек в форме сферических сегментов, расположенных диаметрально противоположно на виртуальной сфере. Расчетная схема взаимодействия датчика с полем точечного источника, включающая конструктивные размеры ЧЭ, расстояние до источника поля и параметры окружающей среды, изображена на рис. 1.

Применяемые для расчета датчика теоретические положения будут базироваться на фундаментальных работах [9–12] и работах отдельных авторов [12–14].

Основой датчика являются два ЧЭ S_1 и S_2 в виде тонких проводящих сферических оболочек в форме сферических сегментов радиуса R . Размеры ЧЭ задаются углами θ_{01} и θ_{02} (рис. 1). Примем для простоты расчетов $\theta_{01} = \theta_{02} = \theta_0$. Исследуем взаимодействие датчика с разомкнутой системой ЧЭ в форме сферических сегментов с ЭП точечного источника (рис. 1). Для удобства сравнения полученных результатов с результатами в однородном поле будем принимать напряженность ЭП, создаваемую точечным источником в точке измерения, за единицу.

При внесении такой системы ЧЭ в ЭП на электродах 1 и 2 датчика индуцируются разнополярные электрические заряды $-q_1$ и q_2 , которые зададут

электродам датчика электрические потенциалы φ_{01} и φ_{02} , определяемые емкостью электродов $C = C_A$. В случае однородного поля $-|q_1| = |q_2|$, а при неоднородном поле $-|q_1| > |q_2|$. Указанные электрические параметры, которые приобретают ЧЭ датчика, будут участвовать в формировании их информативных сигналов, пропорциональных измеряемой напряженности исходного ЭП E_0 . Таким образом, нахождение этих электрических параметров будет основной задачей разрабатываемых теоретических положений.

Для решения указанной задачи необходимо задать граничные условия, которые должны быть выполнены при рассмотрении взаимодействия ЧЭ датчика с ЭП. Граничные условия представим в виде:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0; & \varphi|_{S_1} = \varphi_{01}; & \varphi|_{S_2} = \varphi_{02}; \\ D_{n1} = \epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_1 \frac{\partial\varphi}{\partial r}|_{r=R} = \sigma_1(S_1); \\ D_{n2} = \epsilon_2 E_{n2} = \epsilon_2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}|_{r=R} = \sigma_2(S_2), \end{cases} \quad (1)$$

где E_{r1} и E_{r2} — нормальные составляющие вектора напряженности ЭП на поверхности ЧЭ S_1 и S_2 ; $\sigma_1(S_1)$ и $\sigma_2(S_2)$ — поверхностные плотности зарядов на ЧЭ S_1 и S_2 .

Для нахождения электрических зарядов q , потенциалов φ и емкости C воспользуемся методом парных интегральных уравнений [10].

При выполнении граничных условий индуцируемые полем электрические заряды будут определяться выражением [9]

$$q = \int_S \sigma(S) dS, \quad (2)$$

где $\sigma(S)$ — поверхностная плотность заряда сферических оболочек; dS — элемент сферической поверхности, определяемый выражением [9],

$$dS = R^2 \sin\theta d\theta. \quad (3)$$

С учетом выражений (2)–(3) получим

$$q_1(\theta_0) = 4\pi\epsilon_0 R \int_0^{\theta_{01}} f_1(\theta) \cos\frac{\theta}{2} d\theta, \quad (4)$$

$$q_2(\theta_0) = 4\pi\epsilon_0 R \int_0^{\theta_{02}} f_2(\theta) \sin\frac{\theta}{2} d\theta, \quad (5)$$

где $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ — функции [10], получаемые из решения системы парных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} f_1(\theta_0) + \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_{02}}^{\pi} f_2(\theta) \left[\operatorname{cosec}\left(\frac{\theta + \theta_0}{2}\right) + \operatorname{cosec}\left(\frac{\theta - \theta_0}{2}\right) \right] dt \right\} = \\ = -\frac{2}{\pi} \Phi_{01}^H(\theta) \left(\frac{2 + \epsilon^*}{1 + 2\epsilon^*} \right) \cdot \cos\frac{3\theta_0}{2}; \\ f_2(\theta_0) + \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\theta_{01}} f_1(\theta) \left[\operatorname{cosec}\left(\frac{\theta + \theta_0}{2}\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{\theta - \theta_0}{2}\right) \right] dt \right\} = \\ = -\frac{2}{\pi} \Phi_{02}^H(\theta) \left(\frac{2 + \epsilon^*}{1 + 2\epsilon^*} \right) \cdot \sin\frac{3\theta_0}{2}, \end{cases} \quad (6)$$

где $a = R/d$ — относительное расстояние от центра датчика до источника поля; R — радиус сферического сегмента; d — расстояние от центра датчика до источника поля; $\varepsilon^* = \varepsilon_1/\varepsilon_2$ — отношение диэлектрических проницаемостей сред вне и внутри электродов датчика; $\Phi_{01}^H(\theta)$ и $\Phi_{02}^H(\theta)$ — потенциальные функции ЧЭ 1 и 2 датчика с неоднородным ЭП точечного источника, определяемые из системы парных интегральных уравнения (6).

Потенциальные функции $\Phi_{01}^H(\theta)$ и $\Phi_{02}^H(\theta)$ соответственно равны

$$\begin{cases} \Phi_{01}^H(\theta_0) = -\frac{(1-a)}{a \cdot (1-2a \cos \theta_0 + a^2)} \left(\frac{2+\varepsilon^*}{1+2\varepsilon^*} \right) R \cdot E_0 = \\ = \frac{(1-a)}{a \cdot (1-2a \cos \theta_0 + a^2)} \left(\frac{2+\varepsilon^*}{1+2\varepsilon^*} \right) \cdot \Phi_{01}^O(\theta); \\ \Phi_{02}^H(\theta_0) = -\frac{(1+a)}{a \cdot (1-2a \cos \theta_0 + a^2)} \left(\frac{2+\varepsilon^*}{1+2\varepsilon^*} \right) R \cdot E_0 = \\ = \frac{(1+a)}{a \cdot (1-2a \cos \theta_0 + a^2)} \left(\frac{2\varepsilon^*+1}{\varepsilon^*+2} \right) \cdot \Phi_{02}^O(\theta), \end{cases} \quad (7)$$

где $\Phi_{01}^O(\theta_0)$ и $\Phi_{02}^O(\theta_0)$ — потенциальные функции ЧЭ 1 и 2 датчика в однородном ЭП, определяемые системой парных интегральных уравнений, полученных для однородного поля; $a = R/d$ — пространственный диапазон измерений; R — радиус датчика; d — расстояние до источника поля.

Решение системы парных интегральных уравнений (6) способствует нахождению функций $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ [10], по которым определяются:

— электрическая емкость [11]:

$$C = 4\pi\varepsilon_1 R \left[1 - 2 \int_0^{\theta_{01}} f(\theta) \sin \frac{\theta}{2} d\theta \right]. \quad (8)$$

При вычислениях учитывается, что в однородном поле $f_1(\theta) = f_2(\theta) = f(\theta)$;

— электрические заряды (4) и (5), индуцированные полем на поверхностях ЧЭ датчика.

Электрические потенциалы $\Phi_{01}^H(\theta_0)$ и $\Phi_{02}^H(\theta_0)$ ЧЭ 1 и 2 датчика определяются через найденные электрические заряды $q_1(\theta_0)$ и $q_2(\theta_0)$ датчика и его емкость (8):

$$\Phi_{01}^H(\theta_0) = \frac{q_1(\theta_0)}{C} \text{ и } \Phi_{02}^H(\theta_0) = \frac{q_2(\theta_0)}{C}.$$

Найденные выражения для потенциалов ЧЭ датчика позволяют определить их разность, соответственно равную напряжению холостого хода

$$U_{xx}(\theta_0) = \Phi_{01}^H(\theta_0) - \Phi_{02}^H(\theta_0). \quad (9)$$

Полученные автором выражения (2)–(9) при рассмотрении краткой теории взаимодействия однокомпонентного сферического датчика напряженности ЭП с разомкнутой системой ЧЭ полем точечного источника будут положены в основу математической модели.

Схематичная конструкция датчика

Схематичная конструкция представляет собой однокомпонентный сферический датчик напряженности ЭП с разомкнутой системой ЧЭ (рис. 2).

Основой датчика являются две проводящие сферические оболочки в форме полых сферических

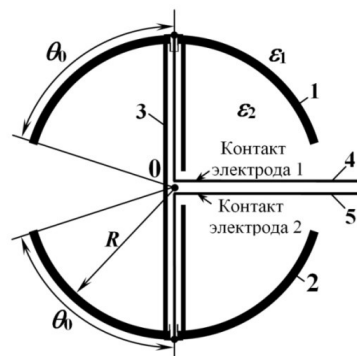


Рис. 2. Однокомпонентный сферический датчик с разомкнутой системой электродов
Fig. 2. Single-component spherical sensor with an open electrode system

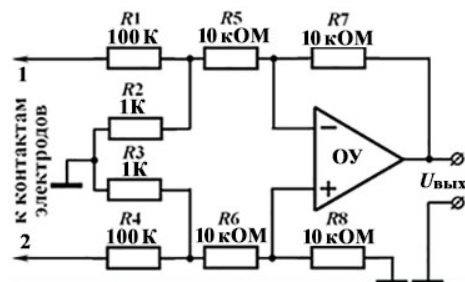


Рис. 3. Входная измерительная цепь датчика
Fig. 3. Input measuring circuit of the sensor

сегментов 1 и 2 радиуса R и углового размера θ_0 , закрепленных на диэлектрическом стержне 3 длиной $l = 2R$. Сферические оболочки являются ЧЭ датчика. Диэлектрические проницаемости сред вне и внутри ЧЭ соответственно равны ε_1 и ε_2 , причем $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$, а отношение диэлектрических проницаемостей сред внутри и вне ЧЭ датчика равно $\varepsilon^* = \varepsilon_1/\varepsilon_2 \leq 1$. Для подключения датчика к измерительной цепи от ЧЭ 1 и 2 через стержень 3 выведены контакты 4 и 5. Измерительная цепь датчика представляет собой дифференциальный измерительный преобразователь на операционном усилителе с большим входным импедансом (рис. 3).

На схеме измерительной цепи указаны ориентировочные значения сопротивлений. Измерительная цепь обеспечивает снятие с ЧЭ датчика напряжения холостого хода $U_{xx}(t)$, не нагружая его электроды. Напряжение холостого хода датчика будет пропорционально напряженности ЭП $E_0(t)$ с учетом погрешности от неоднородности поля

$$U_{xx}(t) = k(1 \pm \delta) \cdot E_0(t), \quad (10)$$

где $k = 3ctg(\theta_0/2)/2$ — коэффициент пропорциональности; $\pm\delta$ — погрешность датчика, вызванная неоднородностью поля.

Математическое моделирование датчика и его результаты

Для проведения математического моделирования составлена математическая модель датчика с разомкнутой системой ЧЭ. Модель объединила основные теоретические положения, полученные в краткой теории, собрав их в единую систему выражения (2)–(9).

Таблица 1. Расчетные значения конструктивных и электрических параметров датчика при его работе в неоднородном поле точечного источника

Table 1. Calculated values of the design and electrical parameters of the sensor when it operates in a non-uniform field of a point source

ПАРАМЕТРЫ		$a = R/d, \quad \varepsilon^* = 1$											
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
θ_0													
30°	C^*	0,1961											
	$U_{xx.H.}^*$	1,823	1,826	1,839	1,875	1,934	2,010	2,102	2,204	2,290	2,352	2,376	
	$\delta(a) \%$	0	0,24	0,94	2,92	6,16	10,31	15,37	20,95	25,7	29,1	30,38	
45°	C^*	0,3201											
	$U_{xx.H.}^*$	1,605	1,607	1,610	1,619	1,632	1,643	1,647	1,643	1,625	1,602	1,582	
	$\delta(a) \%$	0	0,09	0,34	0,96	1,73	2,4	2,6	2,37	1,25	-0,15	-1,4	
60°	C^*	0,4851											
	$U_{xx.H.}^*$	1,332	1,329	1,320	1,304	1,236	1,257	1,227	1,196	1,162	1,127	1,098	
	$\delta(a) \%$	0	-0,24	-0,93	-2,1	-3,72	-5,64	-7,87	-10,2	-12,7	-15,3	-17,6	
75°	C^*	0,7201											
	$U_{xx.H.}^*$	1,005	1,002	0,992	0,977	0,956	0,932	0,902	0,871	0,839	0,806	0,776	
	$\delta(a) \%$	0	-0,31	-1,2	-2,72	-4,82	-7,3	-10,2	-13,3	-16,5	-19,7	-22,8	
90°	C^*	1,558											
	$U_{xx.H.}^*$	0,482	0,480	0,474	0,463	0,450	0,432	0,413	0,393	0,372	0,350	0,329	
	$\delta(a) \%$	0	-0,43	-1,67	-3,9	-6,7	-10,2	-14,2	-18,4	-22,9	-27,4	-31,7	

Целью математического моделирования было нахождение численных значений выходных напряжений холостого хода U_{xx} датчика и его погрешности δ от неоднородности поля в зависимости от расстояния до источника поля и размеров θ_0 его ЧЭ.

В основную задачу математической модели входило решение системы парных интегральных уравнений (6) путем преобразования их в систему алгебраических уравнений.

При моделировании вводились следующие нормировки:

— для напряжений холостого хода:

$$U_{xx}^* = U_{xx} / R \cdot E_0; \quad (11)$$

— для электрической емкости:

$$C^* = C / 4\pi \varepsilon_1 R; \quad (12)$$

— для диэлектрических проницаемостей:

$$\varepsilon^* = \varepsilon_1 / \varepsilon_2. \quad (13)$$

При математическом моделировании исследованию подвергались датчики с ЧЭ в форме полых сферических сегментов с угловыми размерами θ_0 от 30° до 90° с шагом в 15° и $\varepsilon^* = 1$.

Результаты математического моделирования в виде численных значений искомых параметров представлены в табл. 1.

Данные в табл. 1 позволили рассчитать погрешность $\delta(a)$ датчика, вызванную неоднородностью поля в зависимости от относительного расстояния a до источника поля. Для этого была использована известная формула

$$\delta(a) = \frac{U_{xx}^*(a) - U_{xx}^*(0)}{U_{xx}^*(0)} \cdot 100 \%, \quad (14)$$

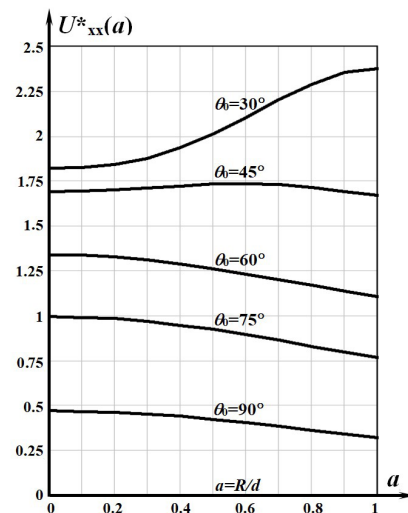


Рис. 4. Графики зависимости напряжения холостого хода $U_{xx}^*(a)$ от пространственного диапазона a при различных угловых размерах θ_0 чувствительных электродов датчика
Fig. 4. Graphs of the dependence of the open-circuit voltage $U_{xx}^*(a)$ on the spatial range a for different angular dimensions θ_0 of the sensitive electrodes of the sensor

где $U_{xx}^*(0)$ — напряжение холостого хода при $a = 0$ (однородное поле); $U_{xx}^*(a)$ — напряжение холостого хода при текущем значении $a \rightarrow 1$ (неоднородное поле с возрастающей неоднородностью).

Для наглядности напряжение $U_{xx}^*(a)$ в виде графических зависимостей от пространственного диапазона измерений $0 \leq a \leq 1$ представлено на рис. 4.

Рис. 4 объединяет семейство графических зависимостей $U_{xx}^*(a)$ для различных угловых размеров

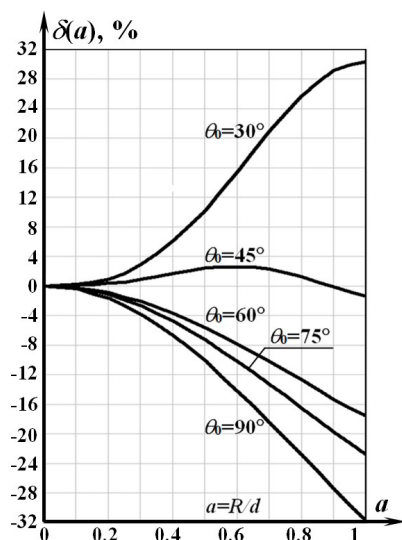


Рис. 5. Графики зависимости погрешности δ датчика от неоднородности поля от пространственного диапазона a при различных угловых размерах θ_0 ЧЭ датчика
Fig. 5. Graphs of the dependence of the error δ of the sensor on the field inhomogeneity from the spatial range a for different angular sizes θ_0 of the SE sensor

θ_0 ЧЭ датчика, изменяющихся от 30° до 90° с шагом в 15° и при $\epsilon^* = 1$.

Графики, представленные на рис. 4, показывают, что напряжение $U_{xx}^*(a)$ при различных угловых размерах θ_0 электродов датчика сильно зависит от неоднородности поля, задаваемой параметром a , характеризующим степень неоднородности поля. Так, при $a \rightarrow 0$ поле приближается к однородному, а при $a \rightarrow 1$ — к сильно неоднородному полю. Из анализа графиков, представленных на рис. 4, следует, что один из графиков $U_{xx}^*(a)$ практически не зависит от неоднородности поля и идет почти горизонтально. Этому графику соответствует датчик с угловыми размерами ЧЭ $\theta_0 = 45^\circ$.

Следовательно, оптимальные угловые размеры ЧЭ датчика, которым соответствует минимальная допустимая погрешность, могут лежать около 45° , т. е. приблизительно в диапазоне $40^\circ < \theta_0 < 50^\circ$. Это подтверждают графики погрешности $\delta(a)$, построенные для тех же изменений a и θ_0 , что графики $U_{xx}^*(a)$. Из графиков следует, что в диапазоне угловых размеров $40^\circ < \theta_0 < 50^\circ$ электродов датчика его погрешность не выйдет за пределы $\pm 5\%$. Графики погрешности $\delta(a)$, в процентах, приведены на рис. 5.

Из рис. 5 следует, что размах погрешностей датчика в зависимости от угловых размеров его ЧЭ θ_0 , указанных на рис. 5, составляет $-31,7\% < \delta(a) < +30,4\%$. Датчику с оптимальным угловым размером $\theta_0 = 45^\circ$ ЧЭ соответствует погрешность, не превышающая $\delta \leq \pm 2,6\%$ в диапазоне измерений $0 \leq a \leq 1$.

Таким образом, математическая модель датчика напряженности с разомкнутой системой ЧЭ в неоднородном поле точечного источника позволила провести математическое моделирование. По результатам моделирования получены численные значения напряжения холостого хода U_{xx}^* и погрешности δ от неоднородности поля. По этим значениям установлены зависимости $U_{xx}^*(a)$ и $\delta(a)$ от пространственного диапазона измерений a при

различных значениях угловых размеров ЧЭ датчика. Изменение угловых размеров ЧЭ датчика принималось от 30° до 90° с шагом в 15° . Установленные зависимости позволили построить графики изменений напряжений холостого хода $U_{xx}^*(a)$, погрешностей $\delta(a)$ и по ним определить допустимые угловые размеры ЧЭ. Установлено, что допустимым для построения датчиков следует считать диапазон угловых размеров ЧЭ $40^\circ < \theta_0 \leq 50^\circ$. Оптимальный угловой размер ЧЭ составит $\theta_0 \leq 45^\circ$. Этот оптимальный угловой размер ЧЭ будет оптимален и с конструктивной точки зрения, так как обеспечит возможность создания двух- и трехкомпонентных датчиков без наложения электродов друг на друга.

Выводы и заключение

По результатам проведенных исследований можно сформулировать ряд выводов:

1) предложена краткая теория взаимодействия двух полых проводящих сферических сегментов, диаметрально расположенных на условной сфере того же радиуса с неоднородным ЭП точечного источника;

2) краткая теория легла в основу конструктивного решения построения однокомпонентного сферического датчика напряженности ЭП с разомкнутой системой ЧЭ;

3) проанализированы возможные варианты выходных сигналов датчика и предложена измерительная цепь для их снятия;

4) с учетом краткой теории составлена математическая модель однокомпонентного сферического датчика напряженности ЭП с разомкнутой системой ЧЭ;

5) проведено математическое моделирование датчика, в результате которого получены численные значения напряжений холостого хода $U_{xx}^*(a)$ и его погрешности $\delta(a)$ в зависимости от пространственного диапазона применения датчика a и угловых размеров его ЧЭ θ_0 ;

6) выявлены допустимые угловые размеры ЧЭ датчика, при которых его погрешность от неоднородности поля минимальна;

7) допустимые угловые размеры ЧЭ датчика лежат в диапазоне $40^\circ < \theta_0 \leq 50^\circ$. При таких угловых размерах погрешность датчика не выйдет за пределы $\pm 5\%$;

8) оптимальными угловыми размерами ЧЭ датчика с точки зрения минимальной погрешности и конструктивного решения можно считать $\theta_0 \leq 45^\circ$. При таких угловых размерах погрешность датчика не превысит $\delta \leq +2,6\%$ во всем пространственном диапазоне измерений, а ЧЭ датчика будут позволять создавать двух- и трехкомпонентные датчики.

В заключение отметим, что получены новые знания, позволяющие проектировать датчики напряженности ЭП с разомкнутой системой ЧЭ, пригодные для измерения параметров полей с различной неоднородностью.

Список источников / References

1. Xiao D., Ma Q., Xieet Y. [et al.]. A power-frequency electric field sensor for portable measurement. *Sensors*. 2018. Vol. 18 (4). 1053. DOI: 10.3390/s18041053.
2. Suo C., Wei R., Zhanget W. [et al.]. Research on the three-dimensional power frequency electric field measurement system. *Journal of Sensors*. 2021. Vol. 2021, no. 6. P. 6–15. DOI: 10.1155/2021/8859022.

3. Прибор для измерения электрического поля ИНЭП-50. Руководство по эксплуатации. Минск, 2023. 7 с. URL: http://www.tecnoshans2006.ru/Documents/ACS/pass_INAP.DOC (дата обращения: 05.07.2025).
- Pribor dlya izmereniya elektricheskogo polya INEP-50. Rukovodstvo po ekspluatatsii [INEP-50 Electric field measuring device. Operation manual]. Minsk, 2023. 7 p. URL: http://www.tecnoshans2006.ru/Documents/ACS/pass_INAP.DOC (accessed: 05.07.2025).
4. Измеритель напряженности электрического поля промышленной частоты «ГРАДАН» от компании «Электроэнергетика». URL: https://www.korabel.ru/news/comments/izmeritel_napryazhennosti_elektricheskogo_polya_promishlennoy_chastoti_gradan_ot_kompanii_elektroenergetika.html (дата обращения: 05.07.2025).
- Izmeritel' napryazhennosti elektricheskogo polya promyshlennoy chastoty «GRADAN» ot kompanii «Elektroenergetika» [The GRADAN industrial frequency electric field strength meter from "Elektroenergetika"]. URL: https://www.korabel.ru/news/comments/izmeritel_napryazhennosti_elektricheskogo_polya_promishlennoy_chastoti_gradan_ot_kompanii_elektroenergetika.html (accessed: 05.07.2025). (In Russ.).
5. Изотропный измеритель электромагнитного поля ПЗ-60. Руководство по эксплуатации. Формуляр. URL: <https://ciklon-pribor.ru/pdf/p3-60%20pasp.pdf> (дата обращения: 05.07.2025).
- Izotropnyy izmeritel' elektromagnitnogo polya P3-60. Rukovodstvo po ekspluatatsii. Formulyar [Isotropic electromagnetic field meter P3-60. User's Manual. Form]. URL: <https://ciklon-pribor.ru/pdf/p3-60%20pasp.pdf> (accessed: 05.07.2025). (In Russ.).
6. Тюкин А. В., Бирюков С. В. Сдвоенный электроиндукционный датчик // Приборы и методы измерений, контроля качества и диагностики в промышленности и на транспорте: материалы VI Всерос. науч.-техн. конф. с междунар. участием, 11 апреля 2025. Омск: Изд-во ОмГУПС, 2025. С. 72–77.
- Tyukin A. V., Biryukov S. V. Sdvoyennyy elektroinduktsionnyy datchik. Pribory i metody izmereniy, kontrolya kachestva i diagnostiki v promyshlennosti i na transporte [Dual electric induction sensor]. Omsk, 2025. P. 72–77. (In Russ.).
7. Chunguang Suo, Ran Wei, Wenbin Zhang [et al.]. Research on the three-dimensional power frequency electric field measurement system. *Journal of Sensors*. 2022. Vol. 2021 (6). 8859022. 15 p. DOI: 10.1155/2021/8859022.
8. Dongping Xiao, Yutong Xie, Qi Zheng [et al.]. A Power-Frequency Electric Field Sensor for Portable Measurement. *Sensors*. 2018. Vol. 18 (4). 1053. DOI: 10.3390/s18041053.
9. Миролюбов Н. Н., Костенко М. В., Левинштейн М. Л., Тиходеев Н. Н. Методы расчета электростатических полей. Москва: Высшая школа, 1963. 415 с.
- Miroyubov N. N., Kostenko M. V., Levinshteyn M. L., Tikhodeyev N. N. Metody rascheta elektrostatischeskikh poley [Methods for calculating electrostatic fields]. Moscow, 1963. 415 p. (In Russ.).
10. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Ленинград: Наука, Ленингр. отд-ние, 1977. 217 с.
- Uflyand Ya. S. Metod parnykh uravneniy v zadachakh matematicheskoy fiziki [The method of paired equations in problems of mathematical physics]. Leningrad, 1977. 217 p. (In Russ.).
11. Кечиев Л. Н. Справочник по расчету электрической емкости, индуктивности и волнового сопротивления в электронной аппаратуре. Москва: Грифон, 2021. 280 с. ISBN 978-5-98862-610-7.
- Kechiyev L. N. Spravochnik po raschetu elektricheskoy emkosti, induktivnosti i volnovogo soprotivleniya v elektronnoy apparature [Handbook of calculating electrical capacitance, inductance, and wave impedance in electronic equipment]. Moscow, 2021. 280 p. ISBN 978-5-98862-610-7. (In Russ.).
12. Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Кримская К. А. Расчет электростатического поля системы сферических сегментов // Журнал технической физики. 2008. Т. 78, вып. 8. С. 128–131. EDN: RCTGKZ.
- Vinogradova E. M., Egorov N. V., Krinskaya K. A. Raschet elektrostatischeskogo polya sistemy sfericheskikh segmentov [Calculation of the electrostatic field of a system of spherical segments]. *Zhurnal Tekhnicheskoy Fiziki*. 2008. Vol. 78, Issue 8. P. 128–131. EDN: RCTGKZ. (In Russ.).
13. Разуненко В. А. Потенциал сферического сегмента внутри сферического слоя с круговым отверстием // Вестник ХНУ — Радиофизика и Электроника. 2008. № 834. С. 120–126.
- Razunenkov V. A. Potentsial sfericheskogo segmenta vnutri sfericheskogo sloya s kruglym otverstiyem [Potential of a spherical segment inside a spherical layer with a circular hole]. *Vestnik KhNU — Radiofizika i Elektronika. Vestnik of KhNU — Radiophysics and Electronics*. 2008. No. 834. P. 120–126. (In Russ.).
14. Исаев Ю. Н., Кулешова Е. О., Васильева О. В., Русол Д. А. Метод расчета распределения зарядов сплошных пластин и пластин с отверстием в форме круга и форме сферических сегментов при наличии внешнего электростатического поля // Известия Томского политехнического университета. 2008. Т. 312, № 4. С. 70–74. EDN: JRGNNL.
- Isayev Yu. N., Kuleshova E. O., Vasil'yeva O. V., Rusol D. A. Metod rascheta raspredeleniya zaryadov sploshnykh plastin i plastin s otverstiyem v forme kruga i forme sfericheskikh segmentov pri nalichii vneshnego elektrostatischeskogo polya [The calculation method of distribution of charges of continuous plates and plates with an aperture in the form of a circle and the form of spherical segments at presence of the external electrostatic field]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*. 2008. Vol. 312, no. 4. P. 70–74. EDN: JRGNNL. (In Russ.).
- БИРЮКОВ Сергей Владимирович**, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры «Физика» Омского государственного технического университета, г. Омск.
SPIN-код: 9384-0078
ORCID: 0000-0002-1362-9911
AuthorID (SCOPUS): 7006438919
Адрес для переписки: sbiryukov154@mail.ru
- Прозрачность финансовой деятельности:** автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.
- Статья поступила в редакцию 04.08.2025; одобрена после рецензирования 22.09.2025; принята к публикации 03.12.2025.
- BIRYUKOV Sergey Vladimirovich**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Physics Department, Omsk State Technical University, Omsk.
SPIN-code: 9384-0078
ORCID: 0000-0002-1362-9911
AuthorID (SCOPUS): 7006438919
Correspondence address: sbiryukov154@mail.ru
- Financial transparency:** the author has no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.
- The article was submitted 04.08.2025; approved after reviewing 22.09.2025; accepted for publication 03.12.2025.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ КОМПЛЕКСНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ И КОНТРОЛЯ ПОЛЕТА БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ НА ТОЧНОСТЬ ДИСТАНЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ УГЛА НАКЛОНА ОПОР С ПОМОЩЬЮ БЛОКА ЛАЗЕРНЫХ СКАНИРУЮЩИХ ДАЛЬНОМЕРОВ

И. А. Шныптев

Омский государственный университет путей сообщения,
Россия, 644046, г. Омск, пр. К. Маркса, 35

В статье рассматривается проблема влияния курсовой устойчивости измерительного комплекса на основе беспилотных летательных аппаратов на результаты измерения углов наклона железобетонных опор в системах электроснабжения. Предлагается комплексное решение, основанное на интеграции разнородных датчиков в единую мультисенсорную платформу, включающую 5-осевые MEMS-акселерометры и гироскопы (или как минимум 3-осевые), модифицированную систему лазерных сканирующих дальномеров, используемых одновременно в качестве высотомеров, датчиков спутниковых систем навигации (GPS/ГЛОНАСС), датчиков воздушного потока, барометрических сенсоров, магнитометров и систем технического зрения. Подчеркивается роль инерциального измерительного модуля и прибора «Курсовертикаль» как основы для построения инерциальной навигационной системы.

Приведены примеры расчета относительных погрешностей отклонения курса беспилотных летательных аппаратов в горизонтальной и вертикальной плоскостях при определении угла отклонения опор. Проведен анализ влияния предложенной системы на метрологические характеристики измерительного комплекса, в частности, при использовании лазерных сканирующих дальномеров с частотой от 10 кГц и погрешностью до 1 мм. Использование предложенных технических средств позволяет исключить указанные погрешности при мониторинге геометрического положения железобетонных конструкций и опор контактной сети железных дорог.

Ключевые слова: беспилотный летательный аппарат, мультисенсорная платформа, контроль полета, инерциальная навигационная система, микроэлектромеханическая система, лазерный сканирующий дальномер, измерение угла отклонения, повышение точности.

Для цитирования: Шныптев И. А. Исследование влияния комплексной стабилизации и контроля полета беспилотных летательных аппаратов на точность дистанционных измерений угла наклона опор с помощью блока лазерных сканирующих дальномеров // Омский научный вестник. 2026. № 1 (197). С. 126–135. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-126-135. EDN: KFBUEH.



© Шныптев И. А., 2026.
Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

INVESTIGATION OF THE EFFECT OF INTEGRATED UNMANNED AERIAL VEHICLES FLIGHT STABILIZATION AND CONTROL ON THE ACCURACY OF REMOTE MEASUREMENTS OF THE ANGLE OF INCLINATION OF THE SUPPORTS USING THE LASER SCANNING RANGEFINDERS UNIT

I. A. Shnyptev

Omsk State Transport University, Russia, Omsk, K. Marksa Ave., 35, 644046

This article examines the impact of the directional stability of an unmanned aerial vehicles based measuring system on the tilt angle measurements of reinforced concrete supports in power supply systems. A comprehensive solution is proposed, based on the integration of disparate sensors into a single multisensor

platform, including 5-axis micro-electromechanical systems accelerometers and gyroscopes, or at least 3-axis ones, a modified system of laser scanning rangefinders used simultaneously as altimeters, satellite navigation system sensors (GPS/GLONASS), airflow sensors, barometric sensors, magnetometers, and a machine vision system. The role of the inertial measurement unit and the "Heads-upright" device as the basis for constructing an inertial navigation system is emphasized.

Examples of calculating relative errors of unmanned aerial vehicles heading deviations in the horizontal and vertical planes when determining the angle of support deviation are provided. An analysis of the proposed system's impact on the metrological characteristics of the measuring system is conducted, particularly when using laser scanning rangefinder with a frequency of 10 kHz and an error of up to 1 mm. Using the proposed technical means allows eliminating these errors when monitoring the geometric position of reinforced concrete structures and supports of railway overhead contact lines.

Keywords: unmanned aerial vehicles, multisensor flight control platform, flight control, inertial navigation system, micro-electromechanical systems, laser scanning rangefinder, deflection angle measurement, increasing accuracy.

For citation: Shnyptev I. A. Investigation of the effect of integrated unmanned aerial vehicles flight stabilization and control on the accuracy of remote measurements of the angle of inclination of the supports using the laser scanning rangefinders unit. *Omsk Scientific Bulletin*. 2026. No. 1 (197). P. 126–135. DOI: 10.25206/1813-8225-2026-197-126-135. EDN: KFBUEH.



© Shnyptev I. A., 2026.
The content is available under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Введение

Современные беспилотные авиационные системы перешли из разряда экспериментальных технологий в категорию высокоточных инструментов для картографии, геодезии, мониторинга объектов инфраструктуры и строительства. Важное значение отводится метрологическим характеристикам таких систем, определяющих точность выполняемых измерений [1–2]. Ключевым требованием к таким беспилотным летательным аппаратам (БПЛА) является не только автономность, но и высочайшая точность и стабильность полета, особенно в условиях турбулентности и ветровых нагрузок. Собственные низкочастотные и высокочастотные вибрации, вызванные работой двигателей и вращением пропеллеров, напрямую влияют на угловую ориентацию платформы, линейные ускорения и, как следствие, на точность позиционирования и качество данных, собираемых бортовым оборудованием (камерами, блоками лазерных сканирующих дальномеров (ЛСД), спектрометрами), наличие динамических погрешностей, возникающих при высоких скоростях перемещения, неточность определения координат в системах GPS, ГЛОНАСС и др. [3–10]. По указанной причине разработка методов и алгоритмов, понижающих величину погрешностей, является актуальной задачей.

Цель исследования — разработка и описание комплексной системы стабилизации, основанной на глубокой интеграции данных от широкого спектра датчиков и сенсоров, а также оценка ее влияния на повышение метрологической точности при измерении углов наклона железнодорожной опоры и в качестве сравнительного примера строительных железобетонных (ЖБ) конструкций в статических и динамических условиях полета БПЛА.

Основная часть

Для более качественного анализа процесса разберём алгоритм определения угла наклона на примере опор контактной сети железных дорог. Опоры изготавливаются из железобетона и имеют форму конусных стоек, сужающихся к вершине. Как

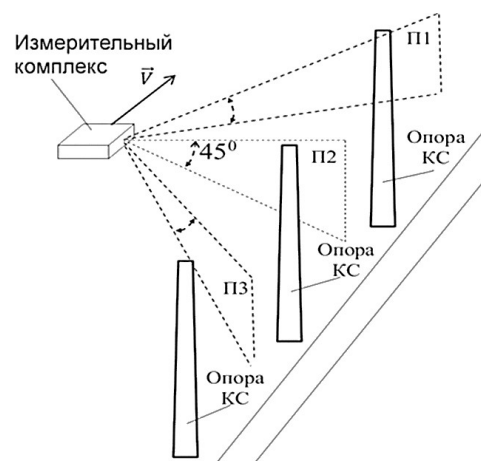


Рис. 1. Схема трёхплоскостного измерения расстояний с использованием блока ЛСД
Fig. 1. Diagram of three-plane distance measurement using an LSD unit

уже упоминалось, измерительный модуль (блок) с шестью ЛСД закрепляется на корпусе БПЛА [11, 12]. ЛСД, распределённые по трём плоскостям (П1, П2, П3), осуществляют измерение расстояний до ЖБ опоры в соответствии с приведённой схемой (рис. 1).

Алгоритм расчёта угла наклона железобетонных опор включает следующие шаги:

- 1) выполняются измерения расстояний до каждой ЖБ опоры в процессе пролёта БПЛА (рис. 2);
- 2) полученные данные формируются в массивы, которые сохраняются в переменных $L4в$, $L5в$, $L6в$, $L1н$, $L2н$, $L3н$. На основе массивов данных вычисляются средние значения минимальных расстояний по трём парам лазерных дальномеров. В частности, для средней плоскости определяются величины $L20$ и $L50$;
- 3) на основе массивов измеренных расстояний определяются радиусы окружностей в плоскостях сечений опоры: большой (R) и малый (r) —

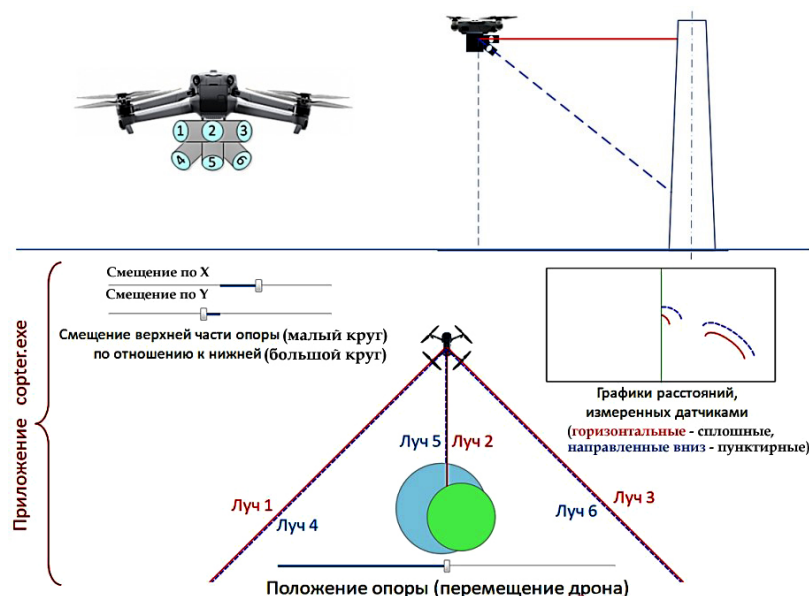


Рис. 2. Вид окна разработанной программы, моделирующей измерения, с помощью мобильного измерительного комплекса
Fig. 2. View of the developed program simulating measurements using a mobile measuring complex

для верхней и нижней частей соответственно (рис. 3):

$$R = \frac{S_{AB}^2 + 4(L_{2A} - L_{20})^2}{8(L_{2A} - L_{20})}, \quad (1)$$

где S_{AB} — длина хорды AB ; $L_{2A} = L_{2B}$ (см. рис. 3) — расстояния, измеренные ЛСД в симметричных точках A и B нижнего сечения опоры; L_{20} — расстояние в минимальной точке O_n — середине дуги AB .

$$r = \frac{S_{ab}^2 + 4(L_{5A} - L_{50})^2}{8(L_{5A} - L_{50})}, \quad (2)$$

где S_{ab} — длина хорды ab в верхнем сечении опоры; $L_{5A} = L_{5B}$ (см. рис. 3) — расстояния, измеренные ЛСД в симметричных точках a и b верхнего сечения опоры; L_{50} — расстояние в минимальной точке O — середине дуги ab ;

4) проводится оценка пространственного смещения центра верхнего сечения опоры по отношению к центру нижнего сечения:

— в перпендикулярном направлении пути направления ΔL

$$\Delta L = (R + L_{20}) - (r + L_{50}); \quad (3)$$

— в параллельном направлении пути направления S_j

$$S_2 = t_2 \cdot V_{\text{БПЛА}}, \quad (4)$$

где t_2 — это время пролета БПЛА от начала времени измерения L_{20} до измерения L_{30} ; $V_{\text{БПЛА}}$ — скорость БПЛА;

$$t_2 = n_{25} \cdot \Delta t, \quad (5)$$

где n_{25} — количество дискретных отсчетов длительностью Δt при пролете расстояния S_2 по горизонтали между проекциями точек 2 и 5 на горизонтальную ось; $\Delta t = 1 / f_{ACA}$;

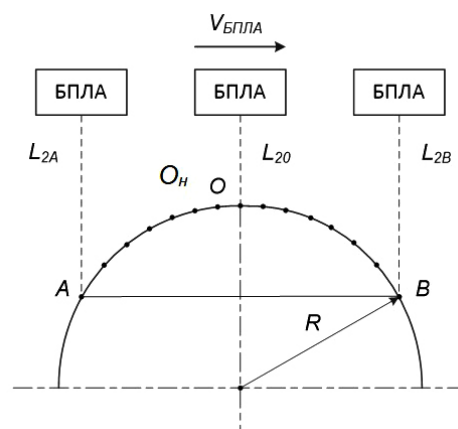


Рис. 3. Определение величины радиуса R опоры на уровне нижней плоскости сканирования
Fig. 3. Determining the value of the radius R of the support at the level of the lower scanning plane

5) определение углов отклонения согласно схемам на рис. 1, 2 и 3:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{\Delta L}{S_2}\right); \quad (6)$$

$$\gamma_{\perp} = \text{arctg}\left(\frac{\Delta L}{h}\right); \quad (7)$$

$$\gamma_{||} = \arctg\left(\frac{S_2}{h}\right); \quad (8)$$

$$h = L_{20} \cdot \sin 45^\circ; \quad (9)$$

$$\Theta = \arctg(\sqrt{\text{tg}^2(\gamma_{||}) + \text{tg}^2(\gamma_{\perp})}); \quad (10)$$

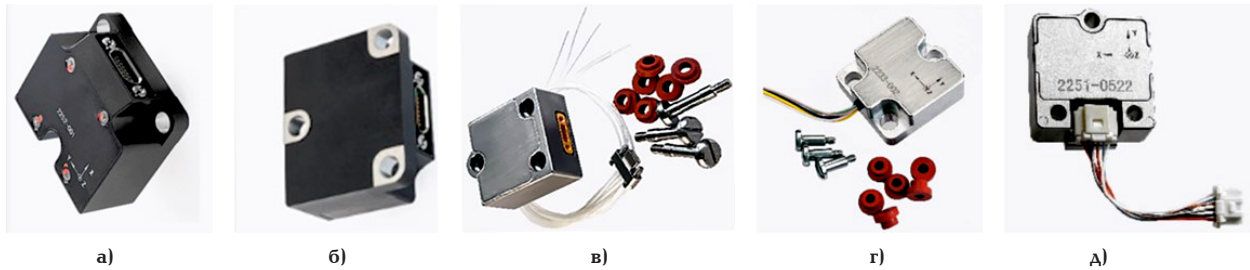


Рис. 4. Инерциальный измерительный модуль (системы), внешний вид моделей:
а) М301 (лицевая сторона); б) М302 (сторона основания); в) М303; г) М304; д) М305 [16]
Fig. 4. Inertial measurement unit (system), external appearance of models:
a) M301 (front side); б) M302 (base side); в) М303; г) М304; д) М305

— углы наклона опоры: $\gamma_{\perp}$ и $\gamma_{\parallel}$ — проекции угла наклона опоры контактной сети в плоскостях перпендикулярной и параллельной направлению железнодорожного пути;

— геометрические размеры: h — расстояние между верхней и нижней плоскостью сканирования ЛСД по вертикальной оси;

— ориентирование опоры относительно пути: α — угол между проекцией опоры на горизонтальной плоскости и направлением железнодорожного пути;

— общее отклонение: Θ — результирующий угол отклонения железобетонной опоры от вертикального положения.

Порядок расчета погрешности измерений угла отклонения опоры с учетом инструментальных погрешностей измерительного комплекса будем использовать по методике метрологического анализа, описанной ранее в статье [13]. Далее обратим внимание на обзор основных причин, влияющих на стабильность полета БПЛА и идею предлагаемого метода для стабилизации полета БПЛА с помощью комплексной интеграции датчиков и контроля параметров с частичным дублированием функций друг друга для повышения точности.

Создание системы стабилизации для БПЛА — это сложная задача, которая требует точного понимания движения объекта, особенно над водной поверхностью. Разработка современной системы стабилизации для низкоскоростного объекта, такого как БПЛА, является сложным инженерным процессом из-за множества факторов, влияющих на управление положением объекта. Эти факторы включают инерцию, гравитацию, аэродинамику, самовибрацию из-за силы тяги двигателей, которые оказывают воздействие на измерительный комплекс в течение всего полета [14–15].

Идея предлагаемого метода. Стабилизация полета БПЛА с помощью комплексной интеграции датчиков и дальнейшей программной обработки полученных данных, а также автоматической корректировки работы системы управления БПЛА для максимально точного выполнения полетных заданий с минимально возможными отклонениями, тем самым повышая метрологические характеристики измерительного комплекса в целом.

Мониторинг опор контактной сети железной дороги

Задача: измерение угла наклона опоры и смещения ее вершины.

Без системы стабилизации: ветровые нагрузки и вибрации приводят к колебаниям БПЛА, которые интерпретируются системой как смещение опоры, порождая ложные данные.

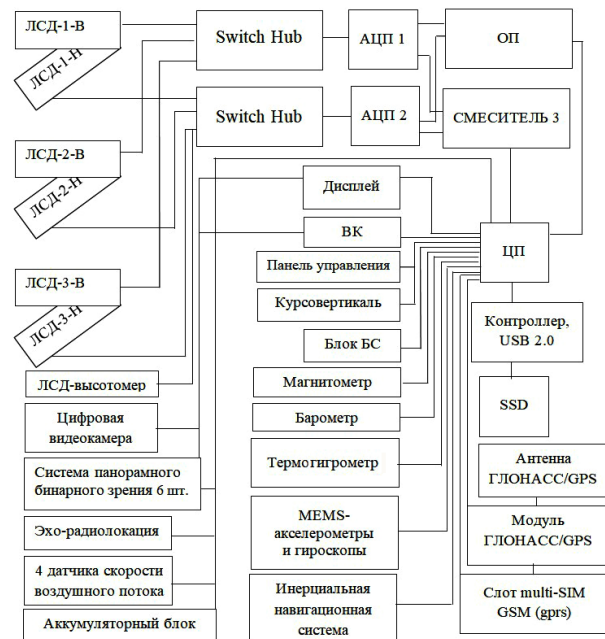


Рис. 5. Общая схема измерительного комплекса, БПЛА с набором датчиков (на рисунке приняты обозначения: оперативная память (ОП), видеоконтроллер (ВК), блок связи (БС), твердотельный накопитель (SSD), аналого-цифровые преобразователи (АЦП 1, АЦП 2))
Fig. 5. General scheme of the measuring complex, UAV with a set of sensors (the figure uses the designations RAM (OP), videocontroller (VC), communication unit (BS), solid-state drive (SSD), analog-to-digital converters (АЦП 1, АЦП 2))

С системой стабилизации: данные инерциальной навигационной системы (ИНС) и искусственного интеллекта (ИИ) точно отделяют собственное движение БПЛА от статичного положения опоры. Обеспечивается равномерная скорость полета по траектории облета, что гарантирует одинаковую плотность и точность сканирования по поверхности. Результат — достоверное измерение параметров опоры с субмиллиметровой точностью в измерениях.

Комплекс датчиков и систем:

Инерциальная навигационная система. Как следует из названия, инерциальная навигационная система (ИНС) призвана решать навигационные задачи. Это метод определения координат, скорости и угловой ориентации объекта на основе измерения и интегрирования его ускорения (рис. 4). Основной особенностью ИНС является выдача навигационной информации автономно — без привлечения внешних источников информации (сигналов со спутников или радиомаяков).

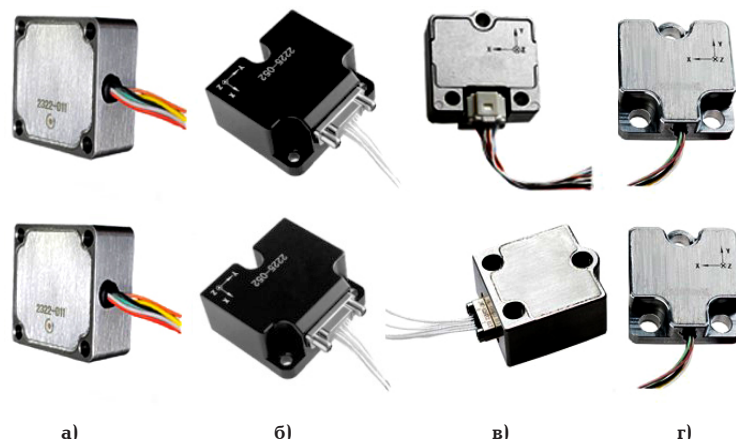


Рис. 6. Вид MEMS гироскопов в алюминиевых и стальных корпусах:
а) H111-300; б) H301; в) H302; г) H303
Fig. 6. View of MEMS gyroscopes in aluminum and steel housings:
а) H111-300; б) H301; в) H302; г) H303

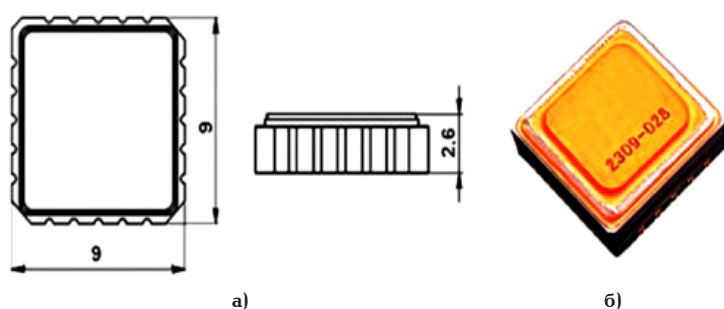


Рис. 7. ИМС MEMS акселерометра или инклинометра:
а) габаритные размеры; б) внешний вид [16]
Fig. 7. MEMS accelerometer or inclinometer IC:
а) overall dimensions; б) appearance

Общая схема измерительного комплекса с использованием БПЛА и набором датчиков для стабилизации полета приведена на рис. 5.

Из всех навигационных систем ИНС являются единственными, которые соответствуют таким важным требованиям, как универсальность, полная автономность, помехозащищенность и помехоустойчивость. Существующие ИНС обеспечивают более высокую точность навигации по сравнению с воздушно-доплеровскими системами. Помимо вычисления продольной и поперечной координат, ИНС определяют также угловое положение летательного аппарата в выбранной системе координат, то есть курс, крен, тангаж. Угловое положение определяется путем измерения отклонений летательного аппарата от запомненной в ИНС выбранной системы координат.

Основными инерциальными датчиками можно считать акселерометры и гироскопы (рис. 6, 7). При помощи их комплексного объединения и создаются устройства для измерения параметров движения с большой возможностью расширения их функциональности. Принцип работы и назначения существующих видов и типов акселерометров подробно описан выше, а насчет инклинометров можно добавить следующее. В настоящее время выпускается большое количество компактных по размерам инклинометров аналогового и цифрового типов, основанных на разных принципах работы (использование принципа жидкостного, конденсаторного, электронного, компенсаторного и др.), аналогичных акселерометрам, только при обработке показаний

с инклинометров, отличающихся своим принципом преобразования показаний данных от датчика, — выдавая в результате обработки угол наклона в определенной осевой плоскости, а не ускорение, как это делает акселерометр.

Инклинометры, аналогично и акселерометры, производятся различной точности с определенным количеством контрольных осей в зависимости от назначения и типа работ. В России производят различные инклинометры, в основном на базе научно-исследовательских лабораторий (НИЛ), научно-исследовательских центров (НИЦ). В качестве примера омской разработки инклинометров можно привести скважинный инклинометр серии ИОН ЗАО «Энергонефтемаш» (г. Омск), но масса, габариты и функциональные возможности этой модели не соответствуют нашим требованиям для применения в БПЛА. Одними из лучших по точности и надёжности в области разработки цифровых инклинометров и их производства являются две швейцарские фирмы: Leica Geosystems и Wyler AG (погрешность измерения составляет всего $\pm 10''$ угловых секунд) [14, 15].

Инерциальная группа — это 5-осевые MEMS-акселерометры и гироскопы. Распределенная сеть таких датчиков (рис. 6, 7) позволяет не только измерять линейные ускорения и угловые скорости по трем осям, но и идентифицировать паразитные вибрационные моды (крен, тангаж, рыскание, а также высокочастотные вибрации). Это ключ для компенсации влияния вибраций двигателей [14, 15].

Гироскопы применяются для определения изменения углов тангажа, крена и курса, после чего эта информация проходит пропорциональный интегральный дифференцирующий (ПИД) регулятор, обрабатывается и подаётся на контроллер, что позволяет стабилизировать БПЛА. Кроме 3- и 5-осевых систем, а также для высокоточных устройств БПЛА применяются даже 6-осевые системы гироскопической стабилизации, что позволяет БПЛА более стабильно держать курс, неподвижно парить в воздухе или же, если потребуется, более мягко и отвесно снижаться или набирать высоту.

Гироскоп предназначен для измерения угла наклона/поворота, а с системой обработки сигнала — для измерения углового ускорения и угловой скорости. Из этого понятия и возник отечественный термин под названием «Датчик угловой скорости» (ДУС). Конструктивное разнообразие современных гироскопов довольно обширно, как по их назначению, так и по их точности: волоконно-оптические (ВОГ), кольцевые лазерные (КЛГ), твердотельные волновые (ТВГ) и т. д. В статье рассмотрены наиболее важные и точные данные для контроля состояния и стабилизации БПЛА в полете. Выполненные по технологии MEMS (более точные и быстрые по скорости отклика) гироскопы, применяемые для задач достижения высокой точности и стабилизации бортовых систем, и так называемые гироскопические системы стабилизации (ГСС), широко используются в различных системах БПЛА и в современных космических станциях и летательных аппаратах. Также для этих целей применяется гиростабилизированная платформа (ГСП). Указанные устройства служат для определения углов поворота, а в первую очередь для стабилизации в пространстве каких-либо объектов или приборов, где такое устройство установлено (к примеру, на БПЛА), для максимально возможного устранения влияния на них внешних воздействий (воздушных потоков), отклоняющих объект от намеченного курса или заданного положения в пространстве.

Элементы MEMS-акселерометра, кристалл MEMS-гироскопа могут размещаться в один из стандартных корпусов ИМС (рис. 6), а тот, по потребности и в зависимости от задачи, вместе со всеми сопутствующими схемами предварительной обработки закрывается внешней оболочкой с выходом в виде кабельного жгута или разъёма (рис. 6) [14, 15].

Прибор «Курсовертикаль» вычисляет и стабилизирует опорные курсовой и вертикальный углы (рис. 8). Такой прибор составляет канал между географической системой координат (ГСК) и связанной системой координат (ССК), начальная точка которой совпадает с начальной точкой ГСК, а оси соответствуют, как правило, Y — продольной оси, Z — вертикальной, X — перпендикулярной им боковой оси транспортного средства, на котором установлена курсовертикаль. В высоких широтах вместо географической используется полусвободная в азимуте система координат. Технически курсовертикаль чаще всего реализуется как гироскопическая и датчик курса, сделанный на основе гироскопа, но только очень редко применяется с корректируемыми данными, то есть редко интегрируются, например, с показаниями приёмников спутниковой системы позиционирования и навигации, описываемой далее [16, 17]. Подобная интеграция позволяет значительно повышать точность, стабильность полетов, а также их контроля для систем

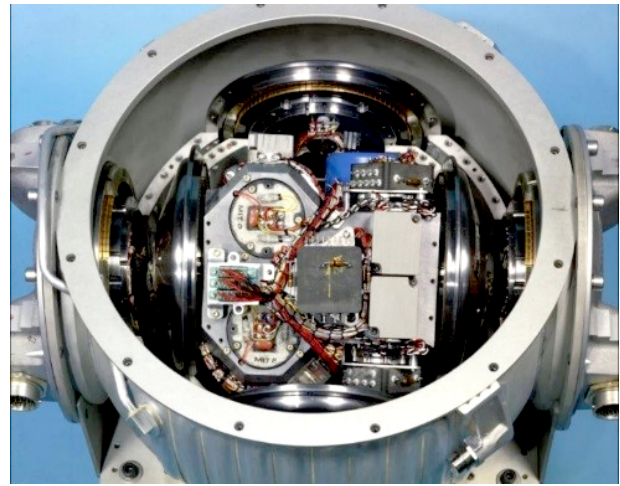


Рис. 8. Вид самого высокоточного из гироскопов стабилизации, называемый курсовертикаль для БПЛА
Fig. 8. View of the most accurate of the stabilization gyroscopes, called the heading and vertical gyro for UAVs

БПЛА. Поскольку выявить ошибку получаемого потока данных при наличии нескольких параллельных датчиков или систем контроля намного проще, то, следовательно, можно получить наиболее высокоточное результирующее значение измерений.

Внешняя навигационная коррекция:

— GNSS (GPS/ГЛОНАСС). Обеспечивает глобальную привязку и коррекцию накопленной ошибки ИНС. Использование двухсистемного приемника повышает надежность и точность позиционирования [16, 17];

— система лазерных высотомеров. Четырехкомпонентная система (три датчика, ориентированы под углом 45° к вертикали, и один направлен вертикально вниз) формирует точную цифровую модель рельефа (ЦМР) непосредственно под БПЛА и вокруг. Это позволяет определять высоту и вектор смещения относительно сложного рельефа с высокой частотой, независимо от GNSS;

— эхо-радиолокация (радиовысотомер). Используется как резервный или дополняющий канал для измерения абсолютной высоты над поверхностью, особенно в условиях, где лазерный луч может быть неэффективен. В сложных метеоусловиях (туман, дым), где оптические системы теряют эффективность, может использоваться малогабаритная эхорадиолокационная система (радиовысотомер), дополняющая данные лазерных высотомеров.

Атмосферная группа:

— барометрические датчики (комбинированные). Используется комбинация прецизионных и быстродействующих MEMS-барометров (рис. 9). Первые обеспечивают точное определение абсолютной высоты, вторые — реакцию на вертикальные порывы ветра, вызванные восходящими/нисходящими потоками воздуха;

— четыре цифровых датчика скорости воздушного потока, расположенные каждый симметрично в четырёх направлениях возможного движения. Они позволяют оценивать вектор воздушной скорости и детектировать микропорывы и сдвиги ветра до их существенного влияния на положение аппарата (рис. 10).

Системы ориентации и машинного зрения:

— датчик магнитного поля (электронный компас) корректирует гироскопический дрейф по курсу [18], но изначально это было просто устройство

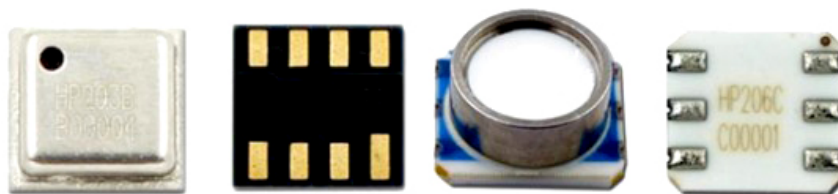


Рис. 9. Внешний вид влагозащищённого барометра HP206C
Fig. 9. External appearance of the HP206C waterproof barometer



Рис. 10. Комплект цифрового датчика скорости воздушного потока
MATEK Airspeed ASPD-4525 [16]
Fig. 10. MATEK Airspeed ASPD-4525 Digital Air Flow Sensor Kit [16]

для измерения направления магнитного поля, просто компас. Когда потребовался контроль интенсивности магнитного поля, возникло устройство — магнитометр, которое может измерять магнитное поле или магнитный дипольный момент. Далее стали изобретаться различные типы магнитометров, которые уже могут измерять направление, силу или относительное изменение магнитного поля в определенном месте. Впоследствии их стали комбинировать и объединять друг с другом, чтобы расширить их функциональность.

Датчики магнитного поля (ДМП) можно разделить на четыре основных типа в зависимости от величины измеряемого поля. Если целевое В-поле больше, чем магнитное поле Земли (максимальное значение около 60 мкТл), датчик не обязательно должен быть очень чувствительным. Для измерения поля Земли, превышающего геомагнитный шум (около 0,1 нТл), требуются более совершенные датчики. Для применения обнаружения магнитных аномалий необходимо использовать датчики в разных местах для подавления пространственно-коррелированного шума и для достижения лучшего пространственного разрешения.

Для измерения поля ниже геомагнитного шума необходимо использовать гораздо более чувствительные датчики магнитного поля. Эти датчики в основном применяются в медицинских и биомедицинских приложениях, таких как МРТ и мечение молекул.

Существует множество подходов к магнитному зондированию, включая датчик эффекта Холла, магнитодиод, магнитотранзистор, AMR магнитометр, GMR магнитометр, магнитный туннельный переход магнитометр, магнитооптический датчик, MEMS-датчик на основе силы Лоренца, MEMS-датчик на основе электронного туннелирования, MEMS-датчик на основе электронного компаса, датчик магнитного поля ядерной прецессии, датчик магнитного поля с оптической накачкой, магнитометр Fluxgate, датчик магнитного поля с поисковой катушкой и SQUID магнитометр.

Подробнее рассмотрим характеристики применяемых в БПЛА магнитных MEMS-датчиков. Показателями их эффективности являются несколько параметров: добротность, резонансная частота, форма модуляции, чувствительность и разрешение [18, 19].

Основное преимущество ДМП на основе MEMS — это малый размер, поэтому его можно разместить очень близко к месту измерения и тем самым достичь более высокого пространственного разрешения, чем у других ДМП. Кроме того, для создания ДМП MEMS не требуется микрообработки магнитного материала. Следовательно, стоимость датчика может быть значительно снижена. Интеграция датчика MEMS и микроэлектроники может еще больше уменьшить размер всей системы измерения магнитного поля. По поводу интеграции можно привести реальный пример: цифровой компас LSM303DLH компании STM имеет корпус размером всего 5×5×1 мм;

— система 6-направленного панорамного бинарного зрения — это камеры, расположенные по всем осям, в режиме бинарного зрения (выделение контуров) обеспечивают сверхбыстрое обнаружение и обход препятствий, а также дополнительный визуальный одометр для коррекции ИНС при отсутствии GNSS.

Метрологическая оценка

При вертикальном отклонении измерительного комплекса при пролете БПЛА относительно исследуемой опоры наблюдается отклонение лучей ЛСД на угол $\Delta\alpha_b$ и смещение проекции точек при измерении на опоре, как показано на рис. 11.

Так, при вертикальном отклонении на угол $\Delta\alpha_b = 5^\circ$ смещение проекции точек измерения на опоре произойдет по линиям L'_4, L'_5, L'_6 — в нижней плоскости сканирования и L'_1, L'_2, L'_3 — в верхней плоскости сканирования. Подставив в выражение (3) исходные данные $\alpha = 45^\circ$; $\Delta\alpha_b = 5^\circ$; $R = 0,21$ м; $r = 0,15$ м, определим смещение верхнего сечения опоры в сторону железнодорож-

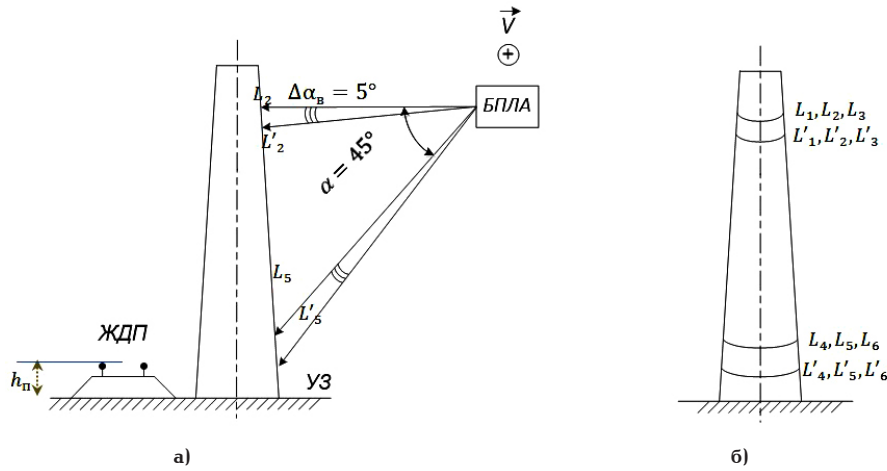


Рис. 11. Вертикальное отклонение измерительного комплекса:
а) отклонение лучей ЛСД; б) проекции точек при измерении на опоре
Fig. 11. Vertical deviation of the measuring complex: а) deviation of the LSD beams;
б) projections of points during measurement on the support

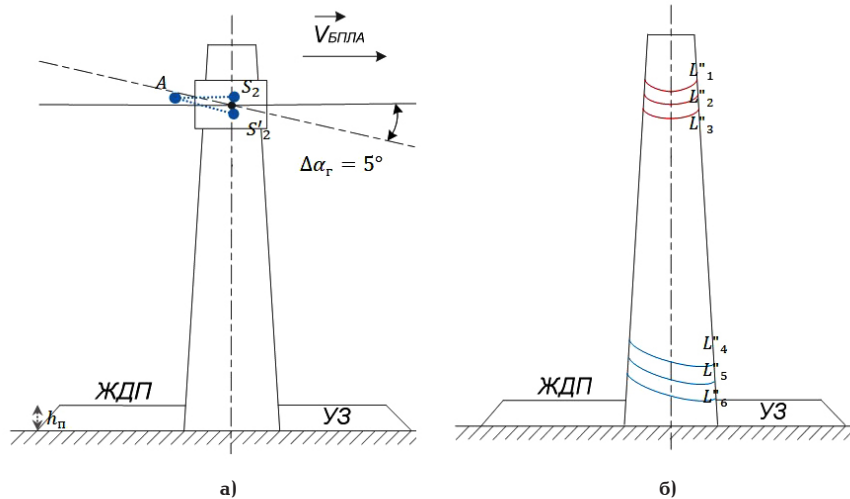


Рис. 12. Горизонтальное отклонение измерительного комплекса:
а) отклонение траектории полета БПЛА; б) проекции точек при измерении на опоре
Fig. 12. Horizontal deviation of the measuring complex: а) deviation of the UAV flight trajectory;
б) projections of points during measurement on the support

ного пути (ЖДП) $\Delta L = 0,06$ м (без отклонения) и $\Delta L' = 0,1$ м (с вертикальным отклонением).

Углы наклона опоры в сторону железнодорожного пути можно определить по выражению (7) с использованием данных, полученных выше: $\gamma_{\perp} = 0,34^{\circ}$ (без отклонения) и $\gamma'_{\perp} = 0,34^{\circ}$ (с вертикальным отклонением), тогда абсолютная погрешность $\Delta\gamma_{\perp} = 0,23^{\circ}$.

Относительную погрешность определения угла отклонения, вызванную отклонением измерительного комплекса в вертикальной плоскости, относительно ЖДП, можно определить выражением:

$$\delta\theta_{\perp} = \frac{\Delta\gamma_{\perp}}{\Delta\gamma_{\perp\max}} 100\% = \frac{0,57 - 0,34}{2} 100\% = 11,5\%, \quad (11)$$

где $\Delta\gamma_{\perp\max} = 2^{\circ}$ — максимально допустимый угол отклонения опоры в сторону ЖДП.

При горизонтальном отклонении измерительного комплекса при пролете БПЛА относительно исследуемой опоры наблюдается отклонение лучей ЛСД на угол $\Delta\alpha_r$ и смещение проекции точек при измерении на опоре, как показано на рис. 12.

При горизонтальном отклонении на угол $\Delta\alpha_r = 5^{\circ}$ смещение проекции точек измерения на опоре произойдет по линиям L''_4, L''_5, L''_6 — в нижней плоскости сканирования и L''_1, L''_2, L''_3 — в верхней плоскости сканирования.

Угол наклона опоры параллельно железнодорожного пути будет определяться по выражению (8):

$$\Delta\alpha_r = \gamma_{||} = \arctg\left(\frac{S_2}{h}\right). \quad (12)$$

Используя $\gamma_{||} = 1,7^{\circ}$ (без отклонения) и $\gamma'_{||} = 1,72^{\circ}$ (с горизонтальным отклонением), получим абсолютную погрешность $\Delta\gamma_{||} = 0,02^{\circ}$.

Относительную погрешность определения угла отклонения, вызванную отклонением измерительного комплекса в горизонтальной плоскости относительно ЖДП, можно определить выражением:

$$\delta\theta_{||} = \frac{\Delta\gamma_{||}}{\Delta\gamma_{||\max}} 100\% = \frac{1,72 - 1,7}{3} 100\% = 0,67\%, \quad (13)$$

где $\Delta\gamma_{||\max}$ — максимально допустимый угол отклонения опоры параллельно ЖДП.

Внедрение описанной системы позволяет существенно повысить следующие метрологические характеристики измерительного комплекса БПЛА:

— точности за счет снижения систематической и случайной погрешности измерений;

— стабильности за счет уменьшения дрейфа показаний во времени и при изменении внешних условий.

Повышение воспроизводимости: результаты измерений, проведенных в разное время и в разных погодных условиях, являются сопоставимыми [20].

Заключение

Разработанная архитектура комплексной системы стабилизации на основе глубокой интеграции разнородных датчиков демонстрирует высокую эффективность в подавлении как внутренних (вибрационных), так и внешних (атмосферных) возмущений с уменьшением относительных погрешностей измерения угла отклонения опоры по сравнению с классическими БПЛА, имеющими в своей конструкции не более двух датчиков ориентации (например, барометр и инклинометр) и визуального контроля (видеокамеры) [1, 4].

Методами компьютерного моделирования и расчетов по ранее приведенному алгоритму подтверждено, что такая система не только кардинально повышает устойчивость полета, но и напрямую влияет на уменьшение результирующей погрешности за счет уменьшения ее методической и дополнительной составляющих, не превышающих 12 % относительной погрешности конечного результата. Интеграция предложенной системы позволяет рассматривать БПЛА не просто как носитель датчиков, а как прецизионную измерительную платформу, что позволяет использовать измерительный комплекс для выполнения высокоточных инженерных задач.

Перспективы дальнейших исследований включают в себя интеграцию более компактных квантовых сенсоров, развитие кооперативной навигации в рое БПЛА и создание самообучающихся алгоритмов ИИ, которые не только парируют возмущения для удержания курса, но и активно компенсируют их влияние на бортовые измерительные приборы, тем самым повышая метрологический класс всего комплекса в целом и адаптируясь к уникальным летным характеристикам каждого конкретного аппарата.

Список источников / References

1. Кузнецов А. А., Жуков Ю. О., Кузнецова О. Н. Методика повышения точности траекторных измерений с использованием алгоритмов оперативной оценки координат маневрирующих летательных аппаратов // Вестник метролога. 2023. № 3. С. 31–34. EDN: VQDOOH.

Kuznetsov A. A., Zhukov Yu. O., Kuznetsova O. N. Metodika povysheniya tochnosti trayektornykh izmereniy s ispol'zovaniyem algoritmov operativnoy otsenki koordinat manevriruyushchikh letatel'nykh apparatov [Technique for improving the accuracy of trajectory measurements using algorithms for the operational evaluation of the coordinates of maneuvering aircraft]. *Vestnik Metrologa*. 2023. No. 3. P. 31–34. EDN: VQDOOH. (In Russ.).

2. Daponte P., Vito L. De, Mazzilli G. [et al.]. Metrology for drone and drone for metrology: Measurement systems on small civilian drones. *2015 IEEE Metrology for Aerospace (MetroAeroSpace)*, Benevento, Italy. 2015. P. 306–311. DOI: 10.1109/MetroAeroSpace.2015.7180673.

3. Boshoff F. M., Barros G., Kuhlentkötter B. Performance measurement of unmanned aerial vehicles to suit industrial applications. *Prod. Eng. Res. Devel.* 2025. Vol. 19. P. 429–453. DOI: 10.1007/s11740-024-01313-y.

4. Беспилотные аппараты «БПЛА-2024»: сб. ст. Междунар. молодежного форума, Минск, 22–26 апреля 2024 г. / отв. за изд. И. В. Войтов. Минск: БГТУ, 2024. 294 с. ISBN 978-985-897-184-7.

Bespilotnyye apparaty «BPLA-2024»: [Unmanned aerial vehicles “UAV-2024”] / ed. by I. V. Voytov. Minsk, 2024. 294 p. ISBN 978-985-897-184-7. (In Russ.).

5. Бузало Н. А., Кундюрюкова Д. Н., Пономарева Р. Р. Применение беспилотных летательных аппаратов при обследовании зданий и сооружений // Строительство и архитектура. 2022. Т. 10, № 1. С. 1–15. DOI: 10.29039/2308-0191-2021-10-1-6-10. EDN: DVSNIB.

Buzalo N. A., Kundryutskova D. N., Ponomareva R. R. Primeneniye bespilotnykh letatel'nykh apparatov pri obsledovanii zdaniy i sooruzheniy [Use of unmanned aerial vehicles in surveying buildings and structures]. *Stroitel'stvo i arkhitektura. Construction and Architecture.* 2022. Vol. 10, no. 1. P. 1–15. DOI: 10.29039/2308-0191-2021-10-1-6-10. EDN: DVSNIB. (In Russ.).

6. Пат. 2717703 C1 Российская Федерация, МПК G 05 D 1/08. Способ определения курса беспилотного летательного аппарата и беспилотный летательный аппарат / Ю. Чень. № 2019126673; заявл. 26.05.2017; опубл. 25.03.2020. Бюл. 9.

Patent No. 2717703 C1 Russian Federation, IPC G 05 D 1/08. Spособ opredeleniya kursa bespilotnogo letatel'nogo apparata i bespilotnyy letatel'nyy apparat [Method for determining the course of an unmanned aerial vehicle and an unmanned aerial vehicle] / Yu. Chen'. No. 2019126673. (In Russ.).

7. Моисеев В. С. Динамика полета и управление беспилотными летательными аппаратами: моногр. Казань: Школа, 2017. 416 с.

Moiseyev V. S. Dinamika poleta i upravleniye bespilotnymi letatel'nyimi apparatami [Flight dynamics and control of unmanned aerial vehicles]. Kazan, 2017. 416 p. (In Russ.).

8. Тимофеев В. А. Развитие беспилотных летательных аппаратов. Беспилотный летательный аппарат: будущее авиации? // Опыт применения средств поражения в зоне проведения специальной военной операции и защита от них: сб. науч. ст. и материалов научно-практ. семинара, Краснодар, 17–18 сентября 2024 года. Краснодар: Краснодарское высшее военное авиационное училище летчиков им. А. К. Серова, 2024. С. 113–117.

Timofeyev V. A. Razvitiye bespilotnykh letatel'nykh apparatov bespilotnyy letatel'nyy apparat: budushcheye aviatsii? [Development of unmanned aerial vehicles Unmanned aerial vehicle: the future of aviation?]. *Opyt Primeneniya Sredstv Porazheniya v Zone Provedeniya Spetsial'noy Voyennoy Operatsii i Zashchita ot Nikh.* Krasnodar, 2024. P. 113–117. (In Russ.).

9. Popov D. Application of unmanned aerial vehicle technologies in construction // Universum: технические науки. 2024. No. 1-4 (118). P. 26–29. DOI: 10.32743/UniTech.2024.118.1.16657.

10. Fritzel T., Steiner H. -J., Straub R. Laser tracker metrology for UAV-based antenna measurements. *2018 IEEE Conference on Antenna Measurements & Applications (CAMA)*. Vesteros, Sweden. 2018. P. 1–3. DOI: 10.1109/CAMA.2018.8530613.

11. Kandregula V. R., Zaharis Z. D., Ahmed Q. Z. Review of unmanned aerial vehicle based antenna and propagation measurements. *Sensors.* 2024. Vol. 24 (22). 7395. DOI: 10.3390/s24227395.

12. Шныптев И. А., Кузнецов А. А., Кузьменко А. Ю. [и др.]. Использование беспилотных летательных аппаратов для определения угла наклона железобетонных опор контактной сети // Приборы. 2024. № 5 (287). С. 37–43. EDN: FKGJIN.

Shnyptev I. A., Kuznetsov A. A., Kuz'menko A. Yu. [et al.]. Ispol'zovaniye bespilotnykh letatel'nykh apparatov dlya opredeleniya ugla naklona zhelezobetonnykh opor kontaktnoy seti // *Pribory.* 2024. № 5 (287). S. 37–43. EDN: FKGJIN.

seti [Using unmanned aerial vehicles to determine the angle of inclination of reinforced concrete supports of the overhead contact network]. *Pribory. Instruments*. 2024. No. 5 (287). P. 37–43. EDN: FKJGIN. (In Russ.).

13. Пат. 2831589 С1 Российская Федерация, МПК G 01 R 31/08, В 61 К 9/08, G 01 S 5/00. Оперативный способ определения угла наклона опор контактной сети железных дорог / А. А. Кузнецов, Р. С. Курманов, Ю. М. Сосновский, И. А. Шныптев. № 2024104877; заявл. 26.02.2024; опубл. 10.12.2024. EDN: PCJKOF.

Patent No. 2831589 C1 Russian Federation, IPC G 01 R 31/08, B 61 K 9/08, G 01 S 5/00. Operativnyy sposob opredeleniya ugla naklona opor kontaktnoy seti zheleznykh dorog [Rapid method of determining angle of inclination of supports of railway contact network] / A. A. Kuznetsov, R. S. Kurmanov, Yu. M. Sosnovskiy, I. A. Shnyptev. No. 2024104877. EDN: PCJKOF. (In Russ.).

14. Шныптев И. А., Курманов Р. С., Пономарев А. В., Кузнецов А. А. К вопросу определения метрологических характеристик при измерении угла наклона опор с помощью БПЛА // Приборы и методы измерений, контроля качества и диагностики в промышленности и на транспорте: материалы Шестой всерос. науч. техн. конф. с междунар. участием. Омск: Изд-во ОмГУПС, 2025. С. 337–346.

Shnyptev I. A., Kurmanov R. S., Ponomarev A. V., Kuznetsov A. A. K voprosu opredeleniya metrologicheskikh kharakteristik pri izmerenii ugla naklona opor s pomoshch'yu BPLA [On the issue of determining metrological characteristics when measuring the angle of support using a UAV]. *Pribory i Metody Izmereniy, Kontrolya Kachestva i Diagnostiki v Promyshlennosti i na Transporte*. Omsk, 2025. P. 337–346. (In Russ.).

15. Прилепский В. А., Коптев А. Н., Коваленко Ю. В. Автоматизированная система синтеза и анализа программ контроля и испытаний сложных устройств бортовой автоматики // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2014. Т. 16, № 1-5. С. 1583–1587. EDN: TJFARJ.

Prilepskiy V. A., Koptev A. N., Kovalenko Yu. V. Avtomatizirovannaya sistema sinteza i analiza programm kontrolya i ispytaniy slozhnykh ustroystv bortovoy avtomatiki [The automated system of synthesis and analysis of control and testing programs of onboard automation complex devices]. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiyskoy akademii nauk. Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*. 2014. Vol. 16, no. 1-5. P. 1583–1587. EDN: TJFARJ. (In Russ.).

16. Бекмачев А. Точность и стабильность инерциальных датчиков KTP // Современная электроника. 2024. № 3. URL: <https://www.cta.ru/articles/soel/2024/2024-3/178374/> (дата обращения: 11.11.2025).

Bekmachev A. Tochnost' i stabil'nost' inertsiyal'nykh datchikov KTP [Accuracy and stability of KTP inertial sensors]. *Sovremennaya elektronika. Modern Electronics and Automation Technologies*. 2024. No. 3. URL: <https://www.cta.ru/articles/soel/2024/2024-3/178374/> (accessed: 11.11.2025). (In Russ.).

17. Groves P. D. Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems. Artech House, 2013. 505 p. ISBN-13: 978-1-58053-255-6.

18. Ахметшина Э. И., Пономарев Н. А., Абдюшева А. Д. Применение алгоритмов для работы с данными датчиков беспилотных летательных аппаратов // Интеграция науки и образования в вузах нефтегазового профиля-2024: материалы

Междунар. науч. конф., Салават, 22–26 апреля 2024 г. Салават: Издательство УГНТУ, 2024. С. 450–451. EDN: BBZOGP.

Akhmetshina E. I., Ponomarev N. A., Abdyusheva A. D. Primeneniye algoritmov dlya raboty s dannymi datchikov bespilotnykh letatel'nykh apparatov [Using algorithms to work with sensor data from unmanned aerial vehicles]. *Integratsiya Nauki i Obrazovaniya v Vuzakh Neftegazovogo Profilya-2024*. Salavat, 2024. P. 450–451. EDN: BBZOGP. (In Russ.).

19. Каршаков Е. В., Павлов Б. В., Тхоренко М. Ю., Папуша И. А. Перспективные системы навигации летательных аппаратов с использованием измерений потенциальных физических полей // Гирокоспия и навигация. 2021. Т. 29, № 1 (112). С. 32–51. DOI: 10.17285/0869-7035.0055. EDN: TMNNUT.

Karshakov E. V., Pavlov B. V., Tkhorenko M. Yu., Papusha I. A. Perspektivnyye sistemy navigatsii letatel'nykh apparatov s ispol'zovaniyem izmereniy potentsial'nykh fizicheskikh poley [Promising map-aided aircraft navigation systems]. *Giroskopiya i Navigatsiya*. 2021. Vol. 29, no. 1 (112). P. 32–51. DOI: 10.17285/0869-7035.0055. EDN: TMNNUT. (In Russ.).

20. Крамарь В. А. Беспилотные летательные аппараты, их электромагнитная стойкость и математические модели систем стабилизации: моногр. Москва: ИНФА-М, 2025. 180 с.

Kramar V. A. Bespilotnyye letatel'nyye apparaty, ikh elektromagnitnaya stoykost' i matematicheskiye modeli sistem stabilizatsii [Unmanned aerial vehicles, their electromagnetic resistance, and mathematical models of stabilization systems]. Moscow, 2025. 180 p. (In Russ.).

ШНЫПТЕВ Иван Алексеевич, аспирант кафедры «Теоретическая электротехника» Омского государственного университета путей сообщения, г. Омск. SPIN-код: 6766-8473

AuthorID (РИНЦ): 1265603

ORCID: 0000-0002-1672-114X

Адрес для переписки: shnivan@rambler.ru

Прозрачность финансовой деятельности: автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.

Статья поступила в редакцию 11.11.2025; одобрена после рецензирования 23.12.2025; принята к публикации 13.01.2026.

SHNYPTEV Ivan Alekseyevich, Postgraduate of the Theoretical Electrical Engineering Department, Omsk State Transport University, Omsk.

SPIN-code: 6766-8473

AuthorID (RSCI): 1265603

ORCID: 0000-0002-1672-114X

Correspondence address: shnivan@rambler.ru

Financial transparency: the author has no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.

The article was submitted 11.11.2025; approved after reviewing 23.12.2025; accepted for publication 13.01.2026.

**Новый этап международного развития:
научные рецензируемые журналы ОмГТУ интегрированы
в крупнейшую китайскую платформу BAIDU**



Baidu объединяет лучший международный опыт научных исследований. В базе данных представлено 1,4 млрд академических ресурсов и 15 млн научных статей. Для вхождения журналов в Baidu проводится тщательный анализ по критериям соответствия мировым издательским стандартам и требованиям.

Теперь статьи Омского научного вестника и его серий доступны для поиска, чтения и цитирования в Китае и Азии. Попадание в крупнейшую базу данных напрямую влияет на видимость публикаций и повышает вероятность их цитирования зарубежными коллегами.

В условиях трансформации глобального научного пространства Baidu обеспечивает авторам журналов Омского политеха выход на самый быстрорастущий рынок научных знаний в мире.

Редколлегия и редакция научных рецензируемых журналов ОмГТУ продолжит вести работу по продвижению и представлению наших изданий на ведущих научных площадках.

Полная новостная версия доступна по ссылке
<https://www.omgtu.ru/news/?eid=100232>

ОМСКИЙ НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

включен в **Перечень** рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук

Адрес редакции и издателя: 644050, Омская обл., г. Омск, пр. Мира, 11,
Омский государственный технический университет, корпус 6, каб. 424;
тел. (3812) 65-32-08; e-mail: onv@omgtu.ru

Адрес типографии: 644050, Омская обл., г. Омск, пр. Мира, 11,
Омский государственный технический университет, корпус 6, каб. 333;
тел. (3812) 65-32-08.
Цена свободная